

**MATHEMATISCHE  
ANNALEN**

**125. BAND**





# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH  
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH  
FELIX KLEIN                      DAVID HILBERT  
OTTO BLUMENTHAL              ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE MÜNSTER (WESTF.)	RICHARD COURANT NEW YORK
HEINZ HOPF ZÜRICH	KURT REIDEMEISTER MARBURG (LAHN)
FRANZ RELICH GÖTTINGEN	BARTEL L. VAN DER WAERDEN ZÜRICH

125. BAND



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG  
SPRINGER-VERLAG

1952/53

Alle Rechte vorbehalten.

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, einzelne Beiträge oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg

Printed in Germany

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

# Inhalt des 125. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Behrend, F. A., Zum Metrisierbarkeitsbegriff von K. Wagner . . . . .	140
(Anschrift: University of Melbourne, Melbourne, N. 3, Vic., Australia)	
Cartan, H., Sur une extension d'un théorème de Radó . . . . .	49
(Anschrift: 95 Boulevard Jourdan, Paris 14)	
Cordes, H. O., Separation der Variablen in HILBERTSchen Räumen . . . . .	401
(Anschrift: Göttingen, Bunsenstr. 3—5)	
Eichler, M., Note zur Theorie der Kristallgitter . . . . .	51
(Anschrift: Münster i. W., Rosenstr. 9)	
Emersleben, O., Über die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2}$ . . . . .	165
(Anschrift: Berlin-Zehlendorf, Treibjagdweg 16)	
Flathe, H., Approximation analytischer Funktionen auf nichtgeschlossenen RIEMANNschen Flächen . . . . .	287
(Anschrift: Lengerich/Westf., Tecklenburgerstr. 16)	
Hahn, W., Über uneigentliche Lösungen linearer geometrischer Differenzgleichungen . . . . .	67
(Anschrift: Berlin-Spandau, Wörther Str. 19)	
Heinz, C., Unbedingte und bedingte Invarianten bei Gruppen und bei von Gruppen umbeschriebenen Scharen von Transformationen . . . . .	32
(Anschrift: Lörrach/Baden, Haagerstr. 32a)	
Hitotumatu, S., and O. Kôta, Ideals of Meromorphic Functions of Several Complex Variables . . . . .	119
(Anschrift: Dep. of Mathematics, Tokyo University, Tokyo/Japan)	
Hlawka, E., Zur Theorie des Figurengitters . . . . .	183
(Anschrift: Wien IX, Strudelhofgasse 4, Math. Institut der Universität)	
Kato, T., Notes on Some Inequalities for Linear Operators . . . . .	208
(Anschrift: Dep. of Physics, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo/Japan)	
Kato, T., Perturbation Theory of Semi-Bounded Operators . . . . .	435
Kôta, O., siehe Hitotumatu, S.	
Lenz, H., Über die CRAMÉRSchen asymptotischen Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	307
(Anschrift: München 19, Mettinghstr. 5)	
Maaß, H., Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen 235	
(Anschrift: Heidelberg, Rottmannstr. 29)	
Moser, J., Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	366
(Anschrift: Göttingen, Bunsenstr. 3/5)	
Ohmann, D., Über die Summe der Inkreisradien bei Überdeckung . . . . .	350
(Anschrift: Frankfurt a.M., Arnsburger Str. 22 1)	
Pöschl, K., Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten . . . . .	344
(Anschrift: München 9, Schwanseest. 46)	
Richert, H.-E., Ein Gitterpunktproblem . . . . .	467
(Anschrift: Göttingen, Bunsenstr. 3/5)	

	Seite
Richter, H., Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	129
(Anschrift: Haltingen, Kr. Lörrach/Baden, Elekraweg 2)	
Richter, H., Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. II. . . . .	223
Richter, H., Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. III. . . . .	335
Röhl, H., Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. III. . . . .	448
(Anschrift: Poing 35 bei München)	
Rose, A., Self-Dual Primitives for Modal Logic . . . . .	284
(Anschrift: Dep. of Mathematics, The University, Nottingham/England)	
Rund, H., Eine Krümmungstheorie der FINSLERschen Räume . . . . .	1
(Anschrift: Freiburg i. Br., Hebelstr. 40)	
Schütte, K., und B. L. van der Waerden, Das Problem der 13 Kugeln . . . . .	325
(Anschriften: Marburg/Lahn, Lutherstraße 4; Zürich 38, Rainfußweg 7)	
Schütte, K., Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik . . . . .	394
Sommer, F., Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer kom- plexer Veränderlichen . . . . .	172
(Anschrift: Münster i. Westf., Hohenzollernring 5)	
Thimm, W., Untersuchungen über Deformationen . . . . .	19
(Anschrift: Bonn, Math. Institut der Universität)	
Thimm, W., Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. I. . . . .	145
Thimm, W., Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II. . . . .	264
Unkelbach, H., Die konforme Abbildung echter Polygone . . . . .	82
(Anschrift: Bad Godesberg, Bonner Str. 83)	
Verblunsky, S., On the curvature of level curves . . . . .	472
(Anschrift: Queen's University, Department of Mathematics, Belfast, Irland)	
van der Waerden, B. L., Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze . . . . .	213
(Anschrift: Zürich 38, Rainfußweg 7)	
van der Waerden, B. L., Zur algebraischen Geometrie 16. Vielfältigkeiten von abstrakten Ketten . . . . .	314
van der Waerden, B. L., siehe Schütte, K.	
Wang, H., The irreducibility of impredicative principles . . . . .	56
(Anschrift: Mathematical Department, Cambridge, Mass., USA)	
Wittich, H., Eindeutige Lösungen der Differentialgleichungen $w'' = P(z, w)$ . . .	355
(Anschrift: Karlsruhe-Rüppurr, Kleiststr. 9)	

## Eine Krümmungstheorie der FINSLERSchen Räume.

Von

HANNO RUND in Kapstadt.

### § 1. Einleitung.

Eine Krümmungstheorie der allgemeinen metrischen oder FINSLERSchen Räume muß offensichtlich auf einer vorher gegebenen Definition der Parallelverschiebung beruhen. In der FINSLERSchen Geometrie sind zwei solche Theorien von BERWALD [1]<sup>1)</sup> und CARTAN [2] begründet worden; diese unterscheiden sich dadurch, daß die Definitionen der Parallelverschiebung dieser Autoren voneinander verschieden sind, wobei aber ein wesentlicher gemeinsamer Gesichtspunkt darin besteht, daß man jedem Punkt des Raumes ein ausgezeichnetes Linienelement zuordnet, welches durch eine willkürlich gewählte, den Raum überdeckende Kurvenschar bestimmt wird. Der Parallelismus und die Krümmungsgrößen hängen somit von der Wahl dieser Kurvenschar ab.

In einer früheren Arbeit des Verfassers [3], an welche sich die vorliegende eng anschließt, ist der Begriff der Parallelverschiebung von einem anderen Gesichtspunkte entwickelt worden mit dem Bestreben, die ausgezeichneten Linienelemente zu vermeiden. Es soll nun eine Theorie der Krümmungseigenschaften auf Grund dieses Parallelismus dargestellt werden; diese unterscheidet sich vollständig von den oben genannten Theorien: im Ausgangspunkt sowohl wie in der Methodik. In diesem Abschnitt werden wir kurz unsere schon früher benutzte Schreibweise erklären und die Parallelverschiebung nochmals definieren. Dann soll der geometrische Gesichtspunkt, von welchem wir ausgehen werden, skizziert werden, um einen Einblick in den Aufbau unserer Theorie sofort zu ermöglichen<sup>2)</sup>.

Die Metrik unseres  $n$ -dimensionalen Punktraumes soll dadurch festgelegt werden, daß die Länge  $s$  einer Kurve

$$(1.1) \quad x^i = x^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

welche zwei Punkte  $A, B$  verbindet, durch ein Integral von der Form

$$(1.2) \quad s = \int_A^B F(x^i, x'^i) dt$$

bestimmt wird, wobei die  $x'^i$  die ersten Ableitungen der  $x^i$  nach dem Kurvenparameter  $t$  bedeuten, und die Funktion  $F$  den üblichen Annahmen der Grundfunktion eines Variationsproblems genügt: d. h.  $F$  ist positiv, stetig und hinreichend oft stetig differenzierbar in den  $x^i, x'^i$ , und positiv homogen erster Ordnung, somit konvex in den  $x'^i$ . Hängt  $F$  nur von den  $x'^i$  ab, erhalten wir auf diese Weise einen MINKOWSKISchen Raum, da dann die Extremalen

<sup>1)</sup> Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

<sup>2)</sup> Dieser Gesichtspunkt, zusammen mit den wesentlichsten Ergebnissen der vorliegenden Arbeit, ist teilweise in den Kapiteln 7 und 8 der Dissertation [4] des Verfassers dargestellt.

unseres Variationsproblems (d. h. die geodätischen Linien des FINSLERSchen Raumes) bekanntlich Geraden sind. Wir können also jedem Punkt  $P(x^i)$  einen MINKOWSKISchen Tangentialraum  $T_n(P)$  zuordnen, welcher die Metrik des FINSLERSchen Raumes in der Umgebung von  $P$  lokal bestimmt<sup>3)</sup>.

Der metrische Tensor wird definiert als

$$(1.3) \quad g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F^2(x^k, x'^k)}{\partial x'^i \partial x'^j},$$

und aus den Homogenitätseigenschaften von  $F$  ergeben sich sofort die folgenden Identitäten<sup>4)</sup>:

$$(1.4) \quad ds^2 = g_{ij}(x^k, dx^k) dx^i dx^j$$

für die Länge  $ds$  eines Linienelements mit den Komponenten  $dx^i$ , und

$$(1.5) \quad \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} x'^i = \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} x'^k = 0,$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 g_{ij}(x, x')}{\partial x'^i \partial x'^k} x'^i = \frac{\partial^2 g_{ij}(x, x')}{\partial x'^i \partial x'^k} x'^k = 0.$$

Auch erweist es sich als nützlich, für die kovarianten Vektoren dem Tangentialraum  $T_n$  einen zweiten dualen MINKOWSKISchen Raum  $T'_n$  beizufügen<sup>5)</sup>, wobei eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Vektoren  $x'^i$  von  $T'_n$  und den Vektoren  $y_i$  von  $T_n$  besteht; für entsprechende Vektoren wird diese Beziehung durch die Relationen

$$(1.7) \quad y_i = g_{ij}(x, x') x'^j; \quad x'^i = g^{ij}(x, y) y_j$$

ausgedrückt. Die Gleichungen der geodätischen Linien des FINSLERSchen Raumes lauten:

$$(1.8) \quad \frac{dx'^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ h k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^h x'^k = 0,$$

wobei

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ h k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} \equiv g^{ij}(x, x') [h k, j]_{(x, x')},$$

$$[h k, j]_{(x, x')} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}(x, x')}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hj}(x, x')}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}(x, x')}{\partial x^j} \right)$$

ist. Das kovariante Differential des Vektors  $X^i$  definieren wir nun durch die Gleichung

$$(1.10) \quad DX^i = dX^i + P_{hk}^i(x, x') X^h dx^k,$$

wobei die  $x'^i$  die Komponenten des Einheitsvektors in der Richtung der infinitesimalen Verschiebung  $dx^i$  sind, während die sog. „erweiterten Christoffelsymbole“  $P_{hk}^i(x, x')$  durch

$$(1.11) \quad P_{hk}^i(x, x') = \left\{ \begin{matrix} i \\ h k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} - \frac{1}{2} g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{hm}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^j$$

erklärt werden. Mit Hilfe dieser Schreibweise lassen sich die kovarianten

<sup>3)</sup> Gerade auf dieser Tatsache beruhen die Ausführungen der Arbeit [3], wobei genauere Erläuterungen angeführt werden.

<sup>4)</sup> Über doppelt vorkommende Indizes wird von 1 bis  $n$  summiert.

<sup>5)</sup> Die geometrische Bedeutung dieser Zuordnung und die Rechtfertigung der hier benutzten Tensorschreibweise ist ausführlich in der Arbeit [5] des Verfassers behandelt.

Ableitungen von ko- und kontravarianten Tensoren höherer Stufe ebenfalls ausdrücken. Für den metrischen Tensor gilt die Identität

$$(1.12) \quad Dg_{ij}(x, x') = 0;$$

und die Parallelverschiebung eines Vektors wird, wie üblich, durch das Verschwinden seiner kovarianten Ableitung bestimmt. In der Arbeit [3] wird bewiesen, daß 1. die kovariante Ableitung eines Skalars die gewöhnliche Ableitung des Skalars ergibt; daß 2. die Regel für die kovariante Ableitung eines Produktes von Tensoren sich als die übliche Produktregel der Differentialrechnung erweist; und daß 3. die geodätischen Linien diejenigen Kurven sind, für welche der Autoparallelismus gilt. Von diesen Tatsachen werden wir hier fortwährend Gebrauch machen.

Um die Krümmungsverhältnisse unseres FINSLERschen Raumes zu untersuchen, werden wir von dem folgenden Gesichtspunkt ausgehen. Wir können nicht, wie in der RIEMANNschen Geometrie, einen Krümmungstensor durch Herumführung eines Vektors um ein infinitesimales Parallelogramm erhalten, da  $P_{hk}^i$  nicht notwendig symmetrisch in den unteren Indizes ist. Diese Methode wurde zwar von BERWALD [1] und CARTAN [2] durchgeführt, aber diese Erfolge beruhten eben gerade auf dem Gebrauch des ausgezeichneten Linienelements, welches der Theorie der FINSLERschen Räume die Methoden der RIEMANNschen Geometrie zugänglich macht. Dagegen wählen wir als unseren Ansatz die Tatsache, daß die Metrik des FINSLERschen Raumes lokal durch die MINKOWSKISchen Tangentialräume bestimmt wird. Die letzteren sind aber affine Vektorräume mit identisch verschwindender Krümmung, so daß die Krümmung des FINSLERschen Raumes in einem gegebenen Punkt 0 irgendwie in den Abweichungen zwischen ihm und dem  $T_n(0)$  erscheinen muß. Nun ist es offensichtlich, daß die Abweichungen erster Größenordnung in bezug auf eine infinitesimale Verschiebung  $dx^i$  vollständig durch die  $P_{hk}^i$  ausgedrückt werden; wir müssen also *Abweichungen von der zweiten Größenordnung* aufsuchen. Dieses soll nun folgendermaßen geschehen: Im  $T_n(0)$  betrachten wir zwei infinitesimal benachbarte Geraden  $e_1, e_2$ , welche sich im Ursprung 0 schneiden, wobei der Winkel zwischen ihnen eine kleine, vorgeschriebene Größe  $d\varphi$  ist. Es seien  $P', M'$  Punkte auf  $e_1$  bzw.  $e_2$ , so daß  $OP' = OM' = s$  ist. Dann folgt aber aus der affinen Beschaffenheit des  $T_n$ , daß

$$(1.13) \quad d(\overline{P'M'})/ds = \text{const.} \quad \text{oder} \quad d^2(\overline{P'M'})/ds^2 = 0$$

ist. Bilden wir indessen diejenigen geodätischen Linien  $E_1, E_2$  des FINSLERschen Raumes, deren Tangenten im Punkte 0 die Geraden  $e_1$  bzw.  $e_2$  sind, so können wir wieder die Punkte  $P$  und  $M$  auf  $E_1$  und  $E_2$  bestimmen, derart, daß die Bogenlängen  $OP$  und  $OM$  entlang  $E_1$  und  $E_2$  wieder gleich  $s$  sind. Ist nun  $s$  selbst eine kleine Größe, so ist der Bogen  $PM$  der geodätischen Linie, welche durch  $P$  und  $M$  festgelegt wird, klein in bezug auf  $d\varphi$ , und wir dürfen deshalb  $PM$  als einen Vektor im Tangentialraum  $T_n(P)$  des Punktes  $P$  betrachten. Die Berechnung des § 2 wird aber zeigen, daß im Gegensatz zu (1.13) im allgemeinen

$$(1.14) \quad D^2(\overline{PM})/Ds^2 \neq 0$$

ist; es ist also dieser Ausdruck ein Maß der Abweichung von der gewünschten Größenordnung.

Offenbar ist die Berechnung dieser Größe nichts anderes als das Problem der *geodätischen Abweichung* im FINSLERSchen Raum, womit wir uns im § 2 und § 3 befassen werden. Dadurch werden wir zu einem Krümmungstensor gelangen, welcher in der Gleichung für die geodätische Abweichung auftreten wird. Ferner werden wir sehen (§ 4), daß, wenn wir uns auf den zwei-dimensionalen Fall beschränken, diese sich als die bekannte Gleichung von JACOBI in der Variationsrechnung herausstellt, welche eine so wichtige Rolle in der Theorie der zweiten Variation spielt. Hieraus ersehen wir, daß unser Ausgangspunkt ein durchaus natürlicher für die FINSLERSchen Räume ist, da diese ja direkt aus der Variationsrechnung entspringen. Unsere Krümmungsgrößen können aber auch auf andere Weise geometrisch gedeutet werden (§ 5), insbesondere durch einen Vergleich des Umfanges der „MINKOWSKISchen Kugel“ (Indikatrix) im  $T_n(0)$ , mit dem Umfang der „FINSLERSchen Kugel“ mit dem Mittelpunkt 0. Endlich ist es auch möglich, ein Analogon des GAUSS-BONNETschen Satzes (§§ 6–7) mit Hilfe unserer Krümmung abzuleiten.

## § 2. Die geodätische Abweichung<sup>6)</sup>.

Wir betrachten also zwei geodätische Linien  $E_1$  und  $E_2$ , welche durch den Punkt 0 verlaufen, und wir bezeichnen mit  $x^i$  und  $s$  die Koordinaten eines veränderlichen Punktes  $P$  von  $E_1$  und die Bogenlänge  $OP$ . Entsprechende Größen in bezug auf einen Punkt  $M$  von  $E_2$  bezeichnen wir mit  $\psi^i$  und  $\sigma$ . Es sind also  $x^i, \psi^i$  Funktionen von  $s$  bzw.  $\sigma$ , und wir bestimmen eine allgemeinere Beziehung als die im § 1 angedeutete zwischen  $s$  und  $\sigma$  derart, daß die Länge des Vektors  $PM$  und ihre erste Ableitung nach  $s$  von derselben Größenordnung sind wie der Winkel<sup>7)</sup>  $d\varphi$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$ . Es seien  $\xi^i$  die Komponenten des infinitesimalen Vektors  $PM$ . Dann gilt

$$(2.1) \quad \xi^i(s) = \psi^i(\sigma) - x^i(s).$$

Die Beziehung zwischen  $P$  und  $M$ , d. h. zwischen  $s$  und  $\sigma$  soll durch eine Relation von der Form<sup>8)</sup>

$$(2.2) \quad \frac{d\sigma}{ds} = 1 + \lambda(s)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\lambda(s)$  eine stetige und stetig differenzierbare Funktion sein soll, welche wir einstweilen als willkürlich betrachten, bis auf die Bedingung, welche wir den Größenordnungen von  $\xi^i$  und  $d\xi^i/ds$  auferlegt haben.

### a) Berechnung von $D\xi^i/Ds$ .

Es seien  $x'^i, \psi'^i$  die Tangentialvektoren von  $E_1$  bzw.  $E_2$ . Dann folgt durch Differentiation von (2.1) nach  $s$ :

$$(2.3) \quad \psi'^i \frac{d\sigma}{ds} = x'^i + \frac{d\xi^i}{ds},$$

<sup>6)</sup> Die Berechnungen dieses Abschnittes sind etwas langwierig; wir werden uns deshalb möglichst kurz fassen und diejenigen Zwischenrechnungen übergehen, welche an sich keine prinzipielle Schwierigkeiten aufweisen.

<sup>7)</sup> Wir machen hier Gebrauch von der in der Arbeit [5], § 2, angegebenen Definition des Winkels.

<sup>8)</sup> Derselbe Ansatz wurde auch von LEVI-CIVITA [6] in seinen Untersuchungen über geodätische Abweichung in RIEMANNschen Räumen benützt. Leider kann man nicht das von ihm eingeführte rechtwinklige Achsensystem im FINSLERSchen Raume bilden, so daß eine einfache Verallgemeinerung seiner Methoden nicht möglich ist.



und da  $\psi'^i$  ein Einheitsvektor ist,

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = g_{ij}(\psi, \psi') \left(x'^i + \frac{d\xi^i}{ds}\right) \left(x'^j + \frac{d\xi^j}{ds}\right).$$

Entwickelt man den Unterschied  $g_{ij}(\psi, \psi') - g_{ij}(x, x')$  nach einer Taylorreihe, vernachlässigt Glieder höherer Ordnung als  $\xi^i$  und beachtet, daß  $x'^i$  auch Einheitsvektor ist, erhält man

$$(2.4) \quad \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1 + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} x'^i x'^j \xi^k + 2 g_{ij}(x, x') x'^i \frac{d\xi^j}{ds} + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} (\psi'^k - x'^k) x'^i x'^j,$$

wobei wir sofort bemerken, daß das letzte Glied wegen (1.5) identisch verschwindet.

Wir bezeichnen mit  $y_j$  die Komponenten des kovarianten Vektors im  $T'_n(P)$ , welcher  $x'^j$  im  $T_n(P)$  entspricht. Aus (1.7) folgt

$$(2.5) \quad g^{ij}(x, x') g_{ik}(x, x') = \delta^j_k;$$

und mit Hilfe dieser Gleichung zusammen mit (1.7) und (1.9) berechnen wir, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} x'^i x'^j &= \left\{ [i k, j]_{(x, x')} + [j k, i]_{(x, x')} \right\} x'^i x'^j \\ &= \left[ g_{ik}(x, x') \left\{ i k \right\}_{(x, x')}^h + g_{ih}(x, x') \left\{ j k \right\}_{(x, x')}^h \right] x'^i x'^j \\ &= 2 y_j \left\{ i k \right\}_{(x, x')}^j x'^i \end{aligned}$$

ist, so daß sich aus (2.4)

$$(2.6) \quad \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1 + 2 y_j \left[ \frac{d\xi^j}{ds} + \left\{ i k \right\}_{(x, x')}^j x'^i \xi^k \right]$$

ergibt.

Nun berechnen wir das kovariante Differential von  $\xi^j$  aus den Gleichungen (1.10) und (1.11), wobei die betrachtete Verschiebung entlang  $E_1$  sein soll. Indem wir den so erhaltenen Ausdruck mit  $y_j$  falten, wird das letzte Glied, in welchem  $y_j$  gemäß (1.7) als Funktion von  $x'^i$  ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} g_{jn}(x, x') x'^n g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{hm}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ i k \right\}_{(x, x')}^l x'^i \xi^h x'^k \\ = -\frac{1}{2} x'^n \frac{\partial g_{hn}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ i k \right\}_{(x, x')}^l x'^i \xi^h x'^k \end{aligned}$$

wegen (2.5). Dieser Ausdruck verschwindet aber wieder identisch nach (1.5), und es bleibt uns

$$(2.7) \quad y_j \frac{D\xi^j}{Ds} = y_j \left[ \frac{d\xi^j}{ds} + \left\{ i k \right\}_{(x, x')}^j x'^i \xi^k \right]$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit (2.6), so sehen wir, daß

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1 + 2 y_j \frac{D\xi^j}{Ds}$$

ist, oder, als erste Abschätzung

$$(2.8) \quad \frac{d\sigma}{ds} = 1 + y_j \frac{D\xi^j}{Ds}.$$

Wegen (2.2) ist also

$$(2.9) \quad y_j \frac{D\xi^j}{Ds} = g_{ij}(x, x') x'^i \frac{D\xi^j}{Ds} = \lambda(s).$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, daß  $\lambda(s)$  durch unsere Bedingung auch von derselben Größenordnung wie  $\xi^i$  sein muß. Es folgt auch, daß  $\lambda(s)$  die Projektion des Vektors  $D\xi^j/Ds$  auf  $E_1$  ist, so daß für den besonderen Fall, daß  $\lambda(s) = 0$  (d. h.  $s = \sigma$ ) ist,  $D\xi^j/Ds$  senkrecht in bezug auf  $E_1$  steht.

b) Berechnung von  $d^2\xi^i/ds^2$ .

Differenzieren wir (2.3) nach  $s$ , erhalten wir

$$(2.10) \quad \psi''^i \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 + \psi'^i \frac{d^2\sigma}{ds^2} = x''^i + \frac{d^2\xi^i}{ds^2};$$

und, indem wir in (2.3)  $d\sigma/ds$  mit Hilfe von (2.2) ersetzen, wird durch Multiplikation mit  $d\lambda/ds$

$$\psi'^i \frac{d^2\sigma}{ds^2} = x'^i \frac{d\lambda}{ds},$$

wenn wir wieder kleinere Größenordnungen vernachlässigen. Statt (2.10) können wir also schreiben

$$(2.11) \quad \psi''^i \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = x''^i + \frac{d^2\xi^i}{ds^2} - x'^i \frac{d\lambda}{ds}.$$

Nach (1.8) lautet die Gleichung der geodätischen Linie  $E_2$ :

$$(2.12) \quad \psi''^i = - \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(v,v')} \psi'^j \psi'^h$$

oder, unter Berücksichtigung von (2.3) und Vernachlässigung kleiner Größen

$$(2.13) \quad \psi''^i \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = - \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(v,v')} x'^j x'^h - 2 \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_{(v,v')} x'^j \frac{d\xi^k}{ds}.$$

Nun ist aber

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(v,v')} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(x,x')} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(x,x')} \xi^k + \frac{\partial}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(x,x')} \delta x'^k + \dots,$$

wobei wir wegen (2.3) und (2.2)

$$(2.14) \quad \delta x'^k = \psi'^k - x'^k = \frac{d\xi^k}{ds} - \lambda(s) \psi'^k$$

gesetzt haben. Beachten wir die Gleichung (1.8) für  $E_1$ , erhalten wir somit aus (2.13)

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \psi''^i = & x''^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(x,x')} x'^j x'^h \xi^k - 2 \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_{(x,x')} x'^j \frac{d\xi^k}{ds} \\ & - \frac{\partial}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}_{(x,x')} x'^j x'^h \delta x'^k. \end{aligned}$$

Das letzte Glied dieser Gleichung bietet einige Schwierigkeiten und bedarf deshalb besonderer Behandlung. Erstens bemerken wir hier noch, daß aus (2.5)

$$(2.16) \quad \frac{\partial g^{im}(x, x')}{\partial x'^k} g_{mp}(x, x') = - \frac{\partial g_{mp}(x, x')}{\partial x'^k} g^{im}(x, x')$$

folgt. Sodann ist wegen (1.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h &= \frac{\partial}{\partial x'^k} \left\{ g^{im}(x, x') [j h, m]_{(x, x')} \right\} x'^j x'^h \\ &= \frac{\partial g^{im}(x, x')}{\partial x'^k} g_{mp}(x, x') \left\{ \begin{smallmatrix} p \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \\ &+ \frac{1}{2} g^{im}(x, x') \left[ \frac{\partial^2 g_{hm}(x, x')}{\partial x'^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{jm}(x, x')}{\partial x'^k \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{jh}(x, x')}{\partial x'^k \partial x^m} \right] x'^j x'^h. \end{aligned}$$

In Anbetracht der Homogenitätsbeziehung (1.6) verschwindet das ganze letzte Glied, und mit Hilfe von (2.16) und (2.14) wird

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x'^k} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \delta x'^k \\ &= - g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{mp}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{smallmatrix} p \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \left( \frac{d\xi^k}{ds} - \lambda(s) \psi'^k \right). \end{aligned}$$

Da  $\lambda(s)$  von derselben Größenordnung wie  $d\xi^i/ds$  ist, dürfen wir wegen (2.2) und (2.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda(s) \psi'^k &= \lambda(s) x'^k + \lambda(s) \frac{d\xi^k}{ds} - \lambda^2(s) \psi'^k \\ &= \lambda(s) x'^k + \dots \end{aligned}$$

machen; der gesuchte Ausdruck wird demnach

$$\begin{aligned} &- g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{mp}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{smallmatrix} p \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \left( \frac{d\xi^k}{ds} - \lambda(s) x'^k \right) \\ &= - g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{mk}(x, x')}{\partial x'^p} \left\{ \begin{smallmatrix} p \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \frac{d\xi^k}{ds} \end{aligned}$$

infolge (1.5), wobei wir in der Ableitung von  $g_{mp}$  die Indizes  $p$  und  $k$  vertauscht haben; dieses ist zulässig, da nach (1.3) diese Operation nur eine Veränderung in der Differentiationsreihenfolge bedeutet.

Diesen Wert setzten wir jetzt in (2.15) ein, und gleichzeitig subtrahierten wir die so gewonnene Gleichung von (2.11): dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} + 2 \left[ \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j - \frac{1}{2} g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{mk}(x, x')}{\partial x'^p} \left\{ \begin{smallmatrix} p \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \right] \frac{d\xi^k}{ds} \\ - x'^i \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jh \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^h \xi^k = 0. \end{aligned}$$

Beachten wir nun die Definition (1.11) der  $P_{hk}^i$  und die Tatsache, daß die Klammersymbole in bezug auf die unteren Indizes symmetrisch sind, so verkürzt sich die letzte Gleichung zu der Form:

$$(2.17) \quad \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} + 2 P_{kj}^i(x, x') x'^j \frac{d\xi^k}{ds} = x'^i \frac{d\lambda}{ds} - \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_{(x, x')} x'^j x'^k \xi^h.$$

c) Berechnung von  $D^2 \xi^i / D s^2$ .

Da für den Rest dieses Abschnittes in den  $P_{hk}^i(x, x')$  fortwährend die Komponenten des Tangentialvektors von  $E_1$  die Richtungsargumente sein werden, können wir kurz  $P_{hk}^i$  schreiben, ohne eine Verwechslung zu befürchten. Bilden wir nun das kovariante Differential von  $D \xi^i / D s$ , so folgt aus der Regel (1.10)

$$\frac{D^2 \xi^i}{D s^2} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{d \xi^i}{ds} + P_{hk}^i \xi^h x'^k \right] + P_{hk}^i \left[ \frac{d \xi^h}{ds} + P_{lj}^h \xi^l x'^j \right] x'^k.$$

Führen wir die Differentiation der ersten Klammer aus und vereinfachen das so erhaltene Resultat, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^i}{D s^2} &= \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} + \frac{\partial P_{hk}^i}{\partial x'^l} \xi^h x'^k x''^l + \frac{\partial P_{hk}^i}{\partial x^j} \xi^h x'^k x'^j \\ &+ 2 P_{hj}^i \frac{d \xi^h}{ds} x'^j + P_{hk}^i \xi^h x''^k + P_{lk}^i P_{hj}^l \xi^h x'^j x'^k. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung beziehen sich die  $x''^p$  auf die geodätische Linie  $E_1$ . Setzen wir die entsprechenden Werte nach der Gleichung (1.8) in diesem Ausdruck ein, so erhalten wir nach weiterer Vertauschung der Indizes

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^i}{D s^2} &= \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} + 2 P_{kj}^i \frac{d \xi^k}{ds} x'^j + \frac{\partial P_{hk}^i}{\partial x^j} \xi^h x'^k x'^j - P_{hl}^i \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} \xi^h x'^j x'^k \\ (2.18) \quad &+ P_{lk}^i P_{hj}^l \xi^h x'^j x'^k - \frac{\partial P_{hk}^i}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ pj \end{matrix} \right\}_{(x, x')} \xi^h x'^p x'^j x'^k. \end{aligned}$$

## § 3. Die Gleichung der geodätischen Abweichung und die Krümmungsgrößen.

Ein Vergleich der soeben erhaltenen Gleichung mit (2.17) zeigt, daß man sofort zwischen beiden den unerwünschten Faktor  $d \xi^k / ds$  eliminieren kann. Es ist bemerkenswert, daß ohne diese Tatsache unsere Methode nicht durchführbar wäre. Nachdem diese Elimination ausgeführt ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^i}{D s^2} - x'^i \frac{d \lambda}{ds} &= - \left[ \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} - \frac{\partial P_{hk}^i}{\partial x^j} + P_{hl}^i \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} \right. \\ &\quad \left. - P_{lk}^i P_{hj}^l \right] \xi^h x'^j x'^k - \frac{\partial P_{hk}^i}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ pj \end{matrix} \right\}_{(x, x')} \xi^h x'^p x'^j x'^k. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1.5) und (1.6) kann dieses Ergebnis in einer symmetrischeren Form geschrieben werden. Da die entsprechenden Rechnungen analog zu denen für die Gleichung (2.7) ausgeführt sind, sollen sie hier übergangen werden. Wir erhalten endlich

$$(3.1) \quad \frac{D^2 \xi^i}{D s^2} - x'^i \frac{d \lambda}{ds} = - R_{khj}^i(x, x') \xi^h x'^j x'^k,$$

wobei wir

$$(3.2) \quad R_{k h j}^i(x, x') = \frac{\partial P_{j k}^i(x, x')}{\partial x^h} - \frac{\partial P_{h k}^i(x, x')}{\partial x^j} + P_{h l}^i(x, x') P_{j k}^l(x, x') \\ - P_{i k}^l(x, x') P_{h j}^l(x, x') + \frac{\partial P_{h k}^i(x, x')}{\partial x^i} \left\{ \frac{i}{p_j} \right\}_{(x, x')} x'^p$$

gesetzt haben.

Die Gleichung (3.1) ist die Gleichung der geodätischen Abweichung. Als erstes bemerken wir, daß der Vektor  $\xi^i$  in dieser Gleichung beliebig sein darf, da er durch die bis jetzt noch willkürlich zu wählende Funktion  $\lambda(s)$  bestimmt wird (abgesehen von unserer Annahme, daß  $\xi^i$  von derselben Größenordnung wie  $d\varphi$  sein soll). Jedenfalls ist  $\xi^i$  unabhängig von  $x^i$ , so daß wir den Quotientensatz auf (3.1) anwenden dürfen. Es ist also  $R_{k h j}^i(x, x') x'^k x'^j$  ein gemischter Tensor zweiter Stufe<sup>10</sup>).

Zweitens läßt sich durch eine von den Betrachtungen des § 2 unabhängige Rechnung leicht zeigen, daß die Gleichung der geodätischen Abweichung in einem MINKOWSKISchen Raum

$$\frac{d^2 \xi^i}{ds^2} - x'^i \frac{d\lambda}{ds} = 0$$

lautet. Der Ausdruck auf der rechten Seite von (3.1) stellt also tatsächlich eine Abweichung von der gewünschten Größenordnung zwischen dem FINSLERSchen Raum und dem MINKOWSKISchen Tangentialraum dar und soll deshalb den Ausgangspunkt für unsere weiteren Untersuchungen bilden.

Da die Summe  $y_j \xi^j$  eine skalare Funktion ist, haben wir

$$\frac{d}{ds} (y_j \xi^j) = \frac{D}{Ds} [g_{ij}(x, x') x'^i \xi^j],$$

wobei die kovariante Differentiation entlang  $E_1$  ausgeführt wird. Dann folgt aus (1.8), (1.12) und (2.9) sofort

$$(3.3) \quad \frac{d}{ds} (y_j \xi^j) = g_{ij}(x, x') x'^i \frac{D \xi^j}{Ds} = \lambda(s).$$

(Hier bedeutet  $x'^i$  noch immer den Tangentialvektor zu  $E_1$ .) Integrieren wir diese Gleichung nach  $s$ , erhalten wir

$$(3.4) \quad y_j \xi^j = \int_0^s \lambda(s) ds.$$

Analog zu (3.3) gilt allgemein

$$(3.5) \quad \frac{d}{ds} \left( y_j \frac{D \xi^j}{Ds} \right) = y_j \frac{D^2 \xi^j}{Ds^2} = \frac{d\lambda}{ds}, \dots, \frac{d}{ds} \left( y_j \frac{D^{n-2} \xi^j}{Ds^{n-2}} \right) = y_j \frac{D^{n-1} \xi^j}{Ds^{n-1}} = \frac{d^{n-2} \lambda}{ds^{n-2}}.$$

<sup>10</sup> Für die folgenden Überlegungen genügt uns diese Tatsache. Der Tensorcharakter von  $R_{k h j}^i$  kann nur durch eine direkte Transformation nachgewiesen werden. Eine solche, rein analytische Behandlung soll auf eine später zu erscheinende Arbeit des Verf. verschoben werden, in welcher auch die Frage nach dem Zusammenhang der Integrabilitätsbedingungen unserer Parallelverschiebung mit dem Krümmungstensor sowie auch die von den Krümmungstensen befriedigten Identitäten behandelt werden. Diese Untersuchungen fallen in den geometrischen Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht hinein.

Indem wir (3.1) mit  $y_i$  falten, folgt aus der ersten dieser Gleichungen, wenn wir beachten, daß  $x^i$  Einheitsvektor ist,

$$(3.6) \quad g_{ip}(x, x') R_{khj}^i(x, x') x'^k x'^j x'^p = 0.$$

Von Bedeutung ist aber die Tatsache, wenn wir uns auf den Fall  $\lambda(s) \equiv 0$  beschränken (d. h.  $s = \sigma$ ), wie es von jetzt ab geschehen soll, daß die Vektoren

$$\xi^i, \frac{D\xi^i}{Ds}, \frac{D^2\xi^i}{Ds^2}, \dots, \frac{D^{n-1}\xi^i}{Ds^{n-1}}$$

senkrecht in bezug auf den Tangentialvektor  $x'^i$  von  $E_1$  stehen.

Es sei  $X^i$  der Einheitsvektor in der Richtung  $\xi^i$ , d. h.

$$(3.7) \quad \xi X^i = \xi^i.$$

Nun bestimmen die geodätischen Linien  $E_1$  und  $E_2$  durch 0 eine zwei-dimensionale „geodätische Fläche“  $G_2$ , welche durch die Schar der geodätischen Linien durch den Punkt 0 gebildet wird, deren Tangentialvektoren  $t^i$  die Relationen

$$(3.8) \quad t^i = \alpha x'^i(0) + \beta \psi'^i(0)$$

befriedigen, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Parameter sind. Mit Hilfe unserer Definition des Winkels  $d\varphi$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$  kann man leicht zeigen, daß nach (3.7) der Vektor  $X^i$  auch für den Grenzwert  $s \rightarrow 0$  wohldefiniert ist und stets in der Untermannigfaltigkeit enthalten ist. Folglich nennen wir die Größe

$$(3.9) \quad K(x, x') = g_{ip}(x, X) R_{khj}^i(x, x') x'^k x'^j X^p X^h$$

den Krümmungsskalar des Raumes im Punkt  $(x)$  für die durch  $x'^i$  und  $X^i$  bestimmte zwei-dimensionale „geodätische Fläche“ in bezug auf die Richtung  $x'^i$ . Wir werden im § 5 sehen, wie man durch ein Integrationsverfahren einen „absoluten“ Krümmungsskalar hieraus erhalten kann, d. h. ein von der Richtung  $x'^i$  unabhängiges Krümmungsmaß.

#### § 4. Die Gleichung von Jacobi.

Differenzieren wir (3.7) nach  $s$ , erhalten wir

$$(4.1) \quad \frac{D\xi^i}{Ds} = \xi \frac{DX^i}{Ds} + \frac{\xi^i}{\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial s}.$$

Indem wir diese Gleichung mit  $y_i$  falten, ergibt sich wegen (3.3) und (3.4)

$$(4.2) \quad y_i \frac{DX^i}{Ds} = 0.$$

Die Koordinaten eines Punktes der zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $G_2$  seien mit  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ )<sup>11)</sup>, der metrische Tensor in bezug auf  $G_2$  mit  $\gamma_{\alpha\beta}$  bezeichnet. Sind  $x'^i$  (oder  $u'^\alpha$ ) die Tangentialvektoren von  $E_1$ , so gilt ganz allgemein die Formel

$$(4.3) \quad g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \frac{Dx^i}{Ds} = \gamma_{\alpha\beta}(u, u') \frac{\partial \xi^\beta}{\partial s},$$

<sup>11)</sup> In diesem Abschnitt sollen griechische Indizes von 1 bis 2 laufen.

wobei  $z^i$  (oder  $\zeta^a$ ) ein Vektorfeld der Mannigfaltigkeit  $G_2$  entlang  $E_1$  und  $\delta$  das Symbol der kovarianten Differentiation in bezug auf  $G_2$  bedeutet<sup>12)</sup>. Man ersieht sofort aus (4.3), daß diejenigen Kurven unserer Untermannigfaltigkeit, welche gleichzeitig geodätische Linien des Raumes sind, ebenfalls geodätische Kurven in bezug auf  $\gamma_{\alpha\beta}$  sind. Es sind also jedenfalls  $E_1$  und  $E_2$  geodätisch in bezug auf  $G_2$ . Nun seien  $\eta_\alpha$ ,  $\Xi^\alpha$  die Komponenten von  $y_i$  bzw.  $X^i$  in bezug auf  $G_2$ . Setzen wir diese Werte in (4.3) ein und falten (4.3) mit  $u'^\alpha$ , erhalten wir

$$g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{D X^i}{D s} u'^\alpha = \gamma_{\alpha\beta}(u, u') u'^\alpha \frac{\delta \Xi^\beta}{\delta s} = \eta_\alpha \frac{\delta \Xi^\alpha}{\delta s}.$$

Benützen wir nun die übliche Transformationsformel

$$x'^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} u'^\alpha,$$

ergibt sich nach (4.2)

$$(4.4) \quad y_i \frac{D X^i}{D s} = \eta_\alpha \frac{\delta \Xi^\alpha}{\delta s} = 0.$$

Es steht also entweder a) der Vektor  $\delta \Xi^\alpha / \delta s$  senkrecht in bezug auf  $E_1$ , oder b) es verschwinden die Komponenten dieses Vektors identisch.

Wir betrachten zunächst einmal den Fall a): Dann fällt nach (4.4) die Richtung des Vektors  $\delta \Xi^\alpha / \delta s$  mit der Richtung von  $\Xi^\alpha$  zusammen, da  $X^i$  ein Vektor der Mannigfaltigkeit  $G_2$  ist und da der Begriff der Orthogonalität derselbe ist innerhalb der Untermannigfaltigkeit wie der des Gesamtraumes<sup>13)</sup>. Weil nun  $\Xi^\alpha$  stets ein Einheitsvektor ist, muß erstens

$$(4.5) \quad \frac{\delta}{\delta s} (\Xi_\alpha \Xi^\alpha) = \Xi_\alpha \frac{\delta \Xi^\alpha}{\delta s} + \Xi^\alpha \frac{\delta \Xi_\alpha}{\delta s} = 0$$

sein, und zweitens dürfen wir nun wegen der Homogenität nullter Ordnung der  $\gamma_{\alpha\beta}$  in den Richtungsargumenten schreiben:

$$\Xi^\alpha \frac{\delta \Xi_\alpha}{\delta s} = \gamma^{\alpha\beta}(u, \Xi) \Xi_\beta \frac{\delta \Xi_\alpha}{\delta s} = \gamma^{\alpha\beta} \left( u, \frac{\delta \Xi}{\delta s} \right) \Xi_\alpha \frac{\delta \Xi_\beta}{\delta s} = \Xi_\alpha \frac{\delta \Xi^\alpha}{\delta s},$$

und die Gleichung (4.5) wird dann einfach

$$(4.6) \quad \Xi_\alpha \frac{\delta \Xi^\alpha}{\delta s} = \Xi_1 \frac{\delta \Xi^1}{\delta s} + \Xi_2 \frac{\delta \Xi^2}{\delta s} = 0.$$

Um unsere weiteren Rechnungen zu erleichtern, führen wir jetzt ein besonderes Koordinatensystem in  $G_2$  ein, welches in mancher Hinsicht den geodätischen Koordinaten der RIEMANNschen Geometrie entspricht. Wir wählen 0 als Nullpunkt; ein Punkt  $P$  auf  $G_2$  bestimmt dann eindeutig eine geodätische Linie  $E(P)$ , welche von 0 durch  $P$  verläuft (unter der Annahme, daß  $P$  hinreichend nahe bei 0 liegt). Die Bogenlänge  $OP$  wird mit  $s$  bezeichnet. Ferner legen wir eine feste geodätische Linie der Untermannigfaltigkeit  $G_2$  zugrunde, deren Tangentialvektor in  $T_n(0)$  mit dem von  $E(P)$  einen bestimmten normierten<sup>14)</sup> Winkel  $\varphi'$  bildet. Der Punkt  $P$  von  $G_2$  ist eindeutig durch  $s$

<sup>12)</sup> Der etwas langwierige Beweis von (4.3) sowie eine eingehendere, allgemeinere Diskussion der Untermannigfaltigkeiten ist in der in Kürze zu erscheinenden Arbeit: „The Theory of Subspaces of a FINSLER Space, Part I“ (Math. Zeitschrift) behandelt.

<sup>13)</sup> Vgl. Anm. <sup>12)</sup>.

<sup>14)</sup> Vgl. [5], § 2.  $G_2$  definiert einen zweidimensionalen MINKOWSKISchen Unterraum  $T_2(0)$  von  $T_n(0)$ . Der „normierte“ Winkel  $\varphi'$  unterscheidet sich von  $\varphi$  (gemessen an der Indikatritz in  $T_2(0)$ ) nur durch die Länge des Umfanges der Indikatritz, durch welche  $\varphi$  dividiert wird. Somit erhält man ein Winkelmaß, welches so beschaffen ist, daß „gerade“ Winkel dasselbe Maß besitzen.

und  $\varphi'$  bestimmt. Das Quadrat der Entfernung zwischen zwei Punkten  $P(s, \varphi')$ ;  $Q(s + ds, \varphi' + d\varphi')$  ist dann in den neuen Koordinaten

$\bar{\gamma}_{11}(s, \varphi; ds, d\varphi) ds^2 + 2\bar{\gamma}_{12}(s, \varphi'; ds, d\varphi) ds d\varphi' + \bar{\gamma}_{22}(s, \varphi; ds, d\varphi) d\varphi'^2$ , wobei die  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  wieder von der Richtung des infinitesimalen Vektors  $PQ$  abhängen.

Unser Vektor  $\xi^i$  hat nun die Komponenten  $(0, d\varphi')$ , (denn für  $\lambda = 0$  ist  $s = 0$ ); es ist also

$$(4.7) \quad \xi = + [\bar{\gamma}_{22}(s, \varphi'; 0, d\varphi')]^{1/2} d\varphi'.$$

Ebenfalls ist in unseren neuen Koordinaten  $\bar{\Xi}^1 = 0, \frac{\partial \bar{\Xi}^1}{\partial s} = 0$ , und (4.6) wird

$$\bar{\Xi}_2 \frac{\partial \bar{\Xi}^2}{\partial s} = \bar{\gamma}_{22}(s, \varphi'; 0, d\varphi') \bar{\Xi}^2 \frac{\partial \bar{\Xi}^2}{\partial s} = \bar{\gamma}_{22}(s, \varphi'; 0, d\varphi') \bar{\Xi}^2 \frac{\partial \bar{\Xi}^2}{\partial s} = 0.$$

Nach (4.7) ist aber  $\bar{\gamma}_{22}(s, \varphi'; 0, d\varphi') \neq 0$ ; auch ist  $\bar{\Xi}^2 \neq 0$  (denn sonst wäre  $X^i = 0$ ), und es ist also

$$(4.8) \quad \frac{\partial \bar{\Xi}^2}{\partial s} = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

in allen Koordinatensystemen auf  $G_2$ . Somit haben wir den Fall a) auf den Fall b) zurückgeführt.

Der Vektor  $\Xi^\alpha$  erleidet also eine Parallelverschiebung in bezug auf  $G_2$ . Dieses Ergebnis ist von besonderer Bedeutung, wenn man die geodätische Abweichung genauer untersuchen will. Für  $\lambda = 0$  ist nämlich die Gleichung (3.1) eine Verallgemeinerung in tensorieller Form der klassischen Gleichung von JACOBI auf  $n$ -dimensionale Variationsprobleme. Um nun zu der üblichen skalaren Form dieser Gleichung zu gelangen, wollen wir uns von jetzt ab auf zweidimensionale FINSLERSche Räume beschränken. Es soll also  $G_2$  der Gesamtraum werden. Auch hat es dann keinen Sinn mehr, von einer „geodätischen“ Fläche zu sprechen, denn  $G_2$  ist jetzt ein völlig beliebiger zweidimensionaler FINSLERScher Raum. Wir können deshalb zu unserer ehemaligen Schreibweise zurückkehren, ohne die Möglichkeit von Verwechslungen befürchten zu müssen, und wir können das Ergebnis (4.8) durch  $D X^i / D s = 0$  ( $i = 1, 2$ ) ausdrücken<sup>15)</sup>.

Indem wir die Gleichung (4.1) abermals nach  $s$  differenzieren, erhalten wir

$$(4.9) \quad \frac{D^2 \xi^i}{D s^2} = \xi \frac{D^2 X^i}{D s^2} + 2 \frac{D X^i}{D s} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial s} + X^i \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}.$$

Dieser Wert wird nun unter Berücksichtigung von (4.8) und (3.7) auf der linken Seite von (3.1) (mit  $\lambda = 0$ ) eingesetzt, und es wird

$$X^i \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} + \xi R_{khj}^i(x, x') X^k x'^k x'^j = 0.$$

Indem wir diese Gleichung mit  $X_i = g_{il}(x, X) X^l$  falten, ergibt sich endlich nach (3.9):

$$(4.10) \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} + \xi K(x, x') = 0.$$

<sup>15)</sup> Für den zweidimensionalen Fall kann man (4.8) ohne Bezugnahme auf (4.3) durch eine analoge Rechnung gewinnen; dies schien aber hier unzuweckmäßig, da (4.8) einen wichtigen geometrischen Zusammenhang zwischen der geodätischen Abweichung im Gesamtraum und den Krümmungseigenschaften des entsprechenden  $G_2$  aufdeckt. Man kann auf Grund dieser Tatsache eine skalare Form der JACOBIschen Gleichung für  $n$  Dimensionen ableiten — die entsprechende Rechnung sowie die endgültige Form ist aber wesentlich komplizierter und soll in einer besonderen Arbeit behandelt werden.



Dies ist die gesuchte Gleichung, so daß der Zusammenhang mit der Variationsrechnung, von welcher wir ja durch das Variationsproblem (1.2) ausgegangen sind, hiermit wieder hergestellt ist. Hier ist  $K(x, x')$  einfach der Krümmungsskalar des zweidimensionalen Raumes im Punkte  $(x^i)$  in bezug auf die Richtung  $x'^i$ , da in diesem Fall die Richtung  $X^i$  eindeutig durch  $(x^i, x'^i)$  festgelegt ist. Die Bedeutung der Gleichung (4.10) für die Geometrie der FINSLERSchen Räume liegt darin, daß sie für Untersuchungen über Fragen „im Großen“ dient. Man kann z. B. mit ihrer Hilfe folgenden Satz beweisen: Ist  $K(x, x')$  in jedem Punkt  $(x^i)$  für jede Richtung  $(x'^i)$  in einem geschlossenen, zweidimensionalen FINSLERSchen Raum größer als eine gegebene positive Zahl  $M$ , so ist die größte Entfernung („Durchmesser des Raumes“) zweier beliebiger Punkte kleiner als  $\pi/\sqrt{M}$ . An dieser Stelle wollen wir nicht näher auf diese Fragen eingehen und werden den Beweis dieses Satzes übergehen, da dieser sich nicht sehr wesentlich von dem des entsprechenden Satzes der RIEMANNschen Geometrie unterscheidet. Es sei hier nur ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Gleichung (4.10) einen Anknüpfungspunkt für fernere Untersuchungen bietet.

### § 5. Der „absolute“ Krümmungsskalar. Geometrische Deutung.

Wir betrachten die Gesamtheit der geodätischen Linien durch einen beliebigen Punkt 0 unseres Raumes, in welchem wir die im vorherigen Abschnitt erklärten Koordinaten  $(s, \varphi')$  einführen. Der Ort der Punkte  $P$  auf jeder dieser geodätischen Linien, für welchen die Bogenlänge  $OP$  denselben gegebenen Wert  $s$  besitzt, bildet eine geschlossene Kurve, welche 0 enthält und welche wir den „geodätischen Kreis“  $i_0$  (oder FINSLERScher Kreis) nennen wollen. Für  $s \rightarrow 0$  ist  $i_0$  homothetisch zur Indikatrix  $I_0$  in  $T_3(0)$ .

Wir nehmen an, daß  $K$  im Punkte 0 für keine Richtung verschwindet, und setzen  $K(s, \varphi') = K(s, \varphi'; t_1, t_2)$ , wobei  $t^i$  der Tangentialvektor im Punkt  $(s, \varphi')$  der durch 0 und  $\varphi'$  bestimmten geodätischen Linie bedeutet.  $K(s, \varphi')$  hängt also von der Wahl des Koordinatensystems ab. Für  $s \rightarrow 0$  wird aber  $K(s, \varphi')$  eine Funktion des Ortes (d. h. der Koordinaten von 0) und  $\varphi'$  allein. Um nun einen invarianten Krümmungsskalar zu gewinnen, welcher ausschließlich Ortsfunktion ist, setzen wir<sup>10)</sup>

$$(5.1) \quad R(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^1 K(s, \varphi') d\varphi'.$$

Durch unsere Stetigkeitsannahmen ist die Existenz dieses Grenzwertes wegen der Definitionsgleichungen (3.2) und (3.9) gesichert. Wir nennen  $R$  den *absoluten Krümmungsskalar*. Diese Größe läßt sich nun folgendermaßen geometrisch sehr anschaulich deuten:

Es seien  $(s, \varphi')$ ,  $(s, \varphi' + d\varphi')$  benachbarte Punkte  $P$  bzw.  $Q$ , deren Entfernung voneinander wir wieder in Anbetracht unserer früheren Schreibweise mit  $\xi(s, \varphi', d\varphi')$  bezeichnen wollen. Aus unserer Definition des Winkels folgt dann

$$(5.2) \quad L_0(1) d\varphi' = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\xi}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial \xi(s, \varphi', d\varphi')}{\partial s},$$

(wobei  $L_0(s)$  die Länge des Umfanges der zu  $I_0$  homothetischen Kurve in

<sup>10)</sup> Der normierte Winkel  $\varphi'$  durchläuft das Intervall  $0 \leq \varphi' \leq 1$  bei einer Integration um  $i_0$ . Vgl. Anm. 14.

$T_2(0)$  vom „Radius“  $s$  ist) da  $\lim_{s \rightarrow 0} \xi(s, \varphi', d\varphi') = 0$  ist. Wegen dieser letzten Relation ergibt sich mit Hilfe von (4.10):

$$(5.3) \quad \frac{\partial^2 \xi(0, \varphi', d\varphi')}{\partial s^2} = 0.$$

Ebenfalls folgt aus (4.10)

$$(5.4) \quad K(0, \varphi') = - \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} / \xi \right) = - \frac{1}{L_0(1) d\varphi'} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}.$$

wegen (5.2) und (5.3). Die Existenz dieser Grenzwerte folgt ohne weiteres aus den Gleichungen für die geodätischen Linien  $E(P)$  und  $E(Q)$ , durch welche  $\xi^i$  definiert ist.

Um die Länge  $i_0(s)$  des Umfanges des geodätischen Kreises  $i_0$  zu erhalten, drücken wir  $\xi$  durch eine Reihenentwicklung nach  $s$  aus, wobei  $\varphi'$  und  $d\varphi'$  festgehalten werden. Es ist also wegen (5.2), (5.3) und (5.4)

$$(5.5) \quad \xi(s, \varphi', d\varphi') = L_0(1) s d\varphi' - \frac{L_0(1)}{6} K(0, \varphi') s^3 d\varphi' + O(s^4) d\varphi',$$

und es wird

$$i_0(s) = \oint \xi(s, \varphi', d\varphi') = L_0(s) - \frac{L_0(1)}{6} s^3 \oint K(0, \varphi') d\varphi' + O(s^4).$$

Nach (5.1) ersetzen wir das letzte Integral dieser Gleichung durch  $R(0)$  und erhalten schließlich

$$(5.6) \quad R(0) = \frac{6}{L_0(1)} \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{L_0(s) - i_0(s)}{s^3} \right).$$

Dieses Resultat zeigt sehr deutlich, daß unser Krümmungsmaß tatsächlich ein Maß der Abweichung zwischen dem FINSLERSchen Raum und dem entsprechenden MINKOWSKISchen Tangentialraum darstellt. Eine ähnliche Gleichung wurde von BERTRAND und PUISEUX in der klassischen Flächentheorie aufgestellt (vgl. [7], S. 153).

## § 6. Geodätische Dreiecke.

Es seien  $A, B, C$  drei Punkte unseres Raumes, von welchen wir von vornherein annehmen, daß sie hinreichend nahe zueinander liegen, derart, daß sie auf eindeutige Weise durch geodätische Linien miteinander verbunden werden können. Wir bilden die geodätischen Bogen  $AB, AC$  und verbinden  $B$  und  $C$  durch eine analytische Kurve  $c: z^i = z^i(s, \varphi')$ . Die inneren Winkel des so erhaltenen Dreiecks  $D$  seien  $\alpha, \beta, \gamma$  jeweils gemessen an den entsprechenden Indikatriz in  $T_2(A), T_2(B), T_2(C)$ . Wir wählen  $A$  als Ursprung unseres  $(s, \varphi')$ -Koordinatensystems; dabei soll die geodätische Linie  $AB$  die Parameterkurve  $\varphi' = 0$  sein. Wir betrachten zwei Punkte  $P(s, \varphi'), Q(s + \delta s, \varphi' + \delta \varphi')$  auf  $c$  zwischen  $B$  und  $C$  und konstruieren die entsprechenden geodätischen Kreise  $i_1$  und  $i_2$  mit Radien  $s$  und  $s + \delta s$ , welche  $c$  in  $P$  bzw.  $Q$  schneiden. Die geodätischen Linien  $AP, AQ$  seien mit  $E(P), E(Q)$  bezeichnet. Ist  $z'^i(s, \varphi')$  die Tangente zu  $c$  in  $T_2(P)$ , so sei  $\Theta$  der Winkel in  $T_2(P)$  zwischen  $z'^i(s, \varphi')$  und  $E(P)$ ,  $\Theta + \delta \Theta$  der Winkel in  $T_2(Q)$  zwischen  $z'^i(s + \delta s, \varphi' + \delta \varphi')$  und  $E(Q)$ .  $E(P), E(Q)$  schneiden  $i_2$  bzw.  $i_1$  in den Punkten  $S$  bzw.  $R$ . Dann sind die Bogenlängen  $PR = \xi(s, \varphi', \delta \varphi')$ ,

$SQ = \xi + \delta \xi$ , wobei  $\xi = 0 (\delta \varphi')$  und  $\delta \xi = 0 (\delta \varphi'^2)$  ist. Wir nehmen an, daß  $c$  so verläuft, daß  $\delta s = 0 (\delta \varphi')$  ist. Auf dem Bogen  $QS$  von  $i_2$  bilden wir den Punkt  $T$  derart, daß  $TQ = PR = \xi$  ist, und konstruieren die geodätische Linie  $PT$ , wobei der Winkel  $SP'T$  in  $T_2(P)$  mit  $\delta \psi$  bezeichnet wird.

Aus den Ausführungen des § 2, insbesondere der Gl. (2.9), folgt, daß die geodätischen Kreise die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien durch  $A$  sind. Insbesondere steht die Tangente von  $i_2$  in  $T_n(S)$  senkrecht in bezug auf  $E(P)$ . Ebenfalls schneidet der geodätische Kreis  $i'$  mit Mittelpunkt  $P$  und Radius  $\delta s$  die geodätische Linie  $E(P)$  senkrecht in  $T_n(S)$  und ist deshalb tangential zu  $ST$ . Es sei  $T'$  der Schnittpunkt von  $i'$  und  $PT$ ; die Bogenlänge  $ST'$  soll mit  $\delta_1 \xi$  bezeichnet werden. Die Reihenentwicklung (5.5) ergibt dann

$$(6.1) \quad \delta_1 \xi = \delta \psi \cdot \delta s - \frac{1}{6} K(s, \varphi') \delta s^3 \cdot \delta \psi + 0(\delta s^4) \delta \psi.$$

Um nun die Größenordnung von  $\delta_1 \xi - \delta \xi$  zu bestimmen, bilden wir die geodätische Linie  $g$ , welche senkrecht in  $T_n(S)$  in bezug auf  $E(P)$  steht.  $g$  ist tangential zu  $i'$  und  $i_2$  in  $S$ .  $PT$  schneidet  $g$  in  $V$ , und wir bezeichnen die Bogenlänge  $SV$  mit  $\delta \sigma$ . Durch  $V$  konstruieren wir nun die in bezug auf  $g$  senkrechte geodätische Linie, welche  $i'$  und  $i_2$  in  $U'$  bzw.  $U$  schneidet. Indem wir nun die Ergebnisse der Reihenentwicklung des § 6 der Arbeit [3] berücksichtigen, ergibt sich aus den dortigen Gleichungen (42), (43) und (44):  $SU = \delta \sigma + 0(\delta \sigma^3)$ ,  $SU' = \delta \sigma + 0(\delta \sigma^3)$ ;  $VU' = 0(\delta \sigma^3)$ ,  $VU = 0(\delta \sigma^3)$ .

Wegen  $U' \hat{V} T' = 0(1)$  und  $\delta \sigma = 0(\delta \xi) = 0(\delta \varphi'^2)$  ergibt sich dann  $U'T' = 0(\delta \varphi'^4)$ ,  $UT = 0(\delta \varphi'^4)$ . Nun ist aber  $\delta \xi = SU \pm UT = \delta \sigma + 0(\delta \varphi'^4)$  und  $\delta_1 \xi = SU' \pm U'T' = \delta \sigma + 0(\delta \varphi'^4)$ . Es ist also

$$(6.2) \quad \delta \xi = \delta_1 \xi + 0(\delta \varphi'^4),$$

und (6.1) wird

$$(6.3) \quad \frac{\delta \xi}{\delta s} = \delta \psi + 0(\delta s^3).$$

Indem wir uns zunächst die Figur  $PS T Q R$  als Gebilde im  $T_2(P)$  denken, ersehen wir ebenfalls aus (6.2), daß  $\delta \psi$  den Winkel in  $T_2(P)$  zwischen  $E(P)$  und  $E(Q)$  bis auf Größen höchstens von der Ordnung von  $0(\delta s^3)$  darstellt. Dann folgt aus der Additivität unseres MINKOWSKischen Winkelmaßes, daß sich  $\delta \Theta$  aus der Rotation  $\delta \chi$  der Tangente  $z'^i$  von  $c$  (indem wir von  $P$  zu  $Q$  übergehen) und  $\delta \psi$  zusammensetzt. Der Fehler, welcher auftritt, wenn wir die Winkelmetrik des  $T_2(P)$  anstatt die des  $T_2(Q)$  benutzen, ist folgendermaßen abzuschätzen:  $\delta \psi$  gemessen an den verschiedenen Indikatrizien würde analytisch die Formen (vgl. [5], § 2, Gl. (13))

$$\delta \psi_P = F(P, \delta \lambda), \quad \delta \psi_Q = F(Q, \delta \lambda)$$

annehmen; dabei ist aber

$$\delta \psi_Q = F(P, \delta \lambda) + \left( \frac{\partial F(P, \delta \lambda)}{\partial s} \delta s + \frac{\partial F(P, \delta \lambda)}{\partial \varphi'} \delta \varphi' \right) + \dots = \delta \psi_P + 0(\delta s^2)$$

wegen  $\delta \psi = 0(\delta s)$ . Ersetzen wir ferner  $\delta \chi$  durch  $(D\chi/Ds) \delta s$  (vgl. [3], § 6), so ist bei  $D\chi/Ds$  die Variation der Metrik durch das kovariante Differential miteinbegriffen. Wir dürfen deshalb schreiben:

$$(6.4) \quad \delta \Theta = \frac{D\chi}{Ds} \delta s - \delta \psi + 0(\delta s^2).$$

(Die Wahl des Vorzeichens hängt davon ab, ob  $T$  innerhalb oder außerhalb  $SQ$  liegt und ob der Bogen  $PQ$  von  $c$  konvex oder konkav von  $A$  gesehen ist. In der hier betrachteten Figur ist ersteres der Fall, aber das endgültige Resultat der Rechnungen bleibt dasselbe).

Das MINKOWSKISCHE Flächenmaß  $\delta A$  des Elements  $PSQR$  wird definiert als  $|PS| \cdot |QR| \cdot \sin(x'^i, \xi^i)$ , wobei  $x'^i$  der Tangentialvektor zu  $E(P)$  in  $T_2(P)$  bedeutet und  $\sin(x'^i, \xi^i)$  der MINKOWSKISCHE Sinus gemäß der in der Arbeit [5], § 2 angegebenen Definition. Wegen  $g_{ij}(x, x') x'^i \xi^j = 0$  ist aber  $\sin(x'^i, \xi^i) = 1$ , und es wird  $\delta A = \xi(s, \varphi', \delta \varphi') \delta s$ .

Wir betrachten nun das infinitesimale Dreieck  $\Delta$ , welches durch die Bogen  $E(P)$ ,  $E(Q)$  und  $PQ$  gebildet wird. Es ist dann

$$\int_{\Delta} K(s, \varphi') dA = \int_0^s \xi(s, \varphi', \delta \varphi') K(s, \varphi') ds.$$

Nach (4.10) wird dies aber

$$- \int_0^s \frac{\partial^2 \xi(s, \varphi', \delta \varphi')}{\partial s^2} ds = - \left[ \frac{\partial \xi(s, \varphi', \delta \varphi')}{\partial s} \right]_0^s,$$

da innerhalb  $\Delta$  die Werte von  $\varphi'$  und  $\delta \varphi'$  fest bleiben. Nach (5.2) ist aber das letzte Glied

$$L_A(1) \delta \varphi' - \frac{\partial \xi(s, \varphi', \delta \varphi')}{\partial s} = \delta \varphi - \frac{\delta \xi}{\delta s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \xi(s, \varphi', \delta \varphi')}{\partial s^2} \delta s + O(\delta s^3),$$

wobei  $L_A(1)$  den Umfang der Indikatrix  $I_A$  in  $T_2(A)$  bedeutet. Wegen  $\partial^2 \xi / \partial s^2 = 0$  ( $\delta s$ ) wird dann nach (6.3) und (6.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} K(s, \varphi') dA &= \delta \varphi - \delta \psi + O(\delta s^2) \\ (6.5) \qquad \qquad &= \delta \varphi + \delta \Theta - \frac{D\chi}{Ds} \delta s + O(\delta s^2). \end{aligned}$$

Indem wir nun über  $D$  integrieren, erhalten wir

$$\int_D \int K(s, \varphi') dA = \int_0^s d\varphi + \int_B^C d\Theta - \int_B^C \frac{D\chi}{Ds} ds.$$

Bezeichnen wir die Krümmung von  $c$  mit  $\varrho^{-1}$ , so folgt aus unserer Definition ([3], § 6, Gl. (40))  $\varrho^{-1} = D\chi/Ds$ , und es wird

$$(6.6) \qquad \int_D \int K(s, \varphi') dA = \alpha + \Theta(C) - \Theta(B) - \int_B^C \frac{ds}{\varrho}.$$

Hier sind die Richtungsargumente in  $K(s, \varphi')$  in jedem Punkt  $P$  von  $D$  durch die Richtung der Tangente der geodätischen  $E(P)$  im Punkte  $P$  festgelegt. Geometrisch ist aber  $\Theta(C) = \gamma$ , und ebenfalls ist  $\Theta(B)$  der äußere Winkel von  $D$  im Punkt  $B$ . Die Winkeldefinition ergibt dann  $\Theta(B) = \frac{1}{2} L_B(1) - \beta$ .

Aus (6.6) folgt demnach

$$(6.7) \qquad \int_D \int K(s, \varphi') dA = \alpha + \beta + \gamma - \int_B^C \frac{ds}{\varrho} - \frac{1}{2} L_B(1).$$

Ist insbesondere die Kurve  $c$  eine geodätische Linie, so ist  $\varrho^{-1} = 0$  (vgl. [3], § 6), und für geodätische Dreiecke gilt dann

$$(6.8) \quad \int_D K(s, \varphi') dA = \alpha + \beta + \gamma - \frac{1}{2} L_B(1).$$

Diese Gleichung stellt *vorläufig* eine Verallgemeinerung des klassischen GAUSSschen Satzes über geodätische Dreiecke auf einer Fläche dar. Hierbei ist zu beachten, daß die Länge des Umfanges der Indikatrix, welche von Punkt zu Punkt des Raumes variiert, in jedem Punkt naturgemäß die geometrische Größe  $2\pi$  ersetzt. Daß in (6.7) gerade dieser Wert im Punkt  $B$  auftritt, hängt mit dem von uns willkürlich gewählten Integrationssinn und der Wahl des Nullpunktes  $A$  zusammen. In dem nächsten Abschnitt soll aber gezeigt werden, daß diese unwillkommene Unsymmetrie der rechten Seite von (6.8) dadurch behoben werden kann, indem wir den Nullpunkt in das Innere von  $D$  verlegen.

### § 7. Ein Analogon der Formel von Gauss-Bonnet.

Das letzte Ergebnis kann ohne weiteres auf ein geodätisches Polygon von  $n$  Seiten verallgemeinert werden. Das Polygon  $\Pi$  wird gebildet durch die Punkte  $A_1, \dots, A_n$ , welche so gelegen sein sollen, daß sukzessive Punkte durch geodätische Bogen verbunden werden können, derart, daß  $\Pi$  einfach zusammenhängend ist. Als Nullpunkt wählen wir einen beliebigen Punkt  $A_0$  innerhalb  $\Pi$  und teilen  $\Pi$  auf in  $n$  geodätische Dreiecke, indem wir die geodätischen Bogen  $A_0 A_1, \dots, A_0 A_n$  konstruieren. Die inneren Winkel des  $\mu$ -ten Dreiecks bezeichnen wir mit  $\alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu$  und den äußeren Winkel im Punkte  $A_\mu$  mit  $\delta_\mu$ . Wir schreiben  $L_\mu$  für die Länge des Umfanges der Indikatrix in  $T_3(A_\mu)$ . Die verschiedenen Winkel werden wieder gemessen an den Indikatrizen in den  $T_2$  der entsprechenden Punkte. Indem wir über jedes der Dreiecke integrieren – dabei soll  $K(s, \varphi')$  und der Integrationssinn dieselbe Bedeutung haben wie im vorherigen Abschnitt – erhalten wir aus (6.8)

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \int_{\Pi} K(s, \varphi') dA &= \sum_{\mu=1}^n (\alpha_\mu + \beta_\mu + \gamma_\mu) - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n L_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu + \beta_1 + \sum_{\mu=2}^n (\beta_\mu + \gamma_{\mu-1}) + \gamma_n - \frac{1}{2} L_1 - \frac{1}{2} \sum_{\mu=2}^n L_\mu. \end{aligned}$$

Nun ist aber im Punkt  $A_0$

$$(7.2) \quad \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu = L_0;$$

bei  $A_1$

$$(7.3) \quad \gamma_n + \beta_1 = \frac{1}{2} L_1 - \delta_1,$$

und bei  $A_\mu$

$$(7.4) \quad \beta_\mu + \gamma_{\mu-1} = \frac{1}{2} L_\mu - \delta_\mu.$$

Setzen wir diese Werte in (7.1) ein, so wird

$$\int_{\Pi} K(s, \varphi') dA = L_0 + \frac{1}{2} L_1 - \delta_1 + \sum_{\mu=2}^n \left( \frac{1}{2} L_\mu - \delta_\mu \right) - \frac{1}{2} L_1 - \frac{1}{2} \sum_{\mu=2}^n L_\mu,$$

und wir erhalten endlich

$$(7.5) \quad \int_D \int K(s, \varphi') dA = L_0 - \sum_{\mu=1}^n \delta.$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis für geodätische Polygone. Für den Fall eines Dreiecks  $D$  können wir nun (6.8) durch die symmetrische Gleichung

$$(7.6) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = L_0 - \iint_D K(s, \varphi') dA$$

ersetzen. Hier hängt natürlich das Doppelintegral wieder von der Wahl des Ursprungs ab; bemerkenswert ist aber, daß der Unterschied zwischen diesem Wert und der Länge des Umfanges der Indikatrix im Ursprung nach (7.6) von dieser Wahl unabhängig ist.

Zum Schluß betrachten wir eine geschlossene, analytische Kurve  $C$ , welche ein Gebiet  $G$  umranden soll. Wir können  $n$  Punkte  $A_1, \dots, A_n$  auf  $C$  wählen, derart, daß

$$(7.7) \quad \delta \sigma_\mu \leq \frac{l}{n}$$

ist, wobei  $\delta \sigma_\mu$  die Länge des geodätischen Bogens  $A_\mu A_{\mu+1}$  und  $l$  die Länge des Umfanges von  $C$  ist. Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß die geodätischen Linien die kürzesten Verbindungen zweier Punkte darstellen. Da nun aber die Krümmung  $\varrho^{-1}$  von  $C$  durch den Winkel sukzessiver Tangenten (vgl. [3], § 6) definiert wird, ergibt der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  nach (7.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \delta_\mu = \lim_{\delta \sigma_\mu \rightarrow 0} \sum_{\mu=1}^n \frac{\delta_\mu}{\delta \sigma_\mu} \cdot \delta \sigma_\mu = \int_C \frac{ds}{\varrho}.$$

Es lautet also wegen (7.5) das Analogon des GAUSS-BONNETSchen Satzes für FINSLERSche Räume:

$$(7.8) \quad \int_G \int K(s, \varphi') dA = L_0 - \int_C \frac{ds}{\varrho}.$$

Dieses Ergebnis kann ebenfalls aus der Gleichung (6.7) abgeleitet werden.

### Literatur.

- [1] BERWALD, L.: Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. Math. Z. **25**, 40–71 (1926). — [2] CARTAN, E.: Les Espaces de FINSLER, Paris 1934. — [3] RUND, H.: Über die Parallelverschiebung in FINSLERSchen Räumen. Math. Z. **54**, 115–128 (1951). — [4] RUND, H.: The Geometry of FINSLER Spaces considered as generalised MINKOWSKIAN Spaces. Thesis, Cape Town 1950. — [5] RUND, H.: Zur Begründung der Differentialgeometrie in MINKOWSKISchen Räumen, Arch. d. Math. **3**, 60–70 (1952). — [6] LEVI-CIVITA, T.: Sur l'écart géodésique. Math. Ann. **97**, 291–320 (1926). — [7] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. 4. Auflage, Berlin 1945.

(Eingegangen am 20. Oktober 1951.)

## Untersuchungen über Deformationen.

Von

WALTER THIMM in Bonn.

Die Untersuchungen dieser Arbeit wurden durch das folgende Problem der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen angeregt: Wie ändert sich die Monodromiegruppe einer algebroiden Funktion bei Parameterspezialisierung? Man erkennt den topologischen Kern dieses Problems, der in der Frage nach der Möglichkeit besteht, geschlossene Wege so zu deformieren, daß sie die Verzweigungsmannigfaltigkeit der algebroiden Funktion nicht schneiden, wenn diese sich in Abhängigkeit von Parametern ändert. Untersuchungen dieser Art stammen von VAN KAMPEN<sup>1)</sup> und ZARISKI<sup>2)</sup>. Wir lösen das topologische Problem von seinem funktionentheoretischen Ursprung und formulieren es sehr allgemein als Deformationsaufgabe (Aufgabe I). Bezüglich der allgemeinsten Fassung werde auf den Text verwiesen. Hier soll der folgende Spezialfall genannt werden, der das Wesentliche klar erkennen läßt: Für jedes  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , sei  $A(t)$  eine abgeschlossene Menge des metrischen Raumes  $R$  und seien  $M(t)$  und  $N(t)$  Punkte, die nicht zu  $A(t)$  gehören. Die Punkte  $M(0)$  und  $N(0)$  sollen durch eine Kurve  $c(0)$  verbindbar sein, die  $A(0)$  nicht schneidet. Für jedes  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist eine Kurve  $c(t)$  zu konstruieren, die  $M(t)$  und  $N(t)$  verbindet, die punktfremd zu  $A(t)$  ist, derart, daß  $c(t)$  aus  $c(0)$  durch Deformation hervorgeht. Vor allem interessiert die folgende Aufgabe II: Welche Bedingungen muß das Mengensystem  $A(t)$  erfüllen, damit jede Deformationsaufgabe mit vorgegebenen  $M(t)$ ,  $N(t)$  und  $c(0)$ , die bestimmten Voraussetzungen genügen, lösbar ist? Hierfür werden hinreichende Bedingungen angegeben, und zwar werden dazu bestimmte Deformationsretrakte, die wir Schutzbereiche nennen, verwandt. Als Kernpunkt erscheint die Frage nach der Konstruktion der Schutzbereiche. Dem hierzu vorgeschlagenen Verfahren liegt ein Gedankengang zugrunde, den auch VAN KAMPEN verwandt hat. Den von ihm benutzten Systemen von konzentrischen Kreisen entsprechen die Ausdehnungsmengen. Das Problem der Existenz von Ausdehnungsmengen wird für einige spezielle Typen von abgeschlossenen Mengen untersucht.

### § 1. Definitionen und vorbereitende Sätze.

1.1. Alle in dieser Arbeit auftretenden Räume sind metrisch.  $M$  sei eine Punktmenge im Raume  $R$ . Ist  $f(P, t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) eine Deformation von  $M$  in  $R$ , so werde jede Menge:

$$M(t) = \bigcup_{P \in M} f(P, t)$$

„Zwischenmenge“ der Deformation genannt. Die Vereinigungsmenge aller Zwischenmengen heiße „Verbindungsmenge“:

$$V(t) = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} M(t).$$

<sup>1)</sup> Amer. J. Math. 55, 255—260 (1933).

<sup>2)</sup> Ann. of Math. 38, 131—141 (1937).

1.2. Das topologische Produkt zweier Mengen  $A$  und  $B$  werde mit  $\{A, B\}$  bezeichnet.

$I$  sei das Einheitsintervall  $0 \leq t \leq 1$ . Es sei  $M^* = \{M, I\}$ . Die Funktion  $F(\{P, t\}) = \{f(P, t), t\}$ ,  $P \in M$ , bestimmt eine stetige Abbildung von  $M^*$  auf eine Punktmenge  $D$  des Raumes  $R^* = \{R, I\}$ .  $D$  werde „Deformationsmenge“ genannt.

1.3. Bekannt bzw. leicht einzusehen sind folgende Feststellungen:

a) Im Raum  $R$  seien  $M_1$  auf  $M_2$  und  $M_2$  auf  $M_3$  deformierbar. Dann kann  $M_1$  auf  $M_3$  deformiert werden.

b)  $M$  und  $N$  seien abgeschlossene Mengen in  $R$ . Es seien  $f(P, t)$  eine Deformation von  $M$  und  $g(P, t)$  eine Deformation von  $N$ . Ist  $P'$  irgendein Punkt des Durchschnittes  $M \cap N$ , so gelte:  $f(P', t) = g(P', t)$  für alle  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Dann wird durch diejenige Funktion  $h(P, t)$  eine Deformation der Vereinigungsmenge  $M \cup N$  gegeben, die auf  $M$  mit  $f$  und auf  $N$  mit  $g$  übereinstimmt.

c) Im Raum  $R$  sei  $f(P, t)$  eine Deformation von  $M$  auf  $M'$ ; die Verbindungsmenge sei  $V$ , die Deformationsmenge  $D$ . Es gebe eine stetige Abbildung  $g$  von  $V$  auf  $V' \subset R$ , die alle Punkte von  $M$  und  $M'$  fest läßt. Die Funktion  $g(f(P, t))$  bestimmt eine Deformation von  $M$  auf  $M'$  mit der Verbindungsmenge  $V'$ . Die zu dieser Deformation gehörende Deformationsmenge  $D'$  geht durch diejenige stetige Abbildung aus  $D$  hervor, die den Punkt  $\{Q, t\}$  von  $D$  in den Punkt  $\{g(Q), t\}$  von  $D'$  überführt. Ist  $F_\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ , Deformationsparameter) eine Deformation von  $V$  in  $R$  und hat jede Abbildung  $F_\tau$  die Eigenschaften von  $g$ , so bestimmt jede Funktion  $F_\tau(f(P, t))$  ( $\tau$  fest,  $t =$  Deformationsparameter) eine Deformation von  $M$  auf  $M'$ , deren Verbindungsmenge  $F_\tau(V)$  ist. Die zu dieser Deformation gehörige Deformationsmenge sei  $D_\tau$ . Ist  $\{Q, t\}$  ein Punkt von  $D$ , so wird durch die Funktion  $F_\tau^*(\{Q, t\}) = \{F_\tau(Q), t\}$  eine Deformation von  $D$  mit den Zwischenmengen  $D_\tau$  bestimmt.

1.4. Die Deformation  $f(P, t)$  von  $M$  heiße isotop, wenn die Abbildung  $f(P, t)$  für jeden Wert von  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) topologisch ist.

$M$  sei ein Kompaktum in  $R$  und  $f(P, t)$  eine isotope Deformation von  $M$ . Die Deformationsmenge der Deformation von  $M$  auf die Zwischenmenge  $M(t)$  sei  $D(t)$ . Wenn  $0 < t_0 \leq T \leq 1$  ist, kann  $D(t_0)$  über die Zwischenmengen  $D(t)$  so auf  $D(T)$  deformiert werden, daß die Punkte von  $\{M, 0\}$  fest bleiben.

*Beweis.* Es sei  $Q = \{f(P, \tau), \tau\}$ ,  $0 \leq \tau \leq t_0$ , irgendein Punkt von  $D(t_0)$ . Die Funktion:

$$g(Q, t) = \left\{ f \left( P, \tau(1-t) + \frac{\tau T}{t_0} \cdot t \right), \tau(1-t) + \frac{\tau T}{t_0} t \right\}$$

bestimmt eine Deformation von  $D(t_0)$  über die Zwischenmengen  $D(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , auf  $D(T)$ .

## § 2. Deformationsaufgaben.

2.1. Unter einer Deformationsaufgabe soll ein Problem der folgenden Art verstanden werden:

### Aufgabe I.

A. Es sei im Raum  $R$  ein System von abgeschlossenen Mengen  $A(t)$  gegeben, die von dem Parameter  $t$  für  $0 \leq t \leq 1$  abhängen.

B.  $M(t)$  und  $N(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) seien Systeme von kompakten Mengen in  $R$ , die den folgenden Bedingungen genügen:

D 1. a) Es gebe eine isotope Deformation von  $M(0)$  über die Zwischenmengen  $M(t)$  auf  $M(1)$ .



b) Es gebe eine isotope Deformation von  $N(0)$  über die Zwischenmengen  $N(t)$  auf  $N(1)$ .

D 2. Für  $t = 0$  gelte:  $M(0)$  lasse sich in  $R - A(0)$  auf  $N(0)$  deformieren. Ist der Deformationsparameter  $\tau$ , so sei die Deformation in der Nähe von  $\tau = 0$  und von  $\tau = 1$  isotop; d. h. sind die Zwischenmengen  $Z(\tau)$  (mit  $Z(0) = M(0)$  und  $Z(1) = N(0)$ ), so gebe es eine Zahl  $\alpha$  mit  $0 < \alpha \leq 1$ , derart, daß die Deformation von  $M(0)$  über die Zwischenmengen  $Z(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \alpha$ , auf  $Z(\alpha)$  und die Deformation von  $Z(1 - \alpha)$  über die Zwischenmengen  $Z(\tau)$ ,  $1 - \alpha \leq \tau \leq 1$ , auf  $N(0)$  isotop sind.

D 3. Es gebe Zahlen  $\delta > 0$  und  $\varepsilon > 0$ , die von  $t_0$  unabhängig sind, derart, daß für alle  $t_0$  mit  $0 \leq t_0 \leq 1$  die Mengen  $M(t)$  und  $N(t)$  mit  $|t - t_0| < \delta$  außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $A(t_0)$  liegen.

C. Aufgabe: Bei jedem Wert von  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist  $M(t)$  in  $R - A(t)$  auf  $N(t)$  zu deformieren, derart, daß diese Deformation folgende Eigenschaft hat: Die Deformationsmenge der Deformation von  $M(t)$  auf  $N(t)$  sei  $D(t)$ .  $D(0)$  soll über die Zwischenmengen  $D(t)$  auf  $D(1)$  deformiert werden können.

Bemerkung. Folgender Spezialfall der Aufgabe I werde hervorgehoben:  $M(t)$  und  $N(t)$  seien Punkte. Dann sind D 1 und D 2 den folgenden Bedingungen äquivalent:

D 1'. a) Der Punkt  $M(0)$  lasse sich durch die Kurve  $M(t)$  mit dem Punkt  $M(1)$  verbinden.

b) Der Punkt  $N(0)$  lasse sich durch die Kurve  $N(t)$  mit dem Punkte  $N(1)$  verbinden.

D 2'. Für  $t = 0$  gelte: Der Punkt  $M(0)$  lasse sich in  $R - A(0)$  mit dem Punkte  $N(0)$  verbinden.

2.2. Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht das folgende Problem:

#### Aufgabe II.

Welche Eigenschaften muß das Mengensystem  $A(t)$  besitzen, damit jede Deformationsaufgabe mit Mengensystemen  $M(t)$  und  $N(t)$ , welche den Bedingungen D 1, D 2, D 3 genügen, lösbar ist?

2.3. Wenn diese Frage sinnvoll sein soll, müssen D 1, 2, 3 jedenfalls in dem Spezialfall zur Lösbarkeit ausreichen, in dem die Mengen  $A(t)$  für  $0 \leq t \leq 1$  die leere Menge sind. Das beweisen wir durch den folgenden Satz:

#### Hilfssatz 1.

Im Raum  $R$  seien  $M(t)$  und  $N(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) Systeme von kompakten Mengen, die den Bedingungen D 1 und D 2 genügen. (In D 2 ist für  $A(0)$  die leere Menge zu setzen.)  $V(0)$  sei die Verbindungsmenge der Deformation von  $M(0)$  auf  $N(0)$ , vgl. D 2. Es gibt eine Deformation von  $M(t)$  auf  $N(t)$  mit der Verbindungsmenge:

$$V(t) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} M(\tau) \cup V(0) \cup \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} N(\tau).$$

Die Deformationsmenge dieser Deformation sei  $D(t)$ . Es gibt eine Deformation von  $D(0)$  mit den Zwischenmengen  $D(t)$ .

Beweis. Die Deformierbarkeit von  $M(t)$  auf  $N(t)$  folgt aus D 1 und D 2 nach 1.3.a).  $\beta$  sei eine Zahl:  $0 < \beta \leq \alpha$  und  $0 < \beta < 1 - \beta < 1$ . Nach D 1 und D 2 entstehen  $M(t)$  aus  $Z(\beta)$  und  $N(t)$  aus  $Z(1 - \beta)$  durch isotope Deformationen. Es seien die Deformationsmengen der Deformationen:

- a) von  $M(t)$  auf  $Z(\beta)$  :  $D(t, \beta)$ ,
- b) von  $Z(\beta)$  auf  $Z(1 - \beta)$  :  $D(\beta, 1 - \beta)$ ,
- c) von  $Z(1 - \beta)$  auf  $N(t)$  :  $D(1 - \beta, t)$ .

Es gilt:  $D(t) = D(t, \beta) \cup D(\beta, 1 - \beta) \cup D(1 - \beta, t)$ .

Der Parameter der Deformation von  $M(t)$  auf  $N(t)$  werde mit  $u$  bezeichnet,  $0 \leq u \leq 1$ .  $u$  soll folgendermaßen gewählt werden: Die Menge  $Z(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , ist für jeden Wert von  $\tau$  Zwischenmenge der Deformation von  $M(t)$  auf  $N(t)$ . Als solcher kommt ihr ein bestimmter Wert von  $u$  zu. Wenn  $\beta \leq \tau \leq 1 - \beta$  ist, sei das der Wert  $u = \tau$ . Bei dieser Wahl von  $u$  ist der Durchschnitt von  $D(t, \beta)$  und  $D(\beta, 1 - \beta)$  die Menge  $\{Z(\beta), \beta\}$  und der Durchschnitt von  $D(\beta, 1 - \beta)$  und  $D(1 - \beta, t)$  die Menge  $\{Z(1 - \beta), 1 - \beta\}$ . Nach Nr. 1.4 können  $D(0, \beta)$  auf  $D(t, \beta)$  und  $D(1 - \beta, 1)$  auf  $D(1 - \beta, t)$  so deformiert werden, daß die Punkte von  $\{Z(\beta), \beta\}$  bzw.  $\{Z(1 - \beta), 1 - \beta\}$  fest bleiben. Die Deformation von  $D(0)$  auf  $D(t)$  werde folgendermaßen bestimmt:

1.  $D(0, \beta)$  werde nach 1.4 auf  $D(t, \beta)$  deformiert,
2.  $D(1 - \beta, 1 - \beta)$  bleibe punktweise fest,
3.  $D(1 - \beta, 1)$  werde nach 1.4 auf  $D(1 - \beta, t)$  deformiert. Daß diese Definition eine Deformation ergibt, folgt aus 1.3.b).

2.4. Wenn die Mengen  $A(t)$  für  $0 \leq t \leq 1$  nicht die leere Menge sind, kommt es bei der Lösung der Deformationsaufgabe darauf an, entsprechend den Änderungen von  $A(t)$  die Verbindungsmenge  $V(t)$  von  $M(t)$  und  $N(t)$  so abzuändern, daß  $A(t)$  und  $V(t)$  punktfremd sind. Hierzu werden Deformationsretrakte gemäß der folgenden Definition benutzt:

*Definition I.*

Es sei  $A$  eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$ . Die Punktmenge  $E \subset R$  heiße „Schutzbereich“ von  $A$ , wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1.  $E$  enthalte  $A$ .
2. Es gebe eine Deformation von  $R - A$  auf  $R - E$ , deren Verbindungsmenge in  $R - A$  liegt und die  $R - E$  punktweise fest läßt.

2.5. Der folgende Satz gibt hinreichende Bedingungen zur Lösung der Aufgabe II:

*Satz 1.*

$A(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) sei ein System von abgeschlossenen Mengen im Raum  $R$ .

A. Jede Menge  $A(t)$  besitze ein System  $E_\epsilon(t)$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ , von Schutzbereichen, derart, daß  $E_\epsilon(t)$  zur  $\epsilon$ -Umgebung von  $A(t)$  gehört.

B. Zu jedem  $\delta > 0$  gebe es eine Zahl  $\sigma(\delta) > 0$ , derart, daß für beliebiges  $t_0$  ( $0 \leq t_0 \leq 1$ )  $A(t)$  zu  $E_\delta(t_0)$  gehört, wenn  $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma(\delta)$  gilt.

$M(t)$  und  $N(t)$  seien Systeme von kompakten Mengen, die den Bedingungen D 1, D 2, D 3 (vgl. 2.1) genügen.

Bei jedem Wert von  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist  $M(t)$  in  $R - A(t)$  auf  $N(t)$  deformierbar. Die Deformationsmenge sei  $D(t)$ . Dann kann  $D(0)$  über die Zwischenmengen  $D(t)$  auf  $D(1)$  deformiert werden.

Kürzer kann die Behauptung so formuliert werden: Unter den angegebenen Voraussetzungen ( $A$  und  $B$ ) über  $A(t)$  ist jede Deformationsaufgabe (Aufgabe I, 2.1) lösbar.

*Beweis.*

a) Für die Deformation von  $M(0)$  auf  $N(0)$  seien  $V(0)$  Verbindungsmenge und  $D(0)$  Deformationsmenge.  $\epsilon$  sei die in D 3 eingeführte Zahl. Nach Definition I gibt es eine Deformation von  $R - A(0)$  auf  $R - E_{\epsilon/2}(0)$ , die in  $R - A(0)$  erfolgt und  $R - E_{\epsilon/2}(0)$  punktweise fest läßt. Dadurch wird  $V(0)$  über Zwischenmengen  $V(0, s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , auf eine Punktmenge  $V(0, 1) = V'(0)$  deformiert. Hierbei bleiben wegen D 3 und Voraussetzung A alle diejenigen Mengen  $Z(\tau)$  punktweise fest, die in der  $\epsilon/2$ -Umgebung von  $M(0)$  bzw.  $N(0)$  liegen.

Wegen der Kompaktheit der  $Z(\tau)$  und wegen D 2 gibt es eine Zahl  $\beta > 0$ , derart, daß alle Mengen  $Z(\tau)$  mit  $0 \leq \tau \leq \beta$  bzw.  $1 - \beta \leq \tau \leq 1$  diese Eigenschaft haben. Diese Mengen  $Z(\tau)$  gehören daher zu sämtlichen Zwischenmengen  $V(0, s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . Nach 1.3.c) ist  $V(0, s)$  Verbindungsmenge einer Deformation von  $M(0)$  auf  $N(0)$ . Die dazugehörige Deformationsmenge sei  $D(0, s)$ . Nach 1.3.c) ist  $D(0)$  über die Zwischenmengen  $D(0, s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , auf  $D'(0) = D(0, 1)$  deformierbar. Die Mengensysteme  $M(t)$  und  $N(t)$  erfüllen die Bedingung D 2 auch noch, wenn die Deformation in D 2 durch diejenige ersetzt wird, deren Deformationsmenge  $D(0, s)$ , insbesondere also  $D'(0)$ , ist. Nach dem Hilfssatz 1 kann  $M(t)$  so auf  $N(t)$  deformiert werden, daß die Verbindungsmenge durch:

$$V(t) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} M(\tau) \cup V'(0) \cup \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} N(\tau)$$

gegeben wird und außerdem gilt: Ist die Deformationsmenge dieser Deformation  $D(t)$ , so kann  $D'(0)$  über die Zwischenmengen  $D(t)$  auf  $D(1)$  deformiert werden.

b) Nach der Voraussetzung B gehören die Mengen  $A(t)$  für  $0 \leq t \leq \sigma(\varepsilon/2)$  zu  $E_{\varepsilon/2}(0)$  und daher zu der  $\varepsilon/2$ -Umgebung von  $A(0)$  (Voraussetzung A). Wegen D 3 liegen  $M(t)$  und  $N(t)$  für  $0 \leq t \leq \delta$  außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $A(0)$ . Die kleinere der Zahlen  $\delta$  und  $\sigma(\varepsilon/2)$  sei  $\gamma$ . Dann ist  $V(t)$  für  $0 \leq t \leq \gamma$  punktfremd zu  $A(t)$ .

c) Fassen wir die Ergebnisse zusammen: Für  $0 \leq t \leq \gamma$  ist  $M(t)$  in  $R - A(t)$  auf  $N(t)$  deformierbar.  $D(0)$  wird über die Zwischenmengen  $D(0, s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) auf  $D'(0)$  deformiert;  $D'(0)$  wird über die Zwischenmengen  $D(t)$  auf  $D(\gamma)$  deformiert. Satz 1 ist daher für das Intervall  $0 \leq t \leq \gamma$  bewiesen.

d) Für  $t = \gamma$  ist D 2 mit den Mengen  $M(\gamma)$ ,  $N(\gamma)$  und der in c) beschriebenen Deformation von  $M(\gamma)$  auf  $N(\gamma)$  erfüllt. Daher kann mit denselben Schlüssen wie in a), b), c) Satz 1 für ein weiteres Intervall  $\gamma \leq t \leq 2\gamma$  bewiesen werden usw. Nach endlich vielen Schritten dieser Art erreichen wir  $t = 1$ , was den Beweis von Satz 1 bedeutet.

### § 3. Anwendung auf ein Problem der Homotopietheorie.

3.1.  $R$  und  $S$  seien topologische Räume.  $f$  sei eine (stetige) Abbildung von  $S$  in  $R$ . Die durch  $f$  bestimmte Homotopieklasse von Abbildungen von  $S$  in  $R$  werde mit  $(f)$  bezeichnet. Es seien  $R$ ,  $S$  und  $T$  topologische Räume.  $\alpha$  sei eine Homotopieklasse von Abbildungen von  $R$  in  $S$  und  $\beta$  sei eine Homotopieklasse von Abbildungen von  $S$  in  $T$ . Es seien  $f \in \alpha$  und  $g \in \beta$ . Dann bestimmt  $gf$  eine Homotopieklasse von  $R$  in  $T$ , die mit  $\beta\alpha$  bezeichnet werde.

3.2. Zur Beschreibung der Beziehungen zwischen den Homotopieeigenschaften verschiedener Räume werden die folgenden Bedingungen benutzt:

H 1.  $R$  und  $R'$  seien zusammenhängende metrische Räume.  $S$  sei ein Kompaktum.  $\alpha$  sei eine Homotopieklasse von Abbildungen von  $S$  in  $R$ . Dann gebe es eine Homotopieklasse von  $S$  in  $R'$ , die  $\alpha$  zugeordnet sei. Diese Zuordnung werde mit  $\Phi$  bezeichnet:  $\bar{\alpha} = \Phi(\alpha)$ .

H 2.  $R$  und  $R'$  seien zusammenhängende metrische Räume.  $T$  und  $S$  seien Kompakta.  $\beta$  sei eine Homotopieklasse von  $T$  in  $S$ ;  $\alpha$  sei eine Homotopieklasse von  $S$  in  $R$ .  $\Phi$  bezeichne die in H 1 angegebene Zuordnung zwischen den Homotopieklassen von  $R$  und  $R'$ . Dann gelte bei Verwendung der in 3.1 angegebenen Symbole:

$$\text{Aus } \bar{\alpha} = \Phi(\alpha) \text{ folge } \bar{\alpha}\beta = \Phi(\alpha\beta).$$

**H 3.**  $R$  und  $R'$  seien zusammenhängende metrische Räume. Zwischen den Homotopieklassen von  $R$  und  $R'$  sei eine Zuordnung  $\Phi$  erklärt.  $\bar{\alpha}$  sei eine Homotopieklasse von Abbildungen des Kompaktums  $S$  in  $R'$ . Dann existiere eine Homotopieklasse  $\alpha$  von  $S$  in  $R$  mit:  $\bar{\alpha} = \Phi(\alpha)$ .

**3.3.**  $R$  und  $R'$  seien zusammenhängende metrische Räume. Zwischen den Homotopieklassen von  $R$  und  $R'$  bestehe eine Zuordnung  $\Phi$  mit den Eigenschaften H 1 und H 2. Jedem Kompaktum  $S$  in  $R$  ist als Bild der Homotopieklasse der Deformationen von  $S$  in  $R$  eine Homotopieklasse von  $S$  in  $R'$  zugeordnet; diese werde als Deformationsklasse  $\delta(S)$  bezeichnet. Die Bedingung H 3 ist (unter Voraussetzung von H 1 und H 2) der folgenden Bedingung H 4 äquivalent:

**H 4.** Zu jedem Kompaktum  $K'$  in  $R'$  gibt es eine Abbildung  $f$  von  $K'$  in  $R$ , so daß, wenn  $f(K') = K$  ist, für eine Abbildung  $g'$  aus der Deformationsklasse  $\delta(K)$  die Abbildung  $g'f$  der identischen Abbildung von  $K'$  homotop ist.

**3.4. Satz 2.**

Es sei  $A(t)$  ein System von abgeschlossenen Mengen im metrischen Raum  $R$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit folgenden Eigenschaften:

A. Jede Menge  $A(t)$  besitzt ein System  $E_\varepsilon(t)$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , von Schutzbereichen, derart, daß  $E_\varepsilon(t)$  zur  $\varepsilon$ -Umgebung von  $A(t)$  gehört.

B. Zu jedem  $\delta > 0$  gebe es eine Zahl  $\sigma(\delta) > 0$ , derart, daß für beliebiges  $t_0$  mit  $0 \leq t_0 \leq 1$   $A(t)$  zu  $E_\delta(t_0)$  gehört, wenn  $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma(\delta)$  gilt.

C. Für beliebiges  $t_0$ ,  $0 \leq t_0 \leq 1$ , liege  $A(t)$  für  $|t - t_0| \leq \sigma(1)$  in  $E_1(t_0)$ .

D. Es sei  $t_1 \leq t \leq t_2$  ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall des Einheitsintervalles. Die Vereinigungsmenge:  $I(t_1, t_2) = \bigcup_{t_1 \leq t \leq t_2} A(t)$  sei abgeschlossen.

Es sei  $R(t) = R - A(t)$ .

Unter den Voraussetzungen A, B, C, D besteht zwischen den Homotopieklassen der Räume  $R(t_1)$  und  $R(t_2)$  für  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$  eine Zuordnung mit den Eigenschaften H 1, H 2, H 3.

*Beweis.*

a) Es sei  $t_0$  ein beliebiger Wert  $0 \leq t_0 \leq 1$ ; ferner werde  $t'$  beliebig im Intervall  $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$  gewählt. Hier sei  $\sigma$  die nach B zu  $\delta = 1$  gehörende Zahl  $\sigma(1)$ , die auch in der Bedingung C vorkommt. Wir werden die Behauptung des Satzes für die Räume  $R(t_0)$  und  $R(t')$  beweisen. Das bedeutet zugleich den Beweis des Satzes 2.

b) Nach der Definition des Schutzbereiches  $E_1(t_0)$  existiert eine Deformation  $G_\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ , Deformationsparameter) von  $R(t_0)$  auf  $R - E_1(t_0)$ . Hier interessiert zunächst nur die Abbildung  $G_1$ , die sich für  $\tau = 1$  ergibt.  $G_1$  bildet  $R(t_0)$  auf  $R - E_1(t_0)$  ab. Wegen a) und C liegt  $A(t')$  in  $E_1(t_0)$ , und daher ist  $R - E_1(t_0)$  punktfremd zu  $A(t')$ .  $G_1$  ist daher eine Abbildung von  $R(t_0)$  in  $R(t')$  und bewirkt eine Zuordnung  $\Phi$  zwischen den Homotopieklassen von  $R(t_0)$  und  $R(t')$ , welche die Eigenschaften H 1 und H 2 besitzt. Die der Zuordnung  $\Phi$  entsprechenden Deformationsklassen seien  $\delta_{t'}(S)$ , wenn  $S$  ein Kompaktum in  $R(t_0)$  ist. Es fehlt der Nachweis von H 4.

c) Es sei  $K'$  ein Kompaktum in  $R(t')$ . Nach der Definition des Schutzbereiches  $E_1(t')$  existiert eine Deformation  $F_\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ , Deformationsparameter) von  $R(t')$  auf  $R - E_1(t')$ . Durch sie werde  $K'$  auf  $K$  deformiert. Die Abbildung  $f(K') = F_1(K') = K$  ist in  $R(t')$  homotop zur identischen Abbildung von  $K'$ . Wegen der Bedingung C liegt  $K$  für  $|t - t'| \leq \sigma$  in  $R(t)$ . Insbesondere ist  $K$  Teilmenge von  $R(t_0)$ .

d) Die in b) eingeführte Deformation  $G_r$  deformiert  $K$  auf ein Kompaktum  $\bar{K}$ , das in  $R - E_1(t_0)$  und wegen der Bedingung C daher in allen  $R(t)$  mit  $|t - t_0| \leq \sigma$  liegt. Die Abbildung  $g' = G_1$  von  $K$  auf  $\bar{K}$  ist in  $R(t_0)$  homotop der identischen Abbildung von  $K$  auf sich. Nach b) ist  $g'$  Element der Deformationsklasse  $\delta_\nu(K)$ .

e) Die Kompakta  $K$  und  $\bar{K}$  liegen in jedem Raum  $R(t)$  für  $t_0 \leq t \leq t'$ . Wir behaupten: Die Abbildung  $g'$  von  $K$  auf  $\bar{K}$  ist in jedem dieser Räume homotop der identischen Abbildung von  $K$  auf sich. Der Beweis ergibt sich aus Satz 1, der im Intervall  $t_0 \leq t \leq t'$  auf die folgenden Mengensysteme angewandt werde:  $M(t) = K$ ,  $N(t) = \bar{K}$ . Offenbar ist die Bedingung D 1 (vgl. 2. 1) erfüllt. Die Deformation in Bedingung D 2 sei  $G_r$ . Die Richtigkeit von D 3 folgt aus Bedingung D, die auf das Intervall  $t_0 \leq t \leq t'$  angewandt werde.

f) Nach e) ist die Abbildung  $g'$  von  $K$  auf  $\bar{K}$  in  $R(t')$  homotop zur identischen Abbildung von  $K$  auf sich. Also sind die Abbildungen  $g'f$  und  $f$  von  $K'$  in  $R(t')$  homotop. Nach c) ist  $f$  in  $R(t')$  homotop zur identischen Abbildung von  $K'$ . Dasselbe gilt daher auch für  $g'f$ . Damit ist H 4 nachgewiesen.

#### § 4. Schutzbereiche und Ausdehnungsmengen.

4. 1. Satz 1 gibt hinreichende Voraussetzungen für das Mengensystem  $A(t)$  an, damit jede Deformationsaufgabe lösbar ist. Diese Voraussetzungen sind von zwei Arten:

1. Die Voraussetzung A betrifft die einzelne Menge des Systems  $A(t)$ .
2. Die Voraussetzung B enthält eine Bedingung für das System  $A(t)$  als Ganzes. Da sich auch die letztere auf das System von Schutzbereichen bezieht, ist die Lösung des folgenden Problems bedeutsam für die ganze Aufgabe:

##### Aufgabe III.

Gegeben sei eine abgeschlossene Menge  $A$  des Raumes  $R$ . Es ist ein System  $E_\varepsilon$  von Schutzbereichen (Definition I, 2.4) zu konstruieren, welches die folgende Eigenschaft hat: Zu einer vorgegebenen Umgebung  $U$  von  $A$  gibt es eine Zahl  $\varepsilon(U) > 0$ , derart, daß alle Schutzbereiche  $E_\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \varepsilon(U)$  zu  $U$  gehören.

Zur Lösung dieser Aufgabe werde eine Methode vorgeschlagen, die in wichtigen Fällen abgeschlossener Mengen zum Ziele führt. Wir bestimmen ein System von Mengen, die wir Ausdehnungsmengen nennen, und konstruieren die Schutzbereiche darauf mittels der Ausdehnungsmengen.

##### 4. 2. Definition II.

Es sei im Raum  $R$  eine abgeschlossene Menge  $A$  gegeben. Die Mengen  $K_r$  werden Ausdehnungsmengen von  $A$  genannt, wenn das System der  $K_r$  den folgenden Bedingungen genügt:

A 1. Jeder Zahl  $r$  mit  $0 < r \leq 1$  sei eine Menge  $K_r$  zugeordnet, die zu  $A$  fremd ist.

A 2. Die Mengen  $K_r$  ( $0 < r \leq 1$ ) überdecken  $R - A$ .

A 3. Zu jeder Umgebung  $U$  von  $A$  gebe es eine Zahl  $\gamma(U) > 0$ , derart, daß für  $r < \gamma(U)$  die Mengen  $K_r$  in  $U$  liegen.

A 4. Wenn der Punkt  $P$  zu  $K_{r_0}$  gehört,  $0 < r_0 \leq 1$ , so gebe es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung von  $P$ , die von den  $K_r$  mit  $|r - r_0| < \varepsilon$  ganz überdeckt wird.

A 5.  $P$  sei ein Punkt, der nicht zu  $A$  und nicht zu  $K_{r_0}$  gehört. Dann gebe es eine Umgebung von  $P$ :  $U(P)$  und eine Zahl  $\delta > 0$ , derart, daß alle Mengen  $K_r$  mit  $|r - r_0| < \delta$  punktfremd zu  $U(P)$  sind.

A 6.  $K_r$  lasse sich auf eine Teilmenge von  $K_1$  deformieren. Diese Deformation bestimme eine Funktion  $Q = f(P, r; s)$ , die für alle Punkte  $P$  von  $K_r$  und alle Parameterwerte  $s$  mit  $r \leq s \leq 1$  definiert sei. Der Deformationsparameter sei  $s$ . Ferner gelte:  $P = f(P, r; r)$ . Der Punkt  $Q$  gehöre zu  $K_s$ . Die Funktion  $f$  sei stetig in  $P, r$  und  $s$ .

4. 3. Unmittelbar aus den Definitionen folgt:

*Hilfssatz 2.*

Es sei  $A$  eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$  und  $K_r$  ( $0 < r \leq 1$ ) ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$ . Wir betrachten das Teilsystem der  $K_r$  mit  $0 < r \leq a < 1$ . Setzen wir  $K'_s = K_{as}$  ( $0 < s < 1$ ) und  $K'_i = \bigcup_{a \leq r \leq 1} K_r$ , so erhalten wir ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$ , dessen Parameter  $s$  ist.

4. 4. Es seien  $A$  eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$  und  $K = R - A$ .  $K_r$  sei ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$ . Die Funktion  $\varphi(P)$  heiße zugehörig zum System der Ausdehnungsmengen  $K_r$ , wenn sie auf  $K$  definiert und stetig ist und wenn  $P$  auf  $K_{\varphi(P)}$  liegt.

*Hilfssatz 3.*

$A$  sei eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$  und  $K_r$  ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$ .  $w$  sei eine feste Zahl  $0 \leq w \leq 1$ . Ist dann  $P$  ein Punkt von  $K = R - A$ , so bestehen 2 Möglichkeiten:

a)  $P$  gehört zu Mengen  $K_r$  mit  $r \leq w$ . (Dieser Fall ist bei  $w = 0$  ausgeschlossen.) Dann sei  $\varphi(P)$  die obere Grenze der Zahlen  $r \leq w$ , für die  $P$  in  $K_r$  liegt.

b)  $P$  gehört nur zu Mengen  $K_r$  mit  $r > w$ . (Dieser Fall ist bei  $w = 1$  unmöglich.) Dann sei  $\varphi(P)$  die untere Grenze der zugehörigen  $r$ -Werte.

$\varphi(P)$  ist eine zum System  $K_r$  gehörige Funktion.

Der Beweis folgt aus den Bedingungen A 1 - 5 mittels einfacher Stetigkeitsbetrachtungen.

4. 5. *Hilfssatz 4.*

$A$  sei eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$  und  $K_r$  ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$ . Es sei  $M$  eine zu  $A$  fremde Punktmenge in  $R$ .  $M$  kann in  $R - A$  auf eine Punktmenge  $M'$  deformiert werden, die zu  $K_1$  gehört.

*Beweis.*

$\varphi(P)$  sei eine zum System  $K_r$  gehörende Funktion (vgl. Hilfssatz 3). Wir setzen:  $\varphi(P, t) = (1 - t) \varphi(P) + t$ . Die gesuchte Deformation von  $M$  wird durch die Formel:

$$f(P, t) = f(P, \varphi(P); \varphi(P, t))$$

definiert. Dabei ist die Funktion  $f$  auf der rechten Seite die in A 6 eingeführte Funktion. Die Stetigkeit von  $f(P, t)$  für  $P \in M$  und  $0 \leq t \leq 1$  folgt aus der Stetigkeit der Funktion  $\varphi(P, t)$  für diese Argumente und aus A 6. Die Punkte  $f(P, 1)$  liegen in  $K_1$ , weil  $\varphi(P, 1) = 1$  ist.

4. 6. *Satz 3.*

$A$  sei eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$ , und  $K_r$  sei ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$ . Setzen wir

$$E_s = R - \bigcup_{s \leq r \leq 1} K_r,$$

so erhalten wir ein System von Schutzbereichen der Menge  $A$ , welches die folgende Eigenschaft hat:

Zu einer vorgegebenen Umgebung  $U$  von  $A$  gibt es eine Zahl  $\varepsilon(U)$ , derart, daß alle Schutzbereiche  $E_\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(U)$  zu  $U$  gehören.

*Beweis.* Untersuchen wir zuerst  $E_1 = R - K_1$ .  $E_1$  enthält  $A$ . Wir deformieren  $K = R - A$  nach Hilfssatz 4 auf eine Teilmenge von  $K_1 = R - E_1$ , und zwar verwenden wir dazu folgende Deformation: Wir konstruieren die zum System  $K$ , gehörende Funktion  $\varphi(P)$  mittels der Zahl  $w = 1$  und benutzen sie zur Bestimmung der Deformation, so wie das im Beweise des Hilfssatzes 4 beschrieben wird. Diese Funktion  $\varphi(P)$  nimmt in allen Punkten von  $K_1$  den Wert 1 an. Es ist für Punkte von  $K_1$  daher identisch in  $t$ :  $\varphi(P, t) = 1$ , d. h.  $K_1$  bleibt bei der Deformation von  $R - A$  auf  $K_1$  punktweise fest.  $E_1$  hat also die Eigenschaften eines Schutzbereiches. Bezüglich der übrigen Mengen  $E_\varepsilon$  werde auf Hilfssatz 2 verwiesen. Zur Umgebung  $U$  von  $A$  gibt es wegen A 3 eine Zahl  $\gamma(U)$  derart, daß die  $K_\varepsilon$  mit  $\varepsilon < \gamma(U)$  ganz in  $U$  liegen. Daher gehören die  $E_\varepsilon$  mit  $\varepsilon < \gamma(U)$  zu  $U$ .

4. 7. Satz 3 zeigt, daß die Aufgabe III durch die Konstruktion eines Systems von Ausdehnungsmengen gelöst werden kann. In den folgenden Untersuchungen werden Beispiele zur Bestimmung der Ausdehnungsmengen gegeben. Das folgende Beispiel soll die Allgemeinheit unserer Begriffe zeigen:

Der Raum  $R$  lasse sich stetig auf das abgeschlossene Einheitsintervall abbilden. Die Abbildungsfunktion  $F$  sei 0 auf der abgeschlossenen Menge  $A$  und sonst von 0 verschieden. Die Ausdehnungsmenge  $K_r$  werde als die Originalmenge des Intervalles  $0 < F \leq r$  definiert. Wir setzen:  $f(P, r; s) = P$  für  $r \leq s \leq 1$ . Bei diesem Beispiel sind die Schutzbereiche  $E_\varepsilon$  sämtlich mit  $A$  identisch.

An VAN KAMPENs Untersuchungen erinnert das folgende Beispiel: Der Raum  $R$  sei ein Kreis vom Radius  $a$ .  $A$  bestehe aus dem Kreisrand und  $n$  Punkten im Innern des Kreises. Der Abstand der Punkte voneinander und vom Kreisrand sei  $\geq b$ . Die Ausdehnungsmenge  $K_r$ ,  $0 < r < 1$ , bestehe aus dem zu  $R$  konzentrischen Kreise vom Radius  $a - br/2$  und je einem Kreise vom Radius  $br/2$  um jeden der Punkte von  $A$ . Es sei  $K_1 = R - A - \bigcup_{0 < r < 1} K_r$ .

Im folgenden Paragraphen wird eine allgemeine Methode zur Konstruktion von Ausdehnungsmengen beschrieben.

## § 5. Ausdehnungsmengen von Polyedern.

### 5. 1. Hilfssatz 5.

Es sei  $G$  ein (endlicher oder unendlicher) lokal endlicher Komplex. Jeder Ecke von  $K$  sei eine ganze Zahl  $\geq 0$  (eine Ziffer) zugeordnet.

a) Dann gibt es auf  $G$  eine eindeutig bestimmte stetige Funktion  $g$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $g(E) = n$ , wenn  $E$  eine Ecke mit der Ziffer  $n$  bedeutet.

2. Es sei  $s = P_1 P_2$  irgendeine Strecke mit den Eckpunkten  $P_1$  und  $P_2$ , die ganz einem Simplex von  $G$  angehört. Dann verhalte sich  $g$  auf  $s$  linear.

b) Die Menge aller Punkte des Polyeders  $G$ , in denen  $g = x$  ist, werde als Niveaufläche  $S(x)$  bezeichnet.  $a \leq x \leq b$  sei ein Intervall, dem keine Eckenziffer von  $G$  angehört. Die Niveauflächen  $S(x)$  können für  $a \leq x \leq b$  durch isotope Deformation ineinander überführt werden. Ist  $k$  eine Eckenziffer, so wird  $S(x)$  auf eine Teilmenge von  $S(k)$  deformiert, wenn  $x$  gegen  $k$  strebt.



*Beweis.*

a)  $\Delta^k$  sei ein  $k$ -Simplex von  $G$ . Es sei  $P$  der Punkt von  $\Delta^k$  mit den baryzentrischen Koordinaten  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ . Die Ecke mit den baryzentrischen Koordinaten  $\mu_i = 0$  für  $i \neq r$ ,  $\mu_r = 1$  trage die Ziffer  $a_r$ . Dann sei:

$$g(P) = \mu_0 a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k.$$

Diese Definition von  $g$  geschehe in allen Simplexes von  $G$ . Die so bestimmte Funktion  $g$  genügt den Anforderungen. Eine zweite derartige Funktion  $g'$  kann es nicht geben, da wegen 1. und 2. die Differenz  $g - g' = 0$  sein müßte.

b) Der Durchschnitt von  $\Delta^k$  mit  $S(x)$  ist der Schnitt von  $\Delta^k$  mit der Hyperebene  $L(x): \mu_0 a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k = x$ . Dieser Schnitt ist ein konvexes Polyeder  $P^k(x)$ , dessen Ecken die Schnittpunkte der Kanten von  $\Delta^k$  und  $L(x)$  sind. Für  $a \leq x \leq b$  sind die Zellenkomplexe  $P^k(x)$  isomorph. Wir können in der für isomorphe Komplexe üblichen Weise eine topologische Abbildung der  $P^k(x)$  aufeinander bestimmen, indem wir sie isomorph baryzentrisch in Simplexes zerlegen und in jedem Simplex die Punkte mit den gleichen baryzentrischen Koordinaten einander zuordnen. Nun ändern die Eckpunkte von  $P^k(x)$  ihre Lage stetig mit  $x$ ; das gleiche gilt daher auch für die Schwerpunkte, die zur Simplicialzerlegung von  $P^k(x)$  gebraucht werden. Die Polyeder  $P^k(x)$  gehen also für  $a \leq x \leq b$  durch isotope Deformation ineinander über. Es seien  $\Delta^r$  und  $\Delta^s$  Simplexes des Komplexes  $G$  mit dem gemeinsamen Randsimplex  $\Delta^t$ . Die in diesen Simplexes gelegenen Teile der Niveauflächen  $S(x)$  seien die Zellenkomplexe  $P^r(x)$ ,  $P^s(x)$  und  $P^t(x)$ . Dann ist  $P^t(x)$  Seite von  $P^r(x)$  und von  $P^s(x)$ . Die für  $a \leq x \leq b$  existierenden Deformationen der Polyeder  $P^r(x)$  bzw.  $P^s(x)$  lassen sich so einrichten, daß sie dieselbe Deformation von  $P^t(x)$  bewirken. Hierzu ist  $P^t(x)$  innerhalb  $P^r(x)$  und  $P^s(x)$  isomorph baryzentrisch in Simplexes zu zerlegen.

Wenn  $x$  gegen die Eckenziffer  $k$  strebt, gehen alle Punkte von  $S(x)$  wegen der Stetigkeit von  $g$  in Punkte von  $S(k)$  über.

5.2. Die isotope Deformation der Mengen  $S(x)$  kann in der Umgebung der Ecke mit der Ziffer  $a$  aufhören, wenn  $x$  durch den Wert  $x = a$  hindurchgeht. Es wird eine Bedingung für die Bezifferung angegeben, welche die Fortsetzung über  $x = a$  hinweg sichert.

*Fortsetzungsbedingung F.*

$G$  sei ein lokal endlicher Komplex, dessen Ecken mit Ziffern versehen sind.  $E_a$  sei eine Ecke mit der Ziffer  $a$ . Es gebe im Stern von  $E_a$  ( $St(E_a)$ ) keine weitere Ecke mit der Ziffer  $a$ . Der Stern von  $E_a$  sei isomorph einem Komplex  $H_a$ , der im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $R_n$  liegt und folgende Eigenschaften hat:

1. Vermöge der Isomorphie entspreche der Ecke  $E_a$  die Ecke  $E'_a$ .  $H_a$  enthalte eine volle Umgebung (im  $R_n$ ) von  $E'_a$ .

2. Wir übertragen mittels der Isomorphie die Eckenbezifferung vom Stern der Ecke  $E_a$  auf den Komplex  $H_a$ . Bilden wir für den Komplex  $H_a$  die in Hilfssatz 5 eingeführten Niveauflächen  $S'(x)$ , so sollen diese  $S'(x)$  für  $|x - a| < 1$  auf parallelen Hyperebenen des  $R_n$  liegen.

*Hilfssatz 6.*

$G$  sei ein lokal endlicher Komplex. Die Ecken von  $G$  seien so beziffert, daß in allen Ecken mit der Ziffer  $a$  die Fortsetzungsbedingung  $F$  gilt. Dann gehen die in Hilfssatz 5 eingeführten Niveauflächen  $S(x)$  für  $|x - a| < 1$  durch isotope Deformation ineinander über.



*Beweis.*

1.  $E_a$  sei eine Ecke von  $G$  und trage die Ziffer  $a$ . Den zum  $St(E_a)$  gehörenden Teil der Niveaufläche  $S(x)$  bezeichnen wir mit  $S_a(x)$ . Wegen der Isomorphie von  $St(E_a)$  und  $H_a$  sind die Zellenkomplexe  $S_a(x)$  und  $S'(x)$  isomorph (bezüglich der Bezeichnung vgl. Bedingung F).  $L(x)$  sei die  $S'(x)$  enthaltende Hyperebene, sie schneide den Rand von  $H_a$  in der Punktmenge  $B(x)$ . Nach Hilfssatz 5 sind die Mengen  $B(x)$  für  $|x - a| < 1$  isomorphe Zellenkomplexe, die durch isotope Deformation ineinander übergehen. Da die  $S'(x)$  für  $|x - a| < 1$  parallelen Hyperebenen angehören, fassen wir sie als Komplexe desselben  $(n-1)$ -dimensionalen Raumes  $R_{n-1}$  auf, der die Hyperebene  $L(a)$  sein soll, in welche wir  $L(x)$  orthogonal projizieren. Dem Punkte  $E'_a$  entspreche im  $R_{n-1}$  der Punkt  $E$ . Wie man durch einen indirekten Schluß zeigen kann, gilt im  $R_{n-1}$  folgender Satz: Es gibt eine Zahl  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$ , derart, daß für  $|x - a| < \alpha$  jeder Halbstrahl durch  $E$  die Menge  $B(x)$  in genau einem Punkte schneidet. Hieraus folgt, daß für  $|x - a| < \alpha$   $S'(x)$  mit dem Kegel über  $B(x)$  mit  $E$  als Spitze übereinstimmt. Da die Komplexe  $B(x)$  für  $|x - a| < 1$  isomorph sind, gilt dasselbe für  $|x - a| < \alpha$  für die Komplexe  $S'(x)$ . Da die Ecken von  $S'(x)$  ihre Lage stetig mit  $x$  verändern, gehen die Polyeder  $S'(x)$  für  $|x - a| < \alpha$  durch isotope Deformation ineinander über. Dasselbe gilt für die Polyeder  $S_a(x)$ ; es gilt nach Hilfssatz 5 auch für  $a - 1 < x \leq a - \varepsilon$  und  $a + \varepsilon \leq x < a + 1$  bei beliebigem  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < 1$ .

2. Da die Geltung der Fortsetzungsbedingung F für alle Ecken mit der Ziffer  $a$  vorausgesetzt wird, gehen in den Sternen dieser Ecken die Niveauflächen  $S(x)$  für  $|x - a| < 1$  durch isotope Deformation ineinander über. Die dann noch übrig bleibenden Teile von  $S(x)$ ,  $|x - a| < 1$ , liegen außerhalb der Sterne von Ecken mit der Ziffer  $a$ . Auch diese Teile sind nach Hilfssatz 5 für  $|x - a| < 1$  isotop aufeinander deformierbar.

5.3. Der Fortsetzungsbedingung F kann die folgende Fassung gegeben werden:

*Fortsetzungsbedingung F'.*

Die Voraussetzungen über  $G$  und  $E_a$  seien dieselben wie in F, vgl. 5.2. An die Stelle der in F für den Komplex  $H_a$  aufgestellten Forderung 2. trete die folgende:

Es gebe im Raum  $R_n$  eine Hyperebene, die durch  $E'_a$  geht, derart, daß die Ecken mit Ziffern größer als  $a$  auf der einen Seite und die Ecken mit Ziffern kleiner als  $a$  auf der anderen Seite der Hyperebene liegen.

Aus F' folgt F.

*Beweis.* Verschieben wir die Ecken von  $H_a$  stetig längs der Halbstrahlen durch den Punkt  $E'_a$ , so entstehen isomorphe Komplexe, die durch isotope Deformation ineinander übergehen. Die Größe dieser Verschiebungen läßt sich leicht so bestimmen, daß die  $S'(x)$  für  $|x - a| < 1$  auf parallelen Hyperebenen liegen.

5.4. Die bewiesenen Hilfssätze werden benutzt, um Aussagen über Ausdehnungsmengen zu gewinnen.

*Satz 4.*

Es sei  $G$  ein (eventuell krummes) Polyeder und  $A$  ein endliches Teilpolyeder von  $G$ . Dann besitzt  $A$  in  $G$  ein System von Ausdehnungsmengen.

*Beweis.* Es genügt, den Satz für gerade Polyeder zu beweisen, da jedes krumme Polyeder einem geraden Polyeder homöomorph ist. Nach einer baryzentrischen Unterteilung von  $G$  besitzt  $G$  die folgende Eigenschaft: Jedes

Simplex von  $G$ , dessen Ecken alle zu  $A$  gehören, ist Simplex von  $A$ . Wir beziffern die Ecken von  $A$  mit 0 und die übrigen Ecken von  $G$  mit 1. Die im Hilfssatz 5 erklärten Niveauflächen  $S(x)$  gehen für  $0 < x < 1$  durch isotope Deformation ineinander über. Wenn  $x$  gegen 1 strebt, wird  $S(x)$  auf eine Teilmenge von  $S(1)$  deformiert. Die Mengen  $S(x)$  sind Ausdehnungsmengen von  $A$  in  $G$ .

*Folgerung 1.*

$A$  sei eine algebraische Mannigfaltigkeit im Raum  $R_{2n}$  der  $n$ -komplexen Variablen.  $A$  besitzt im Raum  $R_{2n}$  ein System von Ausdehnungsmengen.

*Folgerung 2.*

$A$  sei eine analytische Mannigfaltigkeit, definiert in einer (Kugel-)Umgebung  $U$  eines Punktes des Raumes  $R_{2n}$  der  $n$ -komplexen Variablen. Dann besitzt  $A$  in  $U$  ein System von Ausdehnungsmengen.

*Beweis.* Beide Sätze beruhen auf bekannten Triangulierungssätzen: Der Raum  $R_{2n}$  bzw. die Umgebung  $U$  können so trianguliert werden, daß  $A$  ein Teilkomplex von  $R_{2n}$  bzw.  $U$  ist. Vgl. VAN DER WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, Seite 128, bzw. LEFSCHETZ-WHITEHEAD, On analytical complexes, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933).

5.5. Um auch ein Resultat im allgemeinen Fall einer abgeschlossenen Teilmenge eines Polyeders zu erhalten, benutzen wir den Satz von RUNGE, vgl. ALEXANDROFF-HOFF, Topologie, Seite 143: Es seien  $H$  ein Polyeder und  $G$  eine offene Teilmenge von  $H$ . Dann gibt es eine Simplicialzerlegung von  $G$ , die  $G$  als einen lokal endlichen Komplex definiert.

*Satz 5.*

$A$  sei eine abgeschlossene Menge des Polyeders  $H$ . Es gibt eine Menge  $B$  in  $H$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $B$  enthält  $A$ .
2.  $B$  liegt in einer vorgegebenen Umgebung von  $A$ .
3.  $B$  ist abgeschlossen in  $H$ .
4.  $B$  besitzt ein System von Ausdehnungsmengen in  $H$ .

*Beweis.* Die Punktmenge  $G = H - A$  ist in  $G$  offen und besitzt nach dem Satz von RUNGE eine Triangulierung, die sie als lokal endlichen Komplex erweist. Wir dürfen überdies voraussetzen, daß die maximale Kantenlänge der Simplexes beschränkt ist. Wir ordnen allen Ecken von  $G$ , die in der vorgegebenen Umgebung von  $A$  liegen, die Ziffer 0 und den übrigen Ecken die Ziffer 1 zu. Nun kann es sein, daß ein Simplex, dessen Ecken sämtlich die Ziffer 0 erhalten, gleichwohl nicht zur vorgegebenen Umgebung von  $A$  gehört. In diesem Falle werde es baryzentrisch unterteilt, und den neuen Ecken werde die Ziffer 1 zugeordnet. Die Vereinigungsmenge von  $A$  mit allen Simplexes, deren Ecken die Ziffer 0 haben, sei  $B$ .  $B$  liegt in der vorgegebenen Umgebung von  $A$ . Daß  $B$  abgeschlossen in  $H$  ist, folgt aus der lokalen Endlichkeit von  $G$  und der Abgeschlossenheit von  $A$ . Ein System von Ausdehnungsmengen von  $B$  in  $H$  bilden die in Hilfssatz 5 eingeführten Niveauflächen  $S(x)$ , bestimmt für den Komplex  $G$  mit der angegebenen Bezifferung der Ecken.

5.6. *Satz 6.*  $A$  sei eine abgeschlossene Teilmenge des Polyeders  $H$ . Der Komplementärraum  $G = H - A$  werde simplicial zerlegt. Es existiere eine Bezifferung der Ecken von  $G$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. Als Ziffern treten alle natürlichen Zahlen  $\geq 1$  auf.
2. Es gebe eine ganze Zahl  $N > 0$ , derart, daß in allen Ecken mit Ziffern  $\geq N$  die Fortsetzungsbedingung  $F$  erfüllt ist.

3. Zu jeder Umgebung  $U$  von  $A$  in  $H$  gebe es eine ganze Zahl  $Z(U)$ , derart, daß  $U$  alle Ecken mit Ziffern  $> Z(U)$  enthält. Dann besitzt  $A$  ein System von Ausdehnungsmengen in  $H$ .

*Beweis.* Aus Hilfssatz 6 folgt, daß die in Hilfssatz 5 erklärten Niveauflächen  $S(x)$  für  $N-1 < x < \infty$  durch isotope Deformation ineinander übergehen und daß  $S(x)$  für  $x \rightarrow N-1$  auf eine Teilmenge von  $S(N-1)$  deformiert wird. Wir setzen  $K_1 = \bigcup_{x \leq N-1} S(x)$  und  $K_r = S\left(\frac{N-1}{r}\right)$  für  $0 < r < 1$  und erhalten ein System von Ausdehnungsmengen von  $A$  in  $H$ .

5.7. Um die Anwendungsmöglichkeit der in Satz 6 gegebenen Methode zu erklären, soll an einem ebenen Beispiel — ohne Durchführung der Beweise — gezeigt werden, wie durch eine in bestimmter Weise geleitete Bezifferung der Ecken die Erfüllung der Fortsetzungsbedingung  $F'$  erzwungen werden kann.  $M$  sei eine offene und zusammenhängende ebene Punktmenge.  $M$  werde simplicial zerlegt, und die Ecken von  $M$  werden so mit Ziffern versehen, daß die folgenden Bedingungen gelten:

1. Als Ziffern treten alle ganzen Zahlen  $> 0$  auf.
2. Verschiedene Ecken tragen verschiedene Ziffern.

Wir führen an  $M$  einen Abbauprozess durch und setzen gleichzeitig die Ziffern der Ecken von  $M$  neu fest. Wir beginnen mit der Ecke  $E_1$ , welche die Ziffer 1 hat. Entfernen wir aus  $M$  den Stern von  $E_1$ , so entsteht der Komplex  $M_1$ . Ist  $M_k$ ,  $k \geq 1$ , bereits gebildet worden, so sei  $E_{k+1}$  die Ecke mit niedrigster Ziffer auf dem Rande von  $M_k$ , derart, daß  $M_k - E_{k+1}$  noch zusammenhängend ist. Der Komplex  $M_{k+1}$  entstehe aus  $M_k$  durch Weglassen des Sternes von  $E_{k+1}$ . Man zeigt dann: 1. Dann und nur dann werden alle Ecken von  $M$  durch das beschriebene Verfahren erfaßt, wenn es in  $M$  keinen geschlossenen Kantenzug gibt, der im Innern und Äußeren unendlich viele Simplexe von  $M$  enthält. 2. Wenn durch die beschriebene Methode ein vollständiger Abbau von  $M$  erreicht wird, ist die Bedingung  $F'$  in allen Ecken erfüllt.

#### Literatur.

ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I, Berlin 1935. — SEIFERT-THRELFALL: Lehrbuch der Topologie, Leipzig 1934. — VAN KAMPEN: On the fundamental group of an algebraic curve. Amer. J. Math. 55 (1933).

(Eingegangen am 22. Oktober 1951.)

## Unbedingte und bedingte Invarianten bei Gruppen und bei von Gruppen umbeschriebenen Scharen von Transformationen.

Von

C. HEINZ in Lörrach (Baden).

Die Untersuchung der aus den verallgemeinerten Dreizeigergrößen des  $n$ -dimensionalen Raumes und ihren Ableitungen beliebiger Ordnung nach den Punktkoordinaten entspringenden Invarianten hat F. KRAUSS<sup>1)</sup> auf die Betrachtung eines Teilsystems der als transformierende Variablen anzusprechenden Grundvektorableitungen beliebiger Ordnung zurückgeführt. Dieses Teilsystem ist in der Gruppe der zugelassenen („holonomen“) Koordinatentransformationen frei veränderlich und gestattet, alle Grundvektorableitungen und damit auch alle Dreizeigergrößen und ihre Ableitungen sowie alle daraus gebildeten Ausdrücke zusammen mit gewissen, eben dadurch fundamentalen, Invarianten darzustellen. Die ein solches Teilsystem bildenden „inneren Transformationsparameter“ spielen in verallgemeinerter Form auch in dieser Arbeit eine wesentliche Rolle. F. KRAUSS hat weiterhin die Invarianten bei nicht-holonomen Differentialtransformationen untersucht und für sie die Unterscheidung von „bedingter“ und „unbedingter“ Invarianz als maßgebend erkannt. Unbedingt ist die gewöhnlich betrachtete Invarianz, die nur von der Transformationsweise abhängt und daher, trotz etwaiger Änderung des Wertes der Invarianten, bestehen bleibt, wenn man die transformierenden Variablen durch kogrediente ersetzt. Bedingt soll die Invarianz heißen, wenn sie überdies Beziehungen zwischen den Gliedern der transformierenden Variablenkomplexe verlangt, die deren Werte einschränken<sup>2)</sup>.

F. KRAUSS zeigte, wie man auf allgemeine Weise mittels der inneren Transformationsparameter beliebige Differentialausdrücke zu nichtholonomen Invarianten erweitern könne, und wie dabei die zugehörigen Bedingungen in holonom-invarianter Form sich zwangsläufig ergeben. Er bewies ferner, daß es nicht-holonom und unbedingt-invariante Ausdrücke aus den Grundvektorableitungen erster und zweiter Ordnung nicht gäbe und vermutete, daß dies auch für alle höheren Ordnungen gelten würde und daß die holonom-invariante Symmetrie der Dreizeigergrößen die einzige notwendige und hinreichende Bedingung sei.

In meiner hier anknüpfenden Aachener Dissertation<sup>3)</sup> habe ich jenen Unmöglichkeitssatz mit weitläufigen und ad hoc angestellten kombinatorischen

<sup>1)</sup> F. KRAUSS: Differentialinvarianten, ausgezeichnete Feldgrößen und Vektorübertragung. Math. Ann. 1927, S. 688—718, Berlin.

<sup>2)</sup> Vgl. I. SCHÜTZ: Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie: Göttinger Nachr. 1897, oder F. KLEIN: Vorlesung über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Bd. II, S. 158, Berlin 1927. Dort wird darauf hingewiesen, daß beim elastischen Stoß die Änderung der kinetischen Energie bei den Galilei-Transformationen der Geschwindigkeiten nur bedingt-invariant verschwindet und daß die Bedingung die Erhaltung des Impulses ist.

<sup>3)</sup> C. HEINZ: Bedingte und unbedingte Differentialinvarianten des allgemeinen Basenfeldes. Dissertation Aachen, 1943.

Betrachtungen zuerst allgemein bewiesen. In der nachstehenden Arbeit werden nun diese Fragen auf ihre gruppentheoretischen Grundlagen zurückgeführt. Es ergeben sich Begriffe und Sätze, die unabhängig von ihrer Anwendung auf die differentialgeometrischen Ausgangsprobleme, die ich in einer weiteren Arbeit bringen werde, Interesse verdienen könnten. Als Inhaltsangabe kurz formuliert, handelt es sich um folgendes:

### 1. Grundbegriffe, Definitionen.

#### 2. Unbedingte Invarianten.

*Satz 1 (Hauptsatz):* Konstruktion des vollständigen Systems der unbedingten Invarianten einer Transformationengruppe.

*Korollar zu Satz 1:* Eineindeutige Zuordnung der Gruppen und vollständigen Systeme unbedingter Invarianten.

*Satz 2 bzw. Satz 3:* Besondere Stellung der Gruppen gegenüber beliebigen Transformationssystemen bzw. der vollständigen Systeme unbedingter Invarianten von Gruppen gegenüber beliebigen Funktionensystemen nach invariantentheoretischen Eigenschaften. Konstruktion des vollständigen Systems der unbedingten Invarianten von Transformationssystemen ohne Gruppencharakter durch Konstruktion einer gewissen Gruppe mit demselben Invariantensystem.

*Satz 4 bzw. Satz 5:* Invariantensystem des Durchschnittes (größter gemeinschaftlicher Teiler) bzw. des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Gruppen.

*Satz 6:* Das vollständige System der unbedingten Invarianten des „größten rechtsseitigen Teilers“ eines beliebigen Transformationensystems.

#### 3. Bedingte Invarianten.

*Satz 7:* Bedingte Invarianten von Transformationengruppen. Bei Gruppen bringt der Begriff der bedingten Invarianz keine Erweiterung des Invariantensystems.

*Satz 8:* Analogon zu der Gruppe hinsichtlich des vollständigen Systems der bedingten Invarianten („vollständige Transformationensysteme der Bedingtheit“). Zurückführung des vollständigen Systems der bedingten Invarianten eines vollständigen Transformationensystems der Bedingtheit auf das vollständige System der unbedingten Invarianten einer Gruppe, nämlich des größten rechtsseitigen Teilers.

*Korollar zu Satz 8:* Analogon zum Korollar zu Satz 1.

*Satz 9:* Reduktionssatz für die Invarianzbedingungen.

*Satz 10 bzw. Satz 11:* Analoga zu den Sätzen 2 bzw. 3.

*Satz 12:* Hilfssatz zur Konstruktion des vollständigen Systems der bedingten Invarianten eines beliebigen Transformationensystems durch Konstruktion eines gewissen vollständigen Transformationensystems der Bedingtheit.

### 1. Grundbegriffe, Definitionen: Invarianten und innere Transformationsparameter

Ein Transformationensystem  $\mathfrak{T}$  ist definiert durch  $n$  Gleichungen, die mit Hilfe von  $p$  Parametern  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  die  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  in  $n$  neue Variable  $y_1, \dots, y_n$  überführen:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_p),$$

wofür wir abgekürzt

$$(1) \quad y = f(x; \alpha)$$

schreiben wollen, indem wir unter  $x, y, \alpha$  die Komplexe  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  verstehen. Die Funktionen  $f_i$  sowie alle noch vorkommenden Funktionen setzen wir als hinreichend oft differenzierbar voraus. Ein Transformationensystem kann eine Gruppe oder eine Schar sein. Letztere Bezeichnung soll den Gruppencharakter ausschließen.

Eine spezielle Transformation  $T$  von  $\mathfrak{Z}$  bezeichnen wir durch  $y = T(x)$ , wobei wir durch Indizes an  $T$  etwaige Besonderheiten andeuten.

Wir setzen voraus, daß  $\mathfrak{Z}$  genau wie alle Transformationensysteme, die wir betrachten werden, die identische Transformation enthalte, d. h. es gebe einen Parameterkomplex  $\alpha = \delta$ , für den

$$x = f(x; \delta)$$

ist. Im Falle einer Gruppe versteht sich das von selbst.

Die  $y$  sind Funktionen der zwei Reihen von Veränderlichen  $x$  und  $\alpha$ . Wir wollen die Änderung der  $y$  bzw. eines Ausdruckes in den  $y$  bei festem  $x$  und Änderung der  $\alpha$  „Varianz“ nennen. Ist  $F(y)$  invariant bei  $\mathfrak{Z}$ , so müssen sich also in

$$F(y) = F(f(x; \alpha))$$

die  $\alpha$  zerstören, woraus wegen der Existenz der identischen Transformation für die rechte Seite wieder  $F(x)$  folgt. Zerstören sich die  $\alpha$  unabhängig von der Wahl der  $x$ , d. h. genauer: fallen die  $\alpha$  für ein gewisses  $x$  heraus und ändert sich daran nichts, wenn wir die  $x$  innerhalb eines gewissen  $n$ -dimensionalen Bereichs  $\mathfrak{B}_n$  unabhängig voneinander ändern, so nennen wir  $F$  eine unbedingte Invariante; zerstören sich die  $\alpha$ , wenn wir die Variabilität der  $x$  auf einen durch Bedingungen  $B(x) = 0$  ausgesonderten Teilbereich von  $\mathfrak{B}_n$  beschränken, so nennen wir  $F$  eine bedingte Invariante.

Als ein Funktionensystem  $\{S(x)\}$  bezeichnen wir eine (unendliche) Menge von Funktionen der  $x$ , wenn sich jede Funktion von  $\{S\}$  als Funktion einiger (endlich vieler) voneinander unabhängiger Funktionen  $S(x)$  von  $\{S\}$  ausdrücken läßt und andererseits auch jede Funktion von  $\{S\}$  auf diese Weise darstellbar ist. Die Funktionen  $S$  nennen wir eine Basis von  $\{S\}$ . Die Gesamtheit der bei  $\mathfrak{Z}$  unbedingt invarianten Funktionen bildet ein Funktionensystem, nämlich das zu  $\mathfrak{Z}$  gehörige System aller unbedingt oder bedingt invarianten Funktionen. Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten ist endlich (höchstens gleich  $n$ ), und jede Funktion der Invarianten ist wieder invariant. Bei invariantentheoretischen Betrachtungen haben wir also immer Funktionensysteme zu untersuchen. Wir werden deshalb statt  $\{S\}$  einfach die Basis  $S$  schreiben, falls eine Verwechslung nicht zu befürchten ist.

Es liegt nahe, Invarianten bei (1) durch Elimination der  $\alpha$  zu bilden. Der Rang der Matrix  $\frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha}$  ist eine Funktion der  $x$  und  $\alpha$ . Der höchste Wert, den dieser Rang bei Änderung von  $x$  und  $\alpha$  annimmt, sei  $r$ . Um ein Wertsystem  $x, \alpha$ , in dem dieser Rang  $r$  erreicht wird, läßt sich stets eine  $n$ -dimensionale Umgebung  $\mathfrak{B}_n$  der  $x$  und eine  $p$ -dimensionale Umgebung  $\mathfrak{U}_p$  der  $\alpha$  angeben, und es lassen sich die  $x, y$  und  $\alpha$  so numerieren, daß in dem  $(n+p)$ -dimensionalen Bereich  $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{U}_p)$  der  $x$  und  $\alpha$  die Determinante  $\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\alpha}} \right|$  mit  $\bar{f} = (f_1, \dots, f_r)$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$

nirgendwo verschwindet. In  $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{U}_p)$  können wir dann die  $f$  nach den  $\tilde{\alpha}$  auflösen und erhalten

$$(2) \quad \tilde{\alpha} = \tilde{\varphi}(x; \tilde{y}, \tilde{\alpha})$$

mit  $\tilde{\alpha} = (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_p)$ . Die übrigen  $y$ , d. h.  $\tilde{y} = (y_{r+1}, \dots, y_n)$  drücken sich wegen des Ranges  $r$  von  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  in dem Bereich  $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{U}_p)$  durch die  $\tilde{y}$  und  $x$  unabhängig von den  $\tilde{\alpha}$  aus, so daß, wenn wir (2) in die  $\tilde{f}$  einsetzen,

$$(3) \quad \tilde{y} = \tilde{\psi}(x; \tilde{y})$$

folgen muß, wo die  $\tilde{\psi}(x; \tilde{y})$  keinerlei  $\alpha$  mehr enthalten. Diese Gleichungen stellen die Gesamtheit der bei den Transformationen von  $\mathfrak{I}$  in dem Bereich  $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{U}_p)$  gültigen  $(x, y)$ -Beziehungen dar. Denn für jedes Wertsystem  $x, y$ , das (3) genügt, läßt sich nach (2) bei beliebigem  $\tilde{\alpha}$  ein  $\tilde{\alpha}$  angeben, so daß  $y$  durch diese  $\alpha$  aus  $x$  in  $\mathfrak{I}$  transformiert wird, während, wenn  $x, y$  (3) nicht genügt, dies nicht möglich ist. Der Varianzbereich der  $y$  ist also, da in (3) dabei die  $x$  festzuhalten sind, ein  $r$ -dimensionaler Bereich  $\mathfrak{B}_r$ , und in  $\mathfrak{B}_r$  sind die  $\tilde{y}$  frei variant. Die  $\tilde{y}$  nennen wir die „inneren Parameter“ von  $\mathfrak{I}$ . Sie sind ein Teilsystem der transformierten Größen und bei gewissen differentialgeometrischen Anwendungen geeignet, das Koordinatensystem der  $y$  nur durch innere Differentialeigenschaften der Koordinatenlinien ohne Bezugnahme auf das Koordinatensystem der  $x$  zu charakterisieren.

Der Varianzbereich  $\mathfrak{B}$ , der  $y$  ist nicht eindeutig auf  $\mathfrak{U}_p$  bezogen. Dazu müssen wir erst die  $\tilde{\alpha}$  irgendwie (natürlich nicht im Widerspruch zu  $\mathfrak{U}_p$ ) fixieren. Dadurch entsteht ein Varianzbereich  $\mathfrak{U}$ , der  $\alpha$ , der auf  $\mathfrak{B}$ , eindeutig bezogen ist. Da die Invarianz einer Funktion nur eine spezielle  $(x, y)$ -Relation ist, hat die Fixierung der  $\tilde{\alpha}$  auf die Möglichkeit der Invariantenbildung keinen Einfluß.

Ein Untersystem  $\mathfrak{I}^1$  von  $\mathfrak{I}$  denken wir uns immer durch Beziehungen  $h(\alpha) = 0$  für die Transformationsparameter definiert. Wir können uns in (1) die  $\alpha$  durch ein bei  $h(\alpha) = 0$  frei variantes Teilsystem  $\alpha^1$  derselben ausgedrückt denken und dieselben Betrachtungen für die so entstehenden Funktionen  $y = f^1(x; \alpha^1)$  durchführen. Bei fixierten  $\tilde{\alpha}$  legen die Bedingungen  $h(\alpha) = 0$  den  $\tilde{\alpha}$  Bedingungen  $h'(\tilde{\alpha}) = 0$  auf, durch die aus  $\mathfrak{U}$ , ein Teilbereich  $\mathfrak{U}_1$  ausgesondert wird. Die restlichen, über  $h'(\tilde{\alpha}) = 0$  hinausgehenden Bedingungen sind für die  $(x, y)$ -Beziehungen, also auch für die Invarianzeigenschaften unwesentlich; wir denken sie uns fortgelassen. Der Teilbereich  $\mathfrak{U}_1$  ist bei festen  $x$  eindeutig auf einen Teilbereich  $\mathfrak{B}_1$  von  $\mathfrak{B}$ , bezogen, und dies ist der Varianzbereich der  $y$  bei  $\mathfrak{I}^1$ , in dem die inneren Parameter von  $\mathfrak{I}^1$  frei variant sind. Es folgt aus  $h'(\tilde{\alpha}) = 0$

$$(2^1) \quad \tilde{\alpha}^1 = \tilde{\varphi}^1(x; \tilde{y}^1, \tilde{\alpha})$$

mit denselben  $\tilde{\alpha}$  wie in (2). Entsprechend ist

$$(3^1) \quad \tilde{y}^1 = \tilde{\psi}^1(x; \tilde{y}^1)$$

mit den bei  $\mathfrak{I}^1$  frei varianten  $\tilde{y}^1$ .

Genau so, wie sich in der Invarianten  $F(y)$  von  $\mathfrak{I}$  die  $\alpha$  zerstören müssen, müssen sich auch in

$$F(y) = F(\tilde{y}, \tilde{\psi}(x; \tilde{y}))$$



die  $\bar{y}$  wegen ihrer freien Varianz und der Invarianz von  $F$  zerstören, und zwar bei beliebiger Wahl der  $x$  in  $\mathfrak{B}_n$ , wenn  $F$  unbedingt invariant und bei Wahl der  $x$  in dem durch  $B(x) = 0$  ausgesonderten Teilbereich, wenn  $F$  bedingt invariant sein soll.

## 2. Unbedingte Invarianten.

In diesem Abschnitt soll es sich stets um unbedingte Invarianten handeln, auch wenn dies nicht ausdrücklich vermerkt ist.

Von jetzt an nehmen wir an, daß unser durch (1) definiertes Transformationensystem (Hauptsystem)  $\mathfrak{T}$  eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  sei. Für eine Untergruppe  $\mathfrak{G}^1$  von  $\mathfrak{G}$  gelten genau dieselben Betrachtungen und Ergebnisse, die wir jetzt für  $\mathfrak{G}$  ableiten wollen.

Es sei  $x$  ein Wertsystem aus  $\mathfrak{B}_n$ ,  $z = T_\beta(x)$  sei eine Transformation aus  $\mathfrak{G}$ , wobei die  $\beta$  dem Bereich  $\mathfrak{U}_p$  angehören sollen, so daß entsprechend (3)

$$\bar{z} = \tilde{\psi}(x; \bar{z})$$

ist. Ist  $y = T_\alpha(x)$  eine weitere Transformation aus  $\mathfrak{G}$ , so ist wegen des Gruppencharakters auch die Transformation  $z = T_\beta T_\alpha^{-1}(y) = T_\gamma(y)$  in  $\mathfrak{G}$  enthalten, und es muß auch

$$\bar{z} = \tilde{\psi}(y; \bar{z})$$

sein. Wir haben also

$$\tilde{\psi}(y; \bar{z}) = \tilde{\psi}(x; \bar{z}).$$

Dies gilt für alle  $x$  aus  $\mathfrak{B}_n$ , für alle  $\bar{z}$  aus  $\mathfrak{B}_r$  und für alle Transformationen  $y = T_\alpha(x)$  aus  $\mathfrak{G}$ . Die  $\tilde{\psi}(x; \bar{z})$  sind also bei beliebiger Wahl der  $\bar{z}$  in diesen Bereichen unbedingte Invarianten.

Von den  $n - r$  Funktionen  $\tilde{\psi}(x; \bar{z})$ , als Funktionen der  $x$  betrachtet, seien  $m - r$  ( $m \leq n$ ) voneinander unabhängig. Dann gäbe es genau  $n - m$  Relationen zwischen den  $z$ , die durch  $z = f(x; \beta)$  identisch in  $x$  und  $\beta$  erfüllt würden. Die Funktionen  $z = f(x; \beta)$  können wir aber als unabhängig voneinander annehmen, denn aus dem Gruppencharakter schließen wir leicht, daß sich etwaige in  $x$  und  $\beta$  identisch erfüllte Beziehungen zwischen den  $z$  auch auf jeden weiteren aus  $z$  transformierten Variablenkomplex übertragen müssen, so daß wir tatsächlich eine Gruppe in weniger als  $n$  Variablen hätten.

Wir erteilen den  $\bar{z}$  irgendwelche festen Werte  $\bar{c}$  aus  $\mathfrak{B}_r$ . Die Funktionen  $\tilde{\psi}(x; \bar{z})$  werden dadurch zu

$$\tilde{\psi}(x; \bar{c}) = \tilde{J}(x).$$

Wir haben somit  $n - r$  voneinander unabhängige unbedingte Invarianten bei  $\mathfrak{G}$  gewonnen.

Ist insbesondere  $y = T_\alpha(x)$  eine Transformation aus  $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{U}_p)$ , so müssen die  $n - r$  voneinander unabhängigen  $(x, y)$ -Relationen

$$(4) \quad \tilde{J}(y) = \tilde{J}(x)$$

den  $n - r$  voneinander unabhängigen  $(x, y)$ -Relationen (3) äquivalent sein.  $\tilde{J}(y) = \tilde{J}(x)$  muß sich also nach den  $\tilde{y}$  auflösen lassen, und es folgt

$$(5) \quad \tilde{y} = \tilde{\varphi}(\tilde{J}(x); \tilde{y}).$$

Dies ist gleichbedeutend mit (3).



Ist  $F$  irgendeine unbedingte Invariante, so gilt, da sich die frei varianten  $\bar{y}$  zerstören müssen,

$$F(y) = F(\bar{y}, \tilde{\varphi}(\tilde{J}(x); \bar{y})) = \Phi(\tilde{J}(x)).$$

Die  $\tilde{J}(x)$  bilden also eine Basis des vollständigen Systems der unbedingten Invarianten von  $\mathcal{G}$ .

Wir haben somit den

**Satz 1 (Hauptsatz):** Ist durch  $y = f(x; \alpha)$  eine Transformationsgruppe  $\mathcal{G}$  gegeben und eliminiert man aus  $y = f(x; \alpha)$  die äußeren Parameter  $\alpha$ , so daß man die  $y$  als Funktionen der  $x$  und eines frei varianten Teilkomplexes  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$  der  $y$  dargestellt erhält, so treten in dieser Darstellung (3) bzw. (5) die  $x$  zu genau  $n - r$  voneinander unabhängigen Funktionen verbunden auf, die eine Basis des vollständigen Systems der unbedingten Invarianten von  $\mathcal{G}$  bilden. Man gewinnt eine Basis, indem man den  $\bar{y}$  in (3) irgendwelche feste spezielle Werte  $\bar{c}$  aus  $\mathfrak{B}$ , erteilt. Die Gesamtheit der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathcal{G}$  ist durch die Invarianzbeziehungen (4) vollständig beschrieben in dem Sinne, daß (4) äquivalent zu (3) ist.

Zu Satz 1 fügen wir noch eine die Untergruppen betreffende Ergänzung an.

**Korollar zu Satz 1:** Ist  $\mathcal{G}^1$  eine Untergruppe von  $\mathcal{G}$ , und  $\mathcal{G}^2$  eine Untergruppe von  $\mathcal{G}^1$ , und ist  $\tilde{J}^1(x)$  bzw.  $\tilde{J}^2(x)$  das vollständige System der unbedingten Invarianten von  $\mathcal{G}^1$  bzw.  $\mathcal{G}^2$ , so folgt aus  $\mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2$  für diese Invariantensysteme  $\tilde{J}^1 \subset \tilde{J}^2$ .  $\mathcal{G}^1$  ist die Gesamtheit der Transformationen aus  $\mathcal{G}$ , die  $\tilde{J}^1$  unbedingt invariant lassen, und die  $(x, y)$ -Relationen  $\tilde{J}^1(y) = \tilde{J}^1(x)$  sind äquivalent den Beziehungen zwischen den äußeren Parametern  $\alpha$ , die  $\mathcal{G}^1$  als Untergruppe von  $\mathcal{G}$  definieren.

Denn in  $\mathcal{G}^2$  ist die Varianz der  $y$  gegenüber  $\mathcal{G}^1$  eingeschränkt, da nach Fixierung der  $\tilde{\alpha}$  die frei varianten inneren Parameter auf die durch ein System der  $\alpha$  bestimmten Transformationen eineindeutig bezogen sind. Es sind deshalb in  $\mathcal{G}^2$  mehr  $(x, y)$ -Relationen als in  $\mathcal{G}^1$  erfüllt, und demnach gibt es in  $\mathcal{G}^2$  auch mehr Invarianten. Also ist  $\tilde{J}^1 \subset \tilde{J}^2$ . Wären die  $\tilde{\alpha}$  nicht fixiert, so könnten wir aus  $\mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2$  nur  $\tilde{J}^1 \subseteq \tilde{J}^2$  schließen. Gerade um das Gleichheitszeichen auszuschließen, ist es vorteilhaft, die  $\tilde{\alpha}$  zu fixieren.

Gilt für eine Transformation  $y = T_\alpha(x)$  für alle  $x$  aus  $\mathfrak{B}_\alpha$ :  $\tilde{J}^1(y) = \tilde{J}^1(x)$ , so folgt, wenn  $z = T_\beta(x)$  eine Transformation aus  $\mathcal{G}^1$  ist, für die also mit den bei  $\mathcal{G}^1$  frei varianten  $\bar{z}^1 \bar{z}^1 = \tilde{\varphi}^1(\tilde{J}^1(x), \bar{z}^1)$  gilt, auch  $\bar{z}^1 = \tilde{\varphi}^1(\tilde{J}^1(y), \bar{z}^1)$ , so daß auch  $z = T_\gamma(y)$  eine Transformation aus  $\mathcal{G}^1$  ist. Dann ist aber auch  $y = T_\alpha(x)$  eine Transformation aus  $\mathcal{G}^1$ . Es folgt also aus  $\tilde{J}^1(y) = \tilde{J}^1(x)$ , daß  $y = T_\alpha(x)$  eine Transformation von  $\mathcal{G}^1$  ist, d. h. für  $\alpha$  sind die Parameterbeziehungen von  $\mathcal{G}^1$  für alle  $x$  erfüllt, und umgekehrt folgt aus diesen Parameterbeziehungen in Verbindung mit (1) auch  $\tilde{J}^1(y) = \tilde{J}^1(x)$ . Daraus ergibt sich, daß  $\mathcal{G}^1$  die Gesamtheit der Transformationen ist, die  $\tilde{J}^1$  unbedingt invariant lassen.

Es folgen nun zwei Sätze, die die besondere Stellung der Gruppen innerhalb der Transformationensysteme hervorheben. Wir wollen sie beide zunächst aussprechen und dann beweisen.  $\mathfrak{X}^1, \mathcal{G}^1$  usw. seien hier, wie stets im folgenden, in  $\mathcal{G}$  enthaltene Transformationensysteme bzw. Gruppen.

Es gilt:

**Satz 2 (1. Vollständigkeitssatz):** Die Gesamtheit  $\mathfrak{X}^1(S^1)$  der Transformationen aus  $\mathcal{G}$ , die ein Funktionensystem  $S^1(x)$  unbedingt invariant lassen, ist

eine Gruppe  $\mathcal{G}^1$ . Das vollständige System der unbedingten Invarianten  $\tilde{J}^1$  von  $\mathcal{G}^1$  ist das kleinste  $S^1$  umfassende vollständige System der unbedingten Invarianten einer Gruppe.

Dazu reziprok ist der

**Satz 3 (2. Vollständigkeitssatz):** Das vollständige System der unbedingten Invarianten  $S^2(\mathfrak{T}^2)$  bei einem Transformationensystem  $\mathfrak{T}^2$  ist identisch mit dem vollständigen System der unbedingten Invarianten  $\tilde{J}^2$  einer Gruppe  $\mathcal{G}^2$ .  $\mathcal{G}^2$  ist die kleinste  $\mathfrak{T}^2$  umschriebene Gruppe.

Die Termini „vollständig“ und „Gesamtheit“ besagen im wesentlichen dasselbe (das vollständige Invariantensystem ist ja die Gesamtheit der Invarianten). Wir haben durch diese beiden Sätze die Zuordnungen:

$$(\text{Satz 2}) \quad S^1 \rightarrow \mathfrak{T}^1(S^1) = \mathcal{G}^1(S^1), \quad \tilde{J}^1 \supseteq S^1$$

$$(\text{Satz 3}) \quad \mathfrak{T}^2 \rightarrow S^2(\mathfrak{T}^2) = \tilde{J}^2(\mathfrak{T}^2), \quad \mathcal{G}^2 \supseteq \mathfrak{T}^2.$$

Der Buchstabe  $J$  für Funktionensysteme ist hier für die vollständigen Invariantensysteme von Gruppen vorbehalten. Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle von Gruppen. Kurz können wir das Wesentliche der beiden Sätze folgendermaßen formulieren:

Vollständige Systeme von Transformationen bzw. von Invarianten, die in der oben definierten Weise irgendwelchen Systemen von Funktionen bzw. Transformationen zugeordnet sind, sind immer Gruppen bzw. vollständige Invariantensysteme von Gruppen. Gruppen können wir also auch als „vollständige Transformationensysteme“ definieren, genauer: „vollständige Transformationensysteme der Unbedingtheit“, da die Funktionensysteme unbedingt invariant sein sollen.

**Beweis von Satz 2:** Es seien  $y = T_\alpha(x)$  und  $z = T_\beta(x)$  zwei Transformationen aus  $\mathcal{G}$ , die  $S^1$  unbedingt invariant lassen, d. h. die Invarianz gelte für alle  $x$  aus  $\mathfrak{B}_n$ . Wegen der Gruppeneigenschaft von  $\mathcal{G}$  ist auch  $z = T_\beta T_\alpha^{-1}(y) = T_\gamma(y)$  in  $\mathcal{G}$  enthalten. Da für alle  $x$  vermöge  $T_\alpha S^1(x) \equiv S^1(y)$  und vermöge  $T_\beta S^1(x) \equiv S^1(z)$  ist, folgt für  $T_\gamma$ :  $S^1(y) = S^1(z)$ . Variieren wir  $y$  in  $\mathfrak{B}_r$  bei festgehaltenen  $\alpha, \beta$  und damit  $\gamma$ , so variiert  $z$  in  $\mathfrak{B}_n$ . Die Invarianzbeziehungen  $S^1(x) = S^1(y)$  und  $S^1(x) = S^1(z)$  bleiben dabei erhalten und damit auch  $S^1(y) = S^1(z)$ .  $T_\gamma$  läßt also  $S^1$  unbedingt invariant. Damit ist  $\mathfrak{T}^1(S^1) = \mathcal{G}^1(S^1)$  bewiesen.

In  $\mathcal{G}^1$  sind neben  $S^1$  möglicherweise noch andere Funktionen unbedingt invariant, so daß das vollständige Invariantensystem  $\tilde{J}^1$  von  $\mathcal{G}^1$   $\tilde{J}^1 \supseteq S^1$  ist. Ist  $\mathcal{G}^*$  irgendeine Gruppe, deren vollständiges Invariantensystem  $\tilde{J}^*$   $\tilde{J}^* \supseteq S^1$  ist, so gilt für  $\mathcal{G}^1$  als der Gesamtheit der Transformationen mit dieser Eigenschaft  $\mathcal{G}^1 \supseteq \mathcal{G}^*$  und damit nach dem Korollar zu Satz 1  $\tilde{J}^1 \subseteq \tilde{J}^*$ . Die Relationen

$$S^1 \subseteq \tilde{J}^1 \subseteq \tilde{J}^*$$

besagen, daß im Falle  $S^1 \subset \tilde{J}^1$   $\tilde{J}^1$  das kleinste  $S^1$  umfassende vollständige Invariantensystem einer Gruppe ist. Der Fall  $S^1 = \tilde{J}^1$  ist schon im Korollar zu Satz 1 enthalten.

Wir finden  $\mathcal{G}^1$ , indem wir mit den Basisfunktionen von  $S^1$  die Gleichungen

$$S^1(f(x; \alpha)) = S^1(x)$$

bilden. Diese stellen für jedes Wertsystem  $x$  ein System von Bedingungengleichungen für die  $\alpha$  dar. Die  $\alpha$ , die allen diesen Gleichungen für alle  $x$  genügen (zumindest ist das  $\alpha = \delta$ , so daß sich diese Gleichungen nicht widersprechen), charakterisieren die Gesamtheit der Transformationen, die  $S^1$  unbedingt invariant lassen, also  $\mathfrak{G}^1$ .

Beweis von Satz 3:  $S^2$  sei das vollständige System der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{T}^2$ .  $\mathfrak{G}^*$  sei die Gesamtheit der Transformationen aus  $\mathfrak{G}$ , die  $S^2$  unbedingt invariant lassen und die nach Satz 2 eine Gruppe ist. Das vollständige System der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^*$  sei  $\tilde{J}^*$ . Da  $\mathfrak{T}^2$  und  $\mathfrak{G}^*$  beide  $S^2$  unbedingt invariant lassen und  $\mathfrak{G}^*$  die Gesamtheit der Transformation mit dieser Eigenschaft ist, ist sicher  $\mathfrak{G}^* \supseteq \mathfrak{T}^2$ , woraus  $\tilde{J}^* \subseteq S^2$  folgt. Nach Satz 2 gilt aber  $\tilde{J}^* \supseteq S^2$ , so daß  $\tilde{J}^* = S^2$  folgt. Es ist also mit der Bezeichnung des Satzes  $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^2$  und  $\tilde{J}^* = J^2$ .

Ist  $\mathfrak{G}'$  irgendeine  $\mathfrak{T}^2$  umschriebene Gruppe, so ist deren vollständiges Invariantsystem  $\tilde{J}' \subseteq S^2 = \tilde{J}^2$ . Daraus folgt  $\mathfrak{G}' \supseteq \mathfrak{G}^2$ . Da  $\mathfrak{G}^2$  selber  $\mathfrak{T}^2$  umschrieben ist, ist  $\mathfrak{G}^2$  also die kleinste  $\mathfrak{T}^2$  umschriebene Gruppe. Ist  $\mathfrak{T}^2$  selber eine Gruppe, so ist selbstverständlich  $\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{G}^2$ .

Man findet  $\mathfrak{G}^2$ , indem man zunächst die Gesamtheit  $\mathfrak{T}'$  der Transformationen bildet, die durch mehrmalige — etwa zweimalige — Aufeinanderfolge irgendwelcher Transformationen aus  $\mathfrak{T}^2$  entstehen. Wir schreiben:  $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{T}^2$ . Es ist sicher  $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{T}^2$ , wo das Gleichheitszeichen nur dann steht, wenn  $\mathfrak{T}^2$  eine Gruppe ist. Andererseits ist  $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{G}^2$ , da alle Transformationen von  $\mathfrak{T}^2$  auch Transformationen von  $\mathfrak{G}^2$  sind. Wir wiederholen diesen „Multiplikationsprozeß“ sukzessive, bilden also die Kette

$$\mathfrak{T}^2 \subseteq \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{T}^2 \subseteq \mathfrak{G}^2$$

$$\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}'' = \mathfrak{T}' \cdot \mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{G}^2$$

$$\mathfrak{T}'' \subseteq \mathfrak{T}''' = \mathfrak{T}'' \cdot \mathfrak{T}'' \subseteq \mathfrak{G}^2$$

$$\dots \dots \dots$$

Im wesentlichen bilden wir also die „Potenzen“ von  $\mathfrak{T}^2$ .

Daß das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu  $\mathfrak{G}^2$  führt, erkennt man am besten mittels der von S. LIE eingeführten Parametergruppe  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{G}$ , die sich auch zur praktischen Konstruktion von  $\mathfrak{G}^2$  gut eignet: Sind  $T_\alpha$  und  $T_\beta$  zwei Transformationen aus  $\mathfrak{G}$ , so sind die Parameter  $\gamma$  der zusammengesetzten Transformation  $T_\gamma = T_\beta T_\alpha$  eindeutig durch die  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt:

$$(6) \quad \gamma = \chi(\beta; \alpha).$$

Faßt man diese Gleichungen als Transformationsgleichungen der  $\beta$  in die  $\gamma$  mit Hilfe der Parameter  $\alpha$  auf, so erkennt man leicht, daß sie eine Gruppe, eben die Parametergruppe  $\mathfrak{P}$ , bestimmen. Drücken wir in (6)  $\beta$  und  $\alpha$  durch die vermöge der  $\alpha$ -Beziehungen  $h(\alpha) = 0$  von  $\mathfrak{T}^2$  frei varianten  $\bar{\alpha}^1$  und  $\bar{\beta}^1$  aus, so sind die Parameter  $\gamma$  von  $T_\beta T_\alpha$  durch

$$\gamma = \chi^1(\bar{\beta}^1; \bar{\alpha}^1)$$

gegeben. Die Parameterbeziehungen von  $\mathfrak{T}'$  finden wir durch Elimination von  $\bar{\beta}^1$ ,  $\bar{\alpha}^1$  aus diesen Gleichungen in der Form  $h'(\gamma) = 0$ . Im Falle einer Gruppe ist  $h'(\gamma) = 0$  äquivalent zu  $h(\gamma) = 0$ . Ist aber  $\mathfrak{T}^2$  eine Transformationenschar,

so ist  $\mathfrak{T}' \supset \mathfrak{T}^2$ , und die Beziehungen  $h'(\alpha) = 0$  schränken die  $\alpha$  weniger ein als  $h(\alpha) = 0$ . Es besteht also  $h'(\alpha) = 0$  aus weniger voneinander unabhängigen Gleichungen für die  $\alpha$  als  $h(\alpha) = 0$ . Da die Anzahl der voneinander unabhängigen Gleichungen  $h(\alpha) = 0$  jedenfalls endlich ist, muß das Verfahren einmal abbrechen, sei es, daß die  $\alpha$  überhaupt frei variant werden, dann ist  $\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}$ , sei es, daß sich die  $\alpha$ -Beziehungen reproduzieren, wodurch dann  $\mathfrak{G}^2$  gegeben ist.

Hiermit sind wir in der Lage, das vollständige Invariantensystem von  $\mathfrak{T}^2$  durch Konstruktion der Gruppe  $\mathfrak{G}^2$  und dann gemäß Satz 1 zu konstruieren.

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (k.g.V.)  $S^3 = S^1 \cup S^2$  zweier Funktionensysteme  $S^1$  und  $S^2$  werde das kleinste Funktionensystem verstanden, dessen Basis sowohl eine Basis von  $S^1$  als auch von  $S^2$  enthält. Es gilt dann

*Satz 4:* Der Durchschnitt  $\mathfrak{G}^3 = \mathfrak{G}^1 \cap \mathfrak{G}^2$  (größter gemeinschaftlicher Teiler) zweier Gruppen  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  ist eine Gruppe, deren vollständiges System der unbedingten Invarianten das k.g.V. der vollständigen Systeme der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  ist.

Daß  $\mathfrak{G}^3$  eine Gruppe ist, brauchen wir hier nicht erst zu beweisen. Es ist  $\mathfrak{G}^1 \supseteq \mathfrak{G}^3$  und  $\mathfrak{G}^2 \supseteq \mathfrak{G}^3$ , also nach der Anmerkung zu Satz 1  $\tilde{J}^1 \subseteq \tilde{J}^3$  und  $\tilde{J}^2 \subseteq \tilde{J}^3$ . Es ist dann auch  $\tilde{J}^1 \cup \tilde{J}^2 \subseteq \tilde{J}^3$ . Jedes  $y$ , das sowohl in  $\mathfrak{G}^1$  als auch in  $\mathfrak{G}^2$  aus  $x$  transformiert werden kann, genügt simultan den Gleichungen

$$(7) \quad \tilde{J}^1(y) = \tilde{J}^1(x); \quad \tilde{J}^2(y) = \tilde{J}^2(x),$$

und da nach Satz 1 die Gesamtheit der Invarianzbeziehungen einer Gruppe der Gesamtheit ihrer  $(x, y)$ -Relationen äquivalent ist, kann auch jedes  $y$ , das bei gegebenem  $x$  diesen Gleichungen simultan genügt, sowohl in  $\mathfrak{G}^1$  als auch in  $\mathfrak{G}^2$ , also auch in  $\mathfrak{G}^3$  aus  $x$  transformiert werden. (7) stellt also die Gesamtheit der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{G}^3$  dar. In der Darstellung der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{G}^3$  durch innere Parameter treten also die  $x$  nur in den Funktionen  $\tilde{J}^1(x)$ ,  $\tilde{J}^2(x)$  auf, so daß  $\tilde{J}^3 \subseteq \tilde{J}^1 \cup \tilde{J}^2$ . Mit der obigen Ungleichung folgt also  $\tilde{J}^3 = \tilde{J}^1 \cup \tilde{J}^2$ .

Das k.g.V.  $\mathfrak{G}^4$  zweier Gruppen  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  ist die kleinste Gruppe, die sowohl  $\mathfrak{G}^1$  als auch  $\mathfrak{G}^2$  als Untergruppen enthält. Sie kann auch als Durchschnitt aller dieser Gruppen definiert werden. Es gilt

*Satz 5:* Das k.g.V.  $\mathfrak{G}^4$  zweier Gruppen  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  ist eine Gruppe, deren vollständiges System der unbedingten Invarianten der Durchschnitt der vollständigen Systeme der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  ist.

Denn es ist  $\mathfrak{G}^1 \subseteq \mathfrak{G}^4$  und  $\mathfrak{G}^2 \subseteq \mathfrak{G}^4$ , also nach dem Korollar zu Satz 1  $\tilde{J}^1 \supseteq \tilde{J}^4$ ,  $\tilde{J}^2 \supseteq \tilde{J}^4$  und somit  $\tilde{J}^1 \cap \tilde{J}^2 \supseteq \tilde{J}^4$ , wenn  $\tilde{J}^1 \cap \tilde{J}^2$  den Durchschnitt von  $\tilde{J}^1$  und  $\tilde{J}^2$ , d. h. die Gesamtheit der beiden Systemen gemeinsamen Funktionen bezeichnet. Andererseits bildet nach Satz 2 die Gesamtheit der Transformationen, die  $\tilde{J}^1 \cap \tilde{J}^2$  unbedingt invariant lassen, eine Gruppe  $\mathfrak{G}^*$ , deren vollständiges Invariantensystem  $\tilde{J}^* \supseteq \tilde{J}^1 \cap \tilde{J}^2$  ist. Es ist also  $\tilde{J}^* \supseteq \tilde{J}^4$ . Da sowohl  $\mathfrak{G}^1$  als auch  $\mathfrak{G}^2$  die Funktionen  $\tilde{J}^1 \cap \tilde{J}^2$  unbedingt invariant lassen, ist  $\mathfrak{G}^*$  als Gesamtheit der Transformation mit dieser Eigenschaft sowohl  $\mathfrak{G}^1$  als auch  $\mathfrak{G}^2$  umschrieben, also auch  $\mathfrak{G}^1 \cup \mathfrak{G}^2$ . Nach dem Korollar zu Satz 1 ist also  $\tilde{J}^* \subseteq \tilde{J}^4$ . Mit obiger Ungleichung folgt  $\tilde{J}^* = \tilde{J}^4 = \tilde{J}^1 \cap \tilde{J}^2$ .

Da in jedem Transformationensystem  $\mathfrak{T}^1$  die identische Transformation enthalten sein soll, gibt es mindestens eine  $\mathfrak{T}^1$  eingeschriebene Gruppe. Sind  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  zwei  $\mathfrak{T}^1$  eingeschriebene Gruppen, so sind die Parameterbeziehungen von  $\mathfrak{T}^1$  sowohl bei  $\mathfrak{G}^1$  als auch bei  $\mathfrak{G}^2$  erfüllt. Das k.g.V.  $\mathfrak{G}^1$  von  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  wird aber gerade durch die sowohl bei  $\mathfrak{G}^1$  als auch bei  $\mathfrak{G}^2$  erfüllten Parameterbeziehungen bestimmt. Es folgt dies aus der entsprechenden Tatsache für die  $(x, y)$ -Relationen und daraus, daß diese  $(x, y)$ -Relationen äquivalent den Parameterbeziehungen sind. Daraus schließen wir, daß auch  $\mathfrak{G}^1$  dem System  $\mathfrak{T}^1$  eingeschrieben ist. Es hat deshalb einen Sinn, von der größten  $\mathfrak{T}^1$  eingeschriebenen Gruppe zu reden. Diese ist das k.g.V. aller  $\mathfrak{T}^1$  eingeschriebenen Gruppen.

In  $\mathfrak{T}^1$  existieren ferner Gruppen  $\mathfrak{G}'$  („rechtsseitige Teiler“) derart, daß alle Transformationen aus  $\mathfrak{T}^1$  mit allen Transformationen aus  $\mathfrak{G}'$  zusammengesetzt gerade wieder alle Transformationen von  $\mathfrak{T}^1$  ergeben, also  $\mathfrak{T}^1 \cdot \mathfrak{G}' = \mathfrak{T}^1$  ist. Zumindest die nur aus der identischen Transformation bestehende Gruppe hat diese Eigenschaft. Ist  $\mathfrak{T}^1 \cdot \mathfrak{G}' = \mathfrak{T}^1$  und  $\mathfrak{T}^1 \cdot \mathfrak{G}'' = \mathfrak{T}^1$ , und ist  $\mathfrak{G}^*$  das k.g.V. von  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$ , so ist auch  $\mathfrak{T}^1 \cdot \mathfrak{G}^* = \mathfrak{T}^1$ . Denn  $\mathfrak{G}^*$  ist die kleinste der mengentheoretischen Vereinigung von  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$ , d. h. dem Transformationensystem, das aus den Transformationen von  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  besteht und das im allgemeinen keine Gruppe ist, umbeschriebene Gruppe, und als solche (s. oben) durch mehrmalige Zusammensetzung von Transformationen aus  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}^2$  erzeugbar. Dabei reproduziert sich aber jedes Mal  $\mathfrak{T}^1$ , so daß auch  $\mathfrak{T}^1 \cdot \mathfrak{G}^* = \mathfrak{T}^1$  ist. Dies berechtigt uns, von dem größten rechtsseitigen Teiler zu reden.

Der größte rechtsseitige Teiler läßt sich also definieren als die Gesamtheit der Transformationen aus  $\mathfrak{G}$ , die mit den Transformationen von  $\mathfrak{T}^1$  zusammengesetzt, gerade wieder  $\mathfrak{T}^1$  ergeben. Denn sind  $T_\alpha$  und  $T_\beta$  zwei solche Transformationen, so daß  $\mathfrak{T}^1 \cdot T_\alpha = \mathfrak{T}^1$  und  $\mathfrak{T}^1 \cdot T_\beta = \mathfrak{T}^1$  ist, so ist auch  $\mathfrak{T}^1 \cdot T_\alpha \cdot T_\beta = \mathfrak{T}^1 \cdot T_\beta = \mathfrak{T}^1$ . Für die identische Transformation  $E$  ist sicher  $\mathfrak{T}^1 \cdot E = \mathfrak{T}^1$ . Ist schließlich  $\mathfrak{T}^1 \cdot T_\alpha = \mathfrak{T}^1$ , so ist  $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T}^1 \cdot E = \mathfrak{T}^1 \cdot T_\alpha \cdot T_\alpha^{-1} = \mathfrak{T}^1 \cdot T_\alpha^{-1}$ , d. h.  $T_\alpha^{-1}$  gehört auch zu diesen Transformationen. Diese bilden also einen rechtsseitigen Teiler. Daß es der größte rechtsseitige Teiler ist, folgt daraus, daß diese Transformationen die Gesamtheit der Transformationen mit der Eigenschaft  $\mathfrak{T}^1 \cdot T_\alpha = \mathfrak{T}^1$  sind.

Wir beweisen jetzt den

**Satz 6:** Ist  $\mathfrak{G}^*$  der größte rechtsseitige Teiler von  $\mathfrak{T}^1$ , so kommen die  $x$  in der Darstellung der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{T}^1$  durch innere Parameter zu Funktionen verbunden vor, die eine Basis des vollständigen Systems der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^*$  bilden.

*Beweis:* Es sei

$$(8) \quad \tilde{y}^1 = \tilde{\psi}^1(x; \bar{y}^1)$$

die Darstellung der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{T}^1$  durch innere Parameter. Ist  $z = T_\gamma(x)$  eine Transformation von  $\mathfrak{G}^*$  und  $y = T_\alpha(x)$  eine Transformation von  $\mathfrak{T}^1$ , so ist nach der Definition von  $\mathfrak{G}^*$  auch  $y = T_\beta(z)$  eine Transformation von  $\mathfrak{T}^1$ . Es ist somit für alle Transformationen  $z = T_\gamma(x)$  aus  $\mathfrak{G}^*$  sowie für alle  $x$  aus  $\mathfrak{B}_n$  und alle  $\bar{y}^1$  aus  $\bar{\mathfrak{B}}_r$

$$(9) \quad \tilde{\psi}^1(x; \bar{y}^1) = \tilde{\psi}^1(z; \bar{y}^1).$$

Die  $\tilde{\psi}(x; \bar{y}^1)$  sind also für alle  $\bar{y}^1$  als Funktionen der  $x$  bei  $\mathfrak{G}^*$  unbedingt in-

variant und deshalb, wenn  $\tilde{J}^*$  das vollständige System der unbedingten Invarianten von  $\mathcal{G}^*$  bedeutet, in der Form

$$\tilde{y}^1(x; \tilde{y}^1) \equiv \tilde{\varphi}^1(\tilde{J}^*(x); \tilde{y}^1)$$

darstellbar. Statt (8) erhalten wir

$$(8') \quad \tilde{y}^1 = \tilde{\varphi}^1(\tilde{J}^*(x); \tilde{y}^1).$$

Wir müssen noch beweisen, daß in (8') auch tatsächlich alle Funktionen einer Basis von  $\tilde{J}^*(x)$  auftreten.

Sind  $x$  und  $z$  zwei Wertkomplexe, die die Gleichungen (9) befriedigen, und ist  $y = T_\alpha(x)$  eine Transformation von  $\mathfrak{T}^1$ , für die also (8) gilt, so ist auch  $y = T_\beta(z)$  eine Transformation von  $\mathfrak{T}^1$ , und zwar gilt dies für alle  $\tilde{y}^1$ . Genau so folgt, daß  $T_\alpha$  in  $\mathfrak{T}^1$  enthalten ist, sobald dies für  $T_\beta$  zutrifft. Daraus schließen wir nach der Definition von  $\mathcal{G}^*$  als Gesamtheit der Transformationen  $T$ , für die  $\mathfrak{T}^1 \cdot T = \mathfrak{T}^1$  gilt, daß  $T_\gamma = T_\beta^{-1} T_\alpha$  eine Transformation von  $\mathcal{G}^*$  ist. Alle Wertsysteme  $x$  und  $z$ , die für beliebiges  $\tilde{y}^1$  (9) genügen, müssen also auch den  $(x, z)$ -Beziehungen von  $\mathcal{G}^*$  genügen. In (9) sind demnach bei variablen  $\tilde{y}^1$  alle  $(x, y)$ -Beziehungen von  $\mathcal{G}^*$ , d. h. die Gleichungen  $\tilde{J}^*(x) = \tilde{J}^*(z)$  enthalten. Das kann aber nur der Fall sein, wenn in (8') auch tatsächlich eine vollständige Basis von  $\tilde{J}^*(x)$  auftritt. Damit ist der Satz bewiesen.

### 3. Bedingte Invarianten.

Indem wir uns nunmehr den bedingten Invarianten zuwenden, wollen wir zunächst festsetzen, daß die Bedingungen  $B(x) = 0$ , die unseren Betrachtungen zugrunde liegen, mit der Rangbedingung für die Matrix  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  im 1. Abschnitt verträglich sein sollen, d. h.  $B(x) = 0$  soll in dem Bereich  $\mathfrak{B}_n$  der  $x$  erfüllbar sein.

Wir werden für die bedingten Invarianten ganz ähnliche Sätze wie für die unbedingten finden. Für die unbedingten Invarianten sind besonders die Sätze 1, 2 und 3 wesentlich. In Satz 1 haben wir erkannt, daß sich die  $(x, y)$ -Relationen einer Gruppe in Form von unbedingt, d. h. für alle  $x$  aus  $\mathfrak{B}_n$ , gültigen Invarianzbeziehungen  $\tilde{J}(x) = \tilde{J}(y)$  darstellen lassen. Satz 2 erwies die Gruppen in dem Sinne als „vollständige Transformationensysteme der Unbedingtheit“, als sie die Gesamtheiten der Transformationen sind, die vorgegebene Funktionensysteme unbedingt invariant lassen. Dies führt uns dazu, als Analogon zu den Gruppen als „vollständige Transformationensysteme der Bedingtheit“ (in bezug auf  $B(x) = 0$ ) solche Transformationensysteme  $\mathfrak{N}^1(B)$  zu definieren, deren  $(x, y)$ -Relationen nach Einführung von  $B(x) = 0$  d. h. für alle  $x$ , die  $B(x) = 0$  genügen, in der Form von Invarianzbeziehungen

$$(10) \quad \tilde{K}'^1(y) = \tilde{K}'^1(x)$$

dargestellt werden können, und die andererseits auch die Gesamtheit der Transformationen sind, für die  $\tilde{K}'^1(x) = \tilde{K}'^1(y)$  ist, sobald  $B(x) = 0$  ist. Hierbei muß man beachten, daß die Funktionen  $\tilde{K}'^1(x)$  mit Hilfe der Bedingungsbedingungen  $B(x) = 0$  noch mannigfach umgeformt werden können. Aus der Existenz der identischen Transformation in  $\mathfrak{N}^1$  schließen wir aber, daß eine Darstellung in der Form (10) mit denselben Funktionen auf beiden Seiten stets möglich ist.

Die Bedingungsgleichungen  $B(x) = 0$  setzen wir natürlich als voneinander unabhängig voraus. Wir können sie in  $\mathfrak{B}_n$  in der Form

$$(11) \quad \tilde{x}' = \tilde{g}'(\tilde{x}')$$

schreiben, wo die  $\tilde{x}'$  bei  $B(x) = 0$  frei variabel sind. Führen wir (11) in  $\tilde{K}'^1(x)$  ein, so möge  $\tilde{K}'^1(x)$  in  $\tilde{K}'^1(\tilde{x}', \tilde{y}'(\tilde{x}')) = \tilde{L}'^1(\tilde{x}')$  übergehen. Die Funktionen  $\tilde{L}'^1(\tilde{x}')$  können wir als unabhängig voneinander voraussetzen.

Die Anzahl der Funktionen  $\tilde{K}'^1$  braucht keineswegs mit der Anzahl der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{R}^1$  übereinzustimmen, sondern kann kleiner als diese sein. In diesem Falle implizieren die Bedingungen  $B(x) = 0$  bei  $\mathfrak{R}^1$  Beziehungen in den  $y$  (siehe jedoch Satz 9).

Wir beweisen zunächst den

**Satz 7:** Jede bedingte Invariante einer Gruppe  $\mathfrak{G}^1$  in  $\mathfrak{G}$  ist für alle  $B(x) = 0$  genügenden Wertsysteme von  $x$  identisch mit einer unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^1$ .

**Beweis:** Die Darstellung der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{G}^1$  durch innere Parameter sei nach (5)

$$\tilde{y}^1 = \tilde{\varphi}(\tilde{J}^1(x); \tilde{y}^1).$$

Für jede Invariante  $F(y) = F'(\tilde{J}^1(x); \tilde{y}^1)$  müssen sich die  $\tilde{y}^1$  zerstören. Ob dies nun identisch in den  $x$  der Fall ist, oder nur bei  $B(x) = 0$ , d. h. identisch in den  $\tilde{x}'$ , es entsteht jedenfalls eine Funktion der  $\tilde{J}^1(x)$ , also eine unbedingte Invariante.

Die Funktionen  $\tilde{K}'^1(y)$  sind offensichtlich das vollständige System der bedingten Invarianten von  $\mathfrak{R}^1$ , wenn wir die Invarianten als Funktionen der  $y$  betrachten. Für die bedingten Invarianten bei  $\mathfrak{R}^1$  als Funktionen der  $x$  gilt

**Satz 8:** Jede bedingte Invariante von  $\mathfrak{R}^1$  ist für alle  $B(x) = 0$  genügenden Wertsysteme von  $x$  identisch mit einer unbedingten Invarianten des größten rechtsseitigen Teilers  $\mathfrak{G}^*$  von  $\mathfrak{R}^1$ , und umgekehrt ist jede unbedingte Invariante von  $\mathfrak{G}^*$ , die vermöge  $B(x) = 0$  nicht identisch verschwindet, bei  $\mathfrak{R}^1$  bedingt invariant.

**Beweis:** Es sei

$$(12) \quad \tilde{y}^1 = \tilde{\varphi}^1(\tilde{J}^*(x); \tilde{y}^1)$$

die Darstellung der  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{R}^1$  durch innere Parameter. Ist  $F(y)$  bedingt invariant, so müssen sich in

$$(13) \quad F(y) = F'(\tilde{J}^*(x); \tilde{y}^1)$$

vermöge  $B(x) = 0$  die  $\tilde{y}^1$  fortheben, und es bleibt eine Funktion der  $\tilde{J}^*(x)$  übrig, die also bei  $\mathfrak{G}^*$  unbedingt invariant ist.

Sind  $x$  und  $z$  zwei Wertsysteme, die  $B(x) = B(z) = 0$  genügen und die beide vermöge zweier gewisser Transformationen  $y = T_x(x) = T_z(z)$  aus  $\mathfrak{R}^1$  in  $y$  übergeführt werden können, so durchläuft  $T_z$  alle Transformationen von  $\mathfrak{R}^1$ , wenn  $T_x$  bei festen  $x$  und  $z$  dies tut und umgekehrt. Es folgt dies aus  $\tilde{K}'^1(x) = \tilde{K}'^1(y) = \tilde{K}'^1(z)$  und daraus, daß  $\mathfrak{R}^1$  die Gesamtheit der Transformationen mit der Eigenschaft  $\tilde{K}'^1(x) = \tilde{K}'^1(y)$  bei  $B(x) = 0$  ist. Daraus schließen wir, daß  $z = T_z(x)$  eine Transformation von  $\mathfrak{G}^*$  ist.



Tragen wir in (10) die Beziehungen (11) ein, d. h. bilden wir die Gleichungen  $\tilde{L}^1(\tilde{x}') = \tilde{K}^1(y)$ , und lösen die voneinander unabhängigen Funktionen  $\tilde{L}^1(\tilde{x}')$  nach einem Teilsystem  $\tilde{x}^1$  der  $\tilde{x}'$  auf, so erhalten wir mit den bei  $\mathfrak{N}^1$  und  $B(x) = 0$  und festen  $y$  frei varianten  $\tilde{x}^1$

$$(14) \quad \tilde{x}^1 = \tilde{\chi}^1(\tilde{K}^1(y); \tilde{x}^1).$$

Alle durch (14) und (11) bei festen  $y$  bestimmten Wertsysteme, für die also  $\tilde{x}^1$  frei variant ist, sind nach dem vorigen durch Transformationen aus  $\mathfrak{G}^*$  miteinander verknüpft. Ist also  $F(x)$  eine unbedingte Invariante bei  $\mathfrak{G}^*$ , so müssen sich in

$$F(x) = F'(\tilde{x}') = F'(\tilde{x}^1, \tilde{\chi}^1(\tilde{K}^1(y); \tilde{x}^1)) = \Phi'(\tilde{K}^1(y); \tilde{x}^1)$$

die  $\tilde{x}^1$  zerstören, so daß  $F(x)$  bedingt invariant bei  $\mathfrak{N}^1$  wird, falls  $F'(\tilde{x}') \not\equiv 0$ .

Der Satz 8 entspricht dem Satz 1 über unbedingte Invarianten. Das Korollar zu Satz 1 ist z. T. schon in Satz 8 bzw. der Definition des vollständigen Transformationensystems der Bedingtheit vorweggenommen. Es bleibt noch

*Korollar zu Satz 8:* Sind  $\mathfrak{N}^1$  und  $\mathfrak{N}^2$  zwei in bezug auf  $B(x) = 0$  vollständige Transformationensysteme der Bedingtheit und ist  $\mathfrak{N}^1 \supset \mathfrak{N}^2$ , so gilt für die zugehörigen vollständigen Systeme der bedingten Invarianten  $\tilde{K}^1$  und  $\tilde{K}^2$ :  $\tilde{K}^1 \subset \tilde{K}^2$ .

Denn sicher ist  $\tilde{K}^1 \subseteq \tilde{K}^2$ . Wäre  $\tilde{K}^1 = \tilde{K}^2$ , so wäre  $\mathfrak{N}^2$  nicht die Gesamtheit der Transformationen, die bei  $B(x) = 0$   $\tilde{K}^2(x) = \tilde{K}^2(y)$  bewirken. Also ist  $\tilde{K}^1 \subset \tilde{K}^2$ .

Es kann sein, daß einige der Bedingungen  $B(x) = 0$  überflüssig sind, d. h. daß schon für ein schwächeres in  $B(x) = 0$  enthaltenes Bedingungssystem  $B^*(x) = 0$  für alle Transformationen von  $\mathfrak{N}^1$  (10) gilt. Aus (12) folgt, daß nur die Bedingungsgleichungen wesentlich sind, deren linke Seite bei  $\mathfrak{G}^*$  unbedingt invariant ist. Wir werden also zunächst die Gesamtheit dieser Bedingungen konstruieren: Es sei

$$\tilde{y}^* = \tilde{\varphi}^*(\tilde{J}^*(x); \tilde{y}^*)$$

die Darstellung der  $(x, y)$ -Beziehungen von  $\mathfrak{G}^*$  durch die frei varianten inneren Parameter  $\tilde{y}^*$ . Für  $\tilde{y}^* = \tilde{x}^*$  wird

$$\tilde{x}^* = \tilde{\varphi}^*(\tilde{J}^*(x); \tilde{x}^*).$$

Hiermit führen wir in  $B(x) = 0$  statt der  $x$  die Variablen  $\tilde{x}^*$  und  $\tilde{J}^*(x)$  ein, d. h. wir bilden  $B(\tilde{x}^*, \tilde{\varphi}^*(\tilde{J}^*(x); \tilde{x}^*)) = 0$  und eliminieren die  $\tilde{x}^*$ , wodurch  $\tilde{G}''(\tilde{J}^*(x)) = \tilde{J}''(x) = 0$  entstehe. Die  $\tilde{J}''$  sind unbedingt invariant bei  $\mathfrak{G}^*$ ; ferner genügt jedes Wertsystem der  $x$ , das  $B(x) = 0$  genügt, auch  $\tilde{J}''(x) = 0$ . Schließlich ist  $\tilde{J}''(x) = 0$  auch die Gesamtheit der in der Form  $\tilde{\mathfrak{G}}''(\tilde{J}^*(x)) = 0$  darstellbaren Gleichungen aus  $B(x) = 0$ , d. h. die Funktionen  $\tilde{J}''(x)$  sind die Gesamtheit der zufolge  $B(x) = 0$  identisch verschwindenden unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^*$ . Alle übrigen unbedingten Invarianten  $\tilde{J}'(x)$  von  $\mathfrak{G}^*$  müssen nach Satz 8 bedingt invariant bei  $\mathfrak{N}^1$  sein, und zwar bei den Bedingungen  $\tilde{J}''(x) = 0$ . Wir nennen  $\tilde{J}''(x) = 0$  das „reduzierte Bedingungssystem“.

Die Gesamtheit  $\mathfrak{T}'$  der Transformationen, für die bei  $\tilde{J}''(x) = 0$  (10) gilt, ist also nach obigem  $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{N}^1$ , da jede Transformation von  $\mathfrak{N}^1$  schon bei  $\tilde{J}''(x) = 0$



(10) bewirkt. Da aber für jede Transformation, für die (10) bei  $\tilde{J}''(x) = 0$  gilt, dies auch bei den stärkeren Bedingungen  $B(x) = 0$  der Fall ist und  $\mathfrak{N}^1$  die Gesamtheit der Transformationen mit dieser letzteren Eigenschaft ist, ist  $\mathfrak{N}^1 \supseteq \mathfrak{T}'$ . Es folgt also  $\mathfrak{T}' = \mathfrak{N}^1$ , und  $\mathfrak{N}^1$  ist auch in bezug auf  $\tilde{J}''(x) = 0$  ein vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit mit denselben  $(x, y)$ -Relationen (10) bei  $\tilde{J}''(x) = 0$ .

Führen wir in (12) als Basis von  $\tilde{J}^*(x)$  die Funktionen  $\tilde{J}'(x)$  und ein restliches Funktionensystem  $\tilde{J}''(x)$  ein, so müssen sich die so entstehenden Gleichungen

$$(12') \quad \tilde{y}^1 = \tilde{\varphi}^1(\tilde{J}'(x), \tilde{J}''(x); \tilde{y}^1)$$

für  $\tilde{J}''(x) = 0$  nach den  $\tilde{J}'(x)$  auflösen lassen, da diese ja bedingt invariant sind. (10) ist im wesentlichen, d. h. bis auf Umformungen der  $\tilde{J}'(x)$  vermöge  $\tilde{J}''(x) = 0$  diese Auflösung. Die Gleichungen (12') sind dann auch in einer genügend engen Umgebung von  $\tilde{J}''(x) = 0$  nach den  $\tilde{J}'(x)$  auflösbar. Nun implizieren aber die Gleichungen (12') keine Beziehungen für die  $y$  allein, da z. B. durch die identische Transformation, die ja in  $\mathfrak{N}^1$  enthalten ist, jedes Wertsystem  $y$  aus einem geeigneten  $x$  (nämlich  $x \equiv y$ ) erzeugt werden kann. Nach einem elementaren Satz kann man dann die Gleichungen (12') auch nach einem Teilsystem  $\tilde{J}^1(x)$  der  $\tilde{J}^*(x)$  auflösen, das aus genau so vielen Funktionen besteht, wie (12') Gleichungen enthält, und in dem die Funktionen  $\tilde{J}'(x)$  enthalten sind. Die Auflösung möge

$$(15) \quad \tilde{J}^1(x) = \tilde{\Phi}^1(y; \tilde{J}^2(x))$$

lauten.  $\tilde{J}^2(x)$  ist dann ein Teilsystem aus  $\tilde{J}''(x)$ . Nun sind offensichtlich schon die Bedingungen  $\tilde{J}^2(x) = 0$  hinreichend, um die  $(x, y)$ -Beziehungen von  $\mathfrak{N}^1$  in der Form

$$\tilde{J}^1(x) = \tilde{\Phi}^1(y; 0) = \tilde{K}^1(y)$$

oder, bei entsprechender Umformung von  $\tilde{J}^1(x)$  mit  $\tilde{J}^2(x) = 0$ , in der Form

$$(16) \quad \tilde{K}^1(x) = \tilde{K}^1(y)$$

darzustellen. Genau wie oben folgt, daß  $\mathfrak{N}^1$  auch in bezug auf  $\tilde{J}^2(x) = 0$  ein vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit ist.

Die restlichen, über  $\tilde{J}^2(x) = 0$  hinausgehenden Bedingungsgleichungen von  $\tilde{J}''(x) = 0$  bewirken lediglich, daß die  $y$  nicht mehr alle voneinander unabhängig sind, d. h. sie implizieren Abhängigkeiten für die  $y$ , während  $\tilde{J}^2(x) = 0$  dies nicht tut. In  $\tilde{J}^2(x) = 0$  sind sicher keine bei der kleinsten  $\mathfrak{N}^1$  umbeschriebenen Gruppe unbedingt invarianten Bedingungen enthalten, denn diese würden sich sofort auf die  $y$  übertragen, die dann also bei  $\mathfrak{N}^1$  und  $\tilde{J}^2(x) = 0$  nicht unabhängig voneinander wären.

Die Bedingungen  $\tilde{J}^2(x) = 0$  sind aber auch in dem Sinne notwendig, um die  $(x, y)$ -Relationen von  $\mathfrak{N}^1$  in Invarianzbeziehungen darzustellen, als wir von ihnen keine mehr fortlassen können (gegebenenfalls lassen sich wohl einige von ihnen durch andere ersetzen). Denn da nach Satz 8 jede Funktion von  $\tilde{J}^*$  zufolge der Bedingungen entweder verschwinden oder bedingt invariant

sein muß, hätten wir sonst mehr bedingte Invarianten als  $(x, y)$ -Beziehungen bei  $\mathfrak{N}^1$ , was offensichtlich unmöglich ist. (15) liefert ein Verfahren, um die bei  $\mathfrak{N}^1$  bedingt invarianten Erweiterungen der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^*$  zu gewinnen.

Hiermit ist bewiesen:

**Satz 9:**  $\mathfrak{N}^1$  ist ein vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit in bezug auf das reduzierte Bedingungssystem  $\tilde{J}''(x) = 0$ , das aus der Gesamtheit der zufolge  $B(x) = 0$  verschwindenden unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^*$  besteht. Bei  $\tilde{J}''(x) = 0$  gelten genau wie bei  $B(x) = 0$  die  $(x, y)$ -Relationen (10).  $\mathfrak{N}^1$  ist ferner ein vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit in bezug auf ein Teilsystem  $\tilde{J}^2(x) = 0$  der Bedingungsgleichungen  $\tilde{J}''(x) = 0$ , das hierfür hinreichend und notwendig ist in dem Sinne, daß wir keine der Bedingungen  $\tilde{J}^2(x) = 0$  fortlassen können. Bei  $\mathfrak{N}^1$  und  $\tilde{J}^2(x) = 0$  sind die  $y$  unabhängig voneinander.

Wir kommen nun zu den Analoga der beiden Vollständigkeitssätze 2 und 3 und beweisen zunächst

**Satz 10 (3. Vollständigkeitssatz):** Die Gesamtheit  $\mathfrak{I}^1(S^1; B)$  der Transformationen aus  $\mathfrak{G}$ , die das Funktionensystem  $S^1(x)$  bei den Bedingungen  $B(x) = 0$  invariant lassen, ist ein vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit  $\mathfrak{N}^1(S^1; B)$  in bezug auf  $B(x) = 0$ . Das vollständige System der bedingten Invarianten von  $\mathfrak{N}^1$  ist das kleinste  $S^1$  umfassende vollständige System der bedingten Invarianten eines vollständigen Transformationensystems der Bedingtheit.

*Beweis:*  $\mathfrak{G}^*$  sei der größte  $\mathfrak{I}^1$  eingeschriebene rechtsseitige Teiler. Die  $(x, y)$ -Beziehungen von  $\mathfrak{I}^1$  seien durch (12) gegeben.  $y = T_\alpha(x)$  sei eine Transformation aus  $\mathfrak{I}^1$ , und es sei  $B(x) = 0$ . Es ist also  $S^1(x) = S^1(y)$ .  $y = T_\beta(z)$  mit denselben  $y$  wie vorher sei eine weitere Transformation aus  $\mathfrak{I}^1$ , und es sei auch  $B(z) = 0$ . Halten wir  $x$  und  $z$  fest und variieren  $T_\alpha$  innerhalb  $\mathfrak{I}^1$ , so variiert auch  $T_\beta$  wegen  $S^1(x) = S^1(y) = S^1(z)$  innerhalb  $\mathfrak{I}^1$  und es folgt, wie in Beweis zu Satz 8, daß  $z = T_\gamma(x)$  eine Transformation von  $\mathfrak{G}^*$  ist. Daraus schließen wir, daß die unbedingten Invarianten  $\tilde{J}^*(z)$  bei  $\mathfrak{G}^*$  durch die  $y$  eindeutig festliegen, sobald  $B(z) = 0$  und  $y = T_\beta(z)$  eine Transformation von  $\mathfrak{I}^1$  ist. Damit ist  $\mathfrak{I}^1$  als vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit erwiesen.

Ist  $\mathfrak{N}'$  ein vollständiges Transformationensystem der Bedingtheit, für das  $\mathfrak{N}' \supset \mathfrak{N}^1$  gilt, so können, da  $\mathfrak{N}^1$  die Gesamtheit der Transformationen ist, die  $S^1$  bedingt invariant lassen, in  $\mathfrak{N}'$  nicht mehr alle Funktionen von  $S^1$  bedingt invariant sein. Ist dagegen  $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}^1$ , so ist wegen des Korollars zu Satz 8 das vollständige System der bedingten Invarianten  $\tilde{K}''$  von  $\mathfrak{N}'$  umfassender als das vollständige System der bedingten Invarianten  $\tilde{K}''^1$  von  $\mathfrak{N}^1$ .

Die  $\mathfrak{N}^1$  definierenden Beziehungen für die äußeren Parameter finden wir analog zu denen der Gruppe  $\mathfrak{G}^1$  von Satz 2; nur müssen wir die  $x$  in den Gleichungen  $S^1(x) = S^1(f(x; \alpha))$  durch ein bei  $B(x) = 0$  unabhängig veränderliches Teilsystem der  $x$  ausdrücken.

Schließlich gilt noch entsprechend Satz 3

**Satz 11 (4. Vollständigkeitssatz):** Das vollständige System der bedingten Invarianten  $\tilde{K}''^2(\mathfrak{I}^2; B)$  eines Transformationensystems  $\mathfrak{I}^2$  ist identisch mit

dem vollständigen System der bedingten Invarianten des kleinsten  $\mathfrak{T}^2$  umbezeichneten vollständigen Transformationensystems der Bedingtheit  $\mathfrak{N}^2(B)$ .

Der Beweis ist genau entsprechend dem des Satzes 3, so daß wir uns seine Wiederholung sparen können.

Wir wollen jetzt noch die Konstruktion von  $\mathfrak{N}^2$  angeben. Dazu schicken wir einige Bemerkungen voraus: In  $\mathfrak{T}^2$  — wie in jedem Transformationensystem — gibt es Transformationen, für die für irgendein  $x$  — keineswegs notwendigerweise identisch in den  $x$  —  $B(x) = B(y)$  gilt. Wir nennen diese Transformationen „mit  $B(x) = B(y)$  verträglich“ und bezeichnen ihre Gesamtheit mit  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B)$ . Diese Transformationensysteme nehmen eine Zwischenstellung zwischen den vollständigen Transformationensystemen der Unbedingtheit (d. h. den Gruppen) und denen der Bedingtheit ein. Wir zeigen:

*Satz 12:* Ist  $\mathfrak{G}^{2*}$  der größte rechtsseitige Teiler von  $\mathfrak{T}^2$  und  $\tilde{J}''(x)$  die Gesamtheit der bei  $\mathfrak{G}^{2*}$  unbedingt invarianten Funktionen von  $B(x)$ , und ist  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B) \subseteq \mathfrak{G}^{2*}$ , so ist  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; \tilde{J}'') = \mathfrak{G}^{2*}$ .

*Beweis:* Es ist sicher  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; \tilde{J}'') \supseteq \mathfrak{G}^{2*}$ , da bei  $\mathfrak{G}^{2*}$  für alle  $x$   $\tilde{J}''(x) = \tilde{J}''(y)$  gilt. Es sei  $y = T_a(x)$  eine Transformation von  $\mathfrak{T}^2$ , für die für ein gewisses  $x$   $\tilde{J}''(x) = \tilde{J}''(y)$  ist. Wir können eine Transformation  $z = T_y(x)$  aus  $\mathfrak{G}^{2*}$  angeben, so, daß  $B(x) = B(y)$  ist; denn wegen der unbedingten Invarianz der  $\tilde{J}''$  ist  $\tilde{J}''(x) = \tilde{J}''(y) = \tilde{J}''(z)$ , und die restlichen  $B(z)$  können wir als frei variierende innere Parameter betrachten und somit gleich  $B(y)$  setzen. Die Transformation  $y = T_\beta(z)$  gehört nach der Definition des größten Teilers  $\mathfrak{T}^2$  an. Da  $B(z) = B(y)$  ist, ist sie also nach der Voraussetzung des Satzes eine Transformation aus  $\mathfrak{G}^{2*}$ . Dann ist aber auch  $T_a = T_\beta \cdot T_y$  eine Transformation aus  $\mathfrak{G}^{2*}$ , so daß  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; \tilde{J}'') \subseteq \mathfrak{G}^{2*}$  ist. Mit obigem folgt also  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; \tilde{J}'') = \mathfrak{G}^{2*}$ .

Es seien  $\tilde{J}'(x)$  die zu  $\tilde{J}''(x)$  restlichen Funktionen des vollständigen Systems der unbedingten Invarianten von  $\mathfrak{G}^{2*}$ . Wären nun bei  $\mathfrak{T}^2$  nicht Beziehungen der Art

$$(17) \quad \tilde{J}'(x) = \tilde{\Phi}'(y; \tilde{J}''(x))$$

gültig, so könnten unmöglich die Beziehungen  $\tilde{J}''(x) = \tilde{J}''(y)$  bei  $\mathfrak{N}^1$  die Invarianzbeziehungen  $\tilde{J}'(x) = \tilde{J}'(y)$  zur Folge haben, wie es wegen  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; \tilde{J}'') = \mathfrak{G}^{2*}$  der Fall sein muß. Man beachte dabei, daß nach Satz 6 andere Funktionen als die  $\tilde{J}'$ ,  $\tilde{J}''$  in (17) nicht auftreten können.

Offensichtlich erzeugen die Bedingungen  $\tilde{J}''(x) = 0$  bei  $\mathfrak{N}^1$  die bedingt invarianten Erweiterungen der  $\tilde{J}'(x)$ , nämlich

$$\tilde{J}'(x) = \tilde{\Phi}'(y; 0) = \tilde{K}'(y),$$

die wir mit  $\tilde{J}''(x) = 0$  für die mit  $\tilde{J}''(x) = 0$  verträglichen  $x$  in der Form  $\tilde{K}'(x) = \tilde{K}'(y)$  schreiben können. Dies sind aber auch sämtliche bedingten Invarianten bei  $\mathfrak{T}^2$ , da andere Funktionen als die  $\tilde{J}'$ ,  $\tilde{J}''$  gar nicht bedingt invariant sein können und über diese schon teils als Invarianzbedingungen, teils als bedingte Invarianten verfügt ist. Die Gesamtheit der Transformationen, für die  $\tilde{K}'(x) = \tilde{K}'(y)$  bei  $\tilde{J}''(x) = 0$  gilt, d. h. das vollständige Transformationensystem der Bedingtheit  $\mathfrak{N}^2$  finden wir dann gemäß Satz 10. Hiermit haben wir  $\mathfrak{N}^2$  im Falle  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B) \subseteq \mathfrak{G}^{2*}$  konstruiert.

Gilt nicht  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B) \subseteq \mathfrak{G}^{2*}$ , so verfahren wir folgendermaßen: Es ist nach (15)  $\mathfrak{M}(\mathfrak{N}^2; \tilde{J}^2) = \mathfrak{G}^*$ ; denn bei  $\tilde{J}^2(x) = \tilde{J}^2(y)$  hängt die rechte Seite von (15) nur noch von den  $y$  ab. Wäre dann diese rechte Seite nicht identisch gleich  $\tilde{J}^1(y)$ , dann gäbe es keine Transformationen in  $\mathfrak{N}^2$ , für die für  $\tilde{J}^2(x) = \tilde{J}^2(y)$  nicht auch  $\tilde{J}^1(x) = \tilde{J}^1(y)$  ist, während dies z. B. für die identische Transformation tatsächlich der Fall ist. Die Gleichungen  $\tilde{J}^1(x) = \tilde{J}^1(y)$ ,  $\tilde{J}^2(x) = \tilde{J}^2(y)$  sind aber äquivalent den die Gruppe  $\mathfrak{G}^*$  definierenden Beziehungen für die äußeren Parameter. Also ist  $\mathfrak{M}(\mathfrak{N}^2; \tilde{J}^2) = \mathfrak{G}^*$ . Dann ist aber  $\mathfrak{M}(\mathfrak{N}^2; B) \subseteq \mathfrak{G}^*$ . Wegen  $\mathfrak{T}^2 \subseteq \mathfrak{N}^2$  ist also erst recht

$$(18) \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B) \subseteq \mathfrak{G}^*.$$

Ferner ist wegen  $\mathfrak{N}^2 \cdot \mathfrak{G}^* = \mathfrak{N}^2$  und  $\mathfrak{T}^2 \subseteq \mathfrak{N}^2$  sicher  $\mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{G}^* \subseteq \mathfrak{N}^2$ . Ist  $\mathfrak{G}'$  die kleinste  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B)$  umbeschriebene Gruppe, so ist also erst recht

$$(19) \quad \mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{G}' \subseteq \mathfrak{N}^2.$$

Wir bilden nun  $\mathfrak{G}'$  nach dem in Anschluß an Satz 3 angegebenen Verfahren und  $\mathfrak{T}^{2'} = \mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{G}'$ . Da, falls nicht  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^2; B) \subseteq \mathfrak{G}^{2*}$  ist,  $\mathfrak{G}' > \mathfrak{G}^{2*}$  ist, ist  $\mathfrak{T}^{2'} > \mathfrak{T}^2$ . Sicher ist wegen (19)  $\mathfrak{T}^{2'} \subseteq \mathfrak{N}^2$ . Ist  $\mathfrak{G}^{2*}$  der größte rechtsseitige Teiler von  $\mathfrak{T}^{2'}$  und ist  $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}^{2'}; B) \subseteq \mathfrak{G}^{2*}$ , so finden wir  $\mathfrak{N}^2$  durch obige Überlegung, andernfalls wiederholen wir das Verfahren. Daß es nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbricht, sieht man genau so ein, wie die entsprechende Tatsache bei der Konstruktion der kleinsten  $\mathfrak{T}^2$  umbeschriebenen Gruppe.

(Eingegangen am 15. Dezember 1951.)

## Sur une extension d'un théorème de Radó\*).

Par

HENRI CARTAN à Paris.

Dans votre article intitulé «Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANN-scher Gebiete» [Math. Ann. 124, 1—16 (1951)], vous démontrez une extension à  $n$  variables (votre Satz 1, page 11) d'un théorème classique de Radó, dont P. THULLEN avait donné une démonstration à l'occasion de l'étude des singularités des sous-variétés analytiques complexes de dimension maximum [Math. Ann. 111, 137—157 (1935)]. En énonçant votre théorème sous une forme voisine, on peut facilement ramener le cas de  $n$  variables à celui d'une seule, et traiter ce dernier sans se servir du théorème de Radó, mais en usant de considérations assez élémentaires de la théorie des fonctions sous-harmoniques d'une variable complexe. D'une façon précise, je vais démontrer ceci:

**Théorème.** — Soit  $\mathcal{G}$  une variété analytique-complexe („RIEMANN-sches Gebiet“ dans votre terminologie). Soit  $g$  une fonction à valeurs complexes, définie dans  $\mathcal{G}$ , et satisfaisant aux deux conditions suivantes; a)  $g$  est continue en tout point de  $\mathcal{G}$ ; b)  $g$  est holomorphe en tout point de  $\mathcal{G}$  où  $g$  est  $\neq 0$ . Alors  $g$  est holomorphe en tout point de  $\mathcal{G}$  sans exception.

Lorsque la dimension  $n$  de  $\mathcal{G}$  est égale à un, le théorème de Radó résulte de celui-ci: il suffit, avec vos notations de la page 9, de poser  $g(z) = f(z)$  pour  $z \in \mathcal{G}'$ ,  $g(z) = 0$  pour  $z \in \mathcal{G}''$ , puis d'appliquer notre théorème à cette fonction  $g$ .

Notre théorème étant de nature locale, il suffit de faire la démonstration au voisinage de chaque point de  $\mathcal{G}$ ; on peut donc supposer que  $\mathcal{G}$  est un polycylindre

$$(1) \quad |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1$$

de l'espace de  $n$  variables complexes  $z_i$ . De plus, il suffit de prouver le théorème pour  $n = 1$ : en effet, supposons que  $g$  satisfasse aux conditions a) et b) dans le polycylindre (1); fixons toutes les variables sauf une, soit  $z_i$ ; alors  $g$  devient une fonction de  $z_i$  qui, si notre théorème est vrai pour  $n = 1$ , est holomorphe dans le cercle  $|z_i| < 1$ . Ainsi  $g$  est holomorphe séparément par rapport à chaque variable, donc, en vertu d'un théorème classique de HARTOGS-OSGOOD<sup>1)</sup>, est une fonction holomorphe des  $n$  variables complexes dans le polycylindre (1).

Il reste à démontrer le théorème dans le cas d'une seule variable complexe  $z$ . La fonction  $u(z) = \log |g(z)|$  est sous-harmonique; car elle est continue (à valeurs  $\geq -\infty$  et  $< +\infty$ ), harmonique en tout point où  $u(z)$  est fini, et, en chaque point  $z_0$  de l'ensemble fermé  $E$  des points où  $g$  s'annule, sa valeur  $-\infty$  est au plus égale à sa moyenne le long des circonférences de centre  $z_0$  et de rayon assez petit. Alors, de deux choses l'une: ou bien  $u(z)$  est identique

\*) Auszug aus einem Briefe von Herrn HENRI CARTAN an H. BEHNKE und K. STEIN. Herr CARTAN gibt darin einen neuen einfachen Beweis einer Verallgemeinerung eines Satzes von TIBOR RADÓ, die (in etwas anderer Fassung) in der Arbeit: „Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANN-scher Gebiete“ benutzt wurde. Herr CARTAN hat seinen Beweis 1941 aufgestellt, jedoch bisher noch nicht veröffentlicht.

<sup>1)</sup> En réalité, on n'a même pas besoin de la partie fine du théorème de HARTOGS-OSGOOD, puisqu'on a supposé la fonction  $g$  continue.

à la constante  $-\infty$ , donc  $g(z) = 0$  (et le théorème est démontré dans ce cas); ou bien  $u(z) \equiv -\infty$ . Plaçons-nous désormais dans cette dernière hypothèse.

L'ensemble  $E$  des infinis de  $u(z)$  est alors de *capacité nulle*, d'après un théorème classique. De plus, d'après un théorème de LEBESGUE (voir par ex. BRELOT, J. de Math. 19, 319–337 (1940); voir théorème D, p. 334), chaque point  $z_0$  de  $E$  est centre de circonférences de rayons arbitrairement petits, qui ne rencontrent pas  $E$ . Considérons la distribution  $\mu$  de masses positives qui, d'après la théorie de F. RIESZ, est attachée à la fonction sous-harmonique  $u$ ; dans le langage des distributions de SCHWARTZ, la «distribution»  $\mu$  n'est autre que le laplacien de  $\frac{1}{2\pi} u$ :

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \Delta u.$$

Les masses de  $\mu$  sont portées par  $E$ , puisque  $u$  est harmonique en dehors de  $E$ . Si une courbe régulière fermée  $\Gamma$  ne rencontre pas  $E$ , le total des masses de  $\mu$  qui sont situées à l'intérieur de  $\Gamma$  est égal à l'intégrale curviligne

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx.$$

Comme ici  $u(z) = \log |g(z)|$ , cette intégrale est égale au quotient par  $2\pi$  de la variation de l'argument de  $g(z)$  le long de  $\Gamma$ , donc est égale à un nombre entier. Appliquons ce résultat à des circonférences de rayons de plus en plus petits, centrées en un point quelconque  $z_0$ ; on voit que, sauf éventuellement une masse ponctuelle (entière) portée par le point  $z_0$ , la distribution  $\mu$  ne comporte aucune masse dans un cercle assez petit de centre  $z_0$ . Ainsi  $\mu$  se compose de masses ponctuelles, placées en des points isolés; et  $E$  est l'ensemble de ces points isolés. Puisque la fonction  $g$  est holomorphe en dehors de ces points, et bornée au voisinage de chacun d'eux,  $g$  est aussi holomorphe aux points de  $E$ , ce qui démontre notre théorème. On notera que si un point  $z_0$  porte une masse égale à l'entier  $k$ ,  $z_0$  est un zéro d'ordre  $k$  de la fonction holomorphe  $g$ .

(Eingegangen am 31. Dezember 1951.)

# Note zur Theorie der Kristallgitter.

Von

MARTIN EICHLER in Münster.

## Einleitung.

Ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum  $R$  über dem Körper  $k$  der rationalen Zahlen sei vorgelegt.  $R$  sei mit einer Metrik ausgestattet, d. h. für je zwei Vektoren  $\xi, \eta$  von  $R$  sei ein skalares Produkt mit den folgenden vier Eigenschaften erklärt:

- 1)  $\xi \eta = \eta \xi \in k$ ,    2)  $(x \xi) \eta = x (\xi \eta)$ ,    3)  $(\xi + \eta) \zeta = \xi \zeta + \eta \zeta$ ,
- 4)  $\xi^2 > 0$  für  $\xi \neq 0$ ;

dabei bedeute  $x$  eine beliebige Zahl aus  $k$ .

Wir betrachten nun in  $R$  die *Kristallgitter* oder kurz *Gitter*, d. h. die endlichen Moduln vom Rang  $n$  bezgl. der Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen. Gibt es in einem Gitter  $\mathfrak{G}$  Teilgitter  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots$  (der Ränge  $r_1, r_2, \dots$  mit  $r_1 + r_2 + \dots = n$ ) von der Eigenschaft, daß jeder Vektor  $\iota$  aus  $\mathfrak{G}$  auf genau eine Weise in der Form  $\iota = \iota_1 + \iota_2 + \dots$  mit  $\iota_\nu \in \mathfrak{G}_\nu$  geschrieben werden kann, und daß ferner jeder Vektor aus  $\mathfrak{G}_\mu$  auf jedem Vektor aus  $\mathfrak{G}_\nu$  ( $\mu \neq \nu$ ) senkrecht steht, so sagt man,  $\mathfrak{G}$  sei die *direkte Summe*

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \dots$$

Wir werden zeigen: es gibt nur eine einzige direkte Zerlegung (1) eines Gitters  $\mathfrak{G}$  in nicht weiter zerlegbare direkte Summanden  $\mathfrak{G}_\nu$  (Satz 2). Dasselbe gilt auch noch, wenn der Grundkörper  $k$  ein endlich algebraischer Zahlkörper einer gewissen Beschaffenheit ist (Satz 3); allerdings muß jetzt die Definition der Metrik unter Umständen etwas abgeändert werden.

Das Ergebnis tritt in formaler Weise dem bekannten Satze über die Eindeutigkeit der Zerlegung eines halbeinfachen hyperkomplexen Systems in eine direkte Summe von einfachen an die Seite. Es unterscheidet sich von ihm aber darin, daß eine (1) entsprechende Zerlegung des ganzen Raumes  $R$  nicht eindeutig fest liegt. Ebenso wie die Gittereigenschaft kann die Forderung der Definitheit der Metrik, d. h. das Postulat 4) für das skalare Produkt nicht entbehrt werden, wie das folgende Beispiel lehrt:  $\mathfrak{G} = [\iota_1, \iota_2]$  mit  $\iota_1^2 = 1$ ,  $\iota_2^2 = -2$ . Es ist

$$\mathfrak{G} = [\iota_1] + [\iota_2] = [3 \iota_1 + 2 \iota_2] + [4 \iota_1 + 3 \iota_2].$$

Auch der Isomorphiesatz von WITT<sup>1)</sup> kann von hierher beleuchtet werden. Er besagt: Sind

$$R = R_1 + R_2 = R'_1 + R'_2$$

zwei Zerlegungen von  $R$  in direkte Summen, und sind  $R_1, R'_1$  isomorph (d. h. kann man die Vektoren von  $R_1$  auf die von  $R'_1$  in eindeutiger Weise so abbilden, daß die skalaren Produkte von Bildern und Urbildern übereinstimmen), so sind auch  $R_2, R'_2$  isomorph. Übrigens wird hierbei die Definitheit

<sup>1)</sup> WITT, E.: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine angew. Math. 176, 31—44 (1936).

der Metrik noch nicht benutzt. Unter Voraussetzung der Definitheit kann man aber sogar behaupten: *Sind*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}'_2$$

zwei direkte Summen-Zerlegungen eines Gitters  $\mathfrak{S}$ , und sind  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_1$  isomorph, so sind es auch  $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}'_2$ . Zum Beweise zerlege man  $\mathfrak{S}_1, \dots$  in minimale direkte Summanden:

$$\mathfrak{S}_1 = \sum \mathfrak{S}_{1v}, \quad \mathfrak{S}_2 = \sum \mathfrak{S}_{2v}, \quad \mathfrak{S}'_1 = \sum \mathfrak{S}'_{1v}, \quad \mathfrak{S}'_2 = \sum \mathfrak{S}'_{2v}.$$

Nach der Voraussetzung sind die  $\mathfrak{S}_{1v}$  mit den  $\mathfrak{S}'_{1v}$  jeweils isomorph und möglicherweise sogar identisch. Diejenigen  $\mathfrak{S}_{1v}$ , die mit keinem  $\mathfrak{S}'_{1v}$  übereinstimmen, kommen nach Satz 2 unter den  $\mathfrak{S}_{2v}$  vor, und Entsprechendes gilt für die  $\mathfrak{S}'_{1v}$ . Das liefert die Behauptung.

Die Bedeutung unseres Ergebnisses für die Theorie der Automorphismen (Einheiten) der Gitter ist evident.

### Gitter über der Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen.

**Satz 1.** *Sind*

$$(2) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}'_2$$

zwei Zerlegungen von  $\mathfrak{S}$  in direkte Summen, so ist

$$(3) \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}'_2, \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{S}'_2$$

und

$$(4) \quad \mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}'_1 \cap \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}'_1 \cap \mathfrak{S}_2, \quad \mathfrak{S}'_2 = \mathfrak{S}'_2 \cap \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}'_2 \cap \mathfrak{S}_2.$$

*Beweis.* Die Dimensionen (Ränge) der Teilgitter  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2$  seien  $r_1, r_2 = n - r_1, r'_1, r'_2 = n - r'_1$ . Es werde zunächst  $r_1 = r'_1$  angenommen. Wir gehen von Basisdarstellungen

$\mathfrak{S}_1 = [\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}], \quad \mathfrak{S}_2 = [\beta_1, \dots, \beta_{r_2}], \quad \mathfrak{S}'_1 = [\gamma_1, \dots, \gamma_{r'_1}], \quad \mathfrak{S}'_2 = [\delta_1, \dots, \delta_{r'_2}]$  aus. Die Basen fassen wir gleichzeitig als einzeilige Matrizen auf (deren Elemente Vektoren sind). Wegen (2) gibt es 4 Matrizen  $U_{ik}$  mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß

$$(5) \quad \mathfrak{S}_1 U_{11} + \mathfrak{S}_2 U_{21} = \mathfrak{S}'_1, \quad \mathfrak{S}_1 U_{12} + \mathfrak{S}_2 U_{22} = \mathfrak{S}'_2$$

gilt, und die  $n$ -reihige Matrix

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

hat die Determinante  $\pm 1$ . Weiterhin werden die Matrizen aus den skalaren Produkten gebildet:

$$F_1 = (\alpha_i \alpha_k), \quad F_2 = (\beta_i \beta_k), \quad F'_1 = (\gamma_i \gamma_k), \quad F'_2 = (\delta_i \delta_k).$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{11} & \dot{U}_{21} \\ \dot{U}_{12} & \dot{U}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_1 & 0 \\ 0 & F'_2 \end{pmatrix},$$

wobei die zu  $U_{ik}$  spiegelbildliche Matrix mit  $\dot{U}_{ik}$  bezeichnet wurde. Das hat zur Folge:

$$(6) \quad \dot{U}_{11} F_1 U_{11} + \dot{U}_{21} F_2 U_{21} = F'_1.$$

Die Determinanten  $|F'_i|, |F_i|$  sind die GRAMSCHE Determinanten der Vektoren  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , sie sind wegen der Definitheit der Metrik und der linearen



Unabhängigkeit der betr. Vektoren positiv. Bei passender Bezeichnung in (2) darf man

$$(7) \quad |F'_1| \leq |F_1|$$

voraussetzen. Es sei nun  $W$  eine solche reelle orthogonale Matrix, daß  $\dot{W} \dot{U}_{11} F_1 U_{11} W$  Diagonalform annimmt, in der Diagonalen stehen nicht negative Zahlen  $\lambda_r$ , deren Produkt gleich  $|U_{11}|^2 |F_1|$  ist. Transformation von (6) mit  $W$  liefert

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} + \dot{W} \dot{U}_{21} F_2 U_{21} W = \dot{W} F'_1 W.$$

Der zweite Term links stellt die Koeffizientenmatrix einer positiv definiten oder semidefiniten quadratischen Form dar. Determinantenbildung ergibt daher

$$|U_{11}|^2 |F_1| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \leq |F'_1|,$$

und zwar steht im Falle  $|U_{11}| \neq 0$  das Gleichheitszeichen nur dann, wenn  $\dot{W} \dot{U}_{21} F_2 U_{21} W = 0$  ist, was wegen der Definitheit von  $F_2$  die Identität  $U_{21} = 0$  nach sich zieht. Zieht man noch (7) hinzu und beachtet, daß  $U_{11}$  ganze rationale Koeffizienten hat, so kann man schließen: entweder ist  $|U_{11}| = \pm 1$  und  $U_{21} = 0$ , oder  $|U_{11}| = 0$ . Im ersteren Falle ist nach (5):  $\mathfrak{F}'_1 = \mathfrak{F}_1$ , wegen der Orthogonalität von  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  und  $\mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2$  muß dann auch  $\mathfrak{F}'_2 = \mathfrak{F}_2$  sein, und Satz 1 wäre bewiesen.

Unsere Schlußweise zeigt, daß es im Falle  $r_1 = r'_1$  genügt, den Beweis unter der Voraussetzung  $|U_{11}| = 0$  zu führen; das besagt aber nach (5):

$$(8) \quad \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \neq 0.$$

Ist  $r_1 \neq r'_1$ , so darf man bei passender Bezeichnung von  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}'_1$  annehmen, daß  $r_1 < r'_1$  sei. Jetzt folgt (8) aus (5) unmittelbar.

Hierauf stellen wir eine Basis von  $\mathfrak{F}'_1$  von besonderer Beschaffenheit her. Eine möglichst große Anzahl  $p$  von Basisvektoren liege in  $\mathfrak{F}_2$ . Wegen (8) ist  $p > 0$ . Die übrigen sind dann wegen  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$  Summen von je einem Vektor aus  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$ :

$$(9) \quad \mathfrak{F}'_1 = [\varrho_1, \dots, \varrho_p, \alpha_1 + \sigma_1, \dots], \quad (\varrho_r, \sigma_r \in \mathfrak{F}_2, \alpha_r \in \mathfrak{F}_1).$$

Wegen der Maximalität von  $p$  sind die  $\alpha_r$  linear unabhängig.

Zum Beweis von Satz 1 wird jetzt vollständige Induktion bezüglich der Dimension  $n$  angesetzt. Für  $n = 1$  ist die Behauptung selbstverständlich, sie sei für alle kleineren Dimensionen als  $n$  bewiesen. Es wird der Raum  $\bar{R}$  der Restklassen von  $R$  modulo dem durch die  $\varrho_r$  aufgespannten Teilraum betrachtet.  $\bar{R}$  wird in  $R$  realisiert, indem man jeden Vektor  $\iota$  aus  $R$  als eine Summe  $\iota = \iota_0 + \bar{\iota}$  schreibt, wobei  $\iota_0$  von den  $\varrho_r$  linear abhängt und  $\bar{\iota}$  auf den  $\varrho_r$  senkrecht steht.  $\bar{R}$  erfüllt die gleichen Voraussetzungen wie  $R$ , hat aber wegen  $p > 0$  kleinere Dimension. Die Gitter  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}'_1$  liefern Gitter  $\bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathfrak{F}}_1, \bar{\mathfrak{F}}'_1$  in  $\bar{R}$ , dabei ist offenbar

$$(10) \quad \bar{\mathfrak{F}}_1 = \mathfrak{F}_1, \quad \bar{\mathfrak{F}}'_2 = \mathfrak{F}'_2,$$

und  $\bar{\mathfrak{F}}_2, \bar{\mathfrak{F}}'_1$  sind zu  $\bar{\mathfrak{F}}_1, \bar{\mathfrak{F}}'_2$  senkrecht.  $\bar{\mathfrak{F}}$  ist die direkte Summe  $\bar{\mathfrak{F}}_1 + \bar{\mathfrak{F}}_2$  sowie  $\bar{\mathfrak{F}}'_1 + \bar{\mathfrak{F}}'_2$ . Es gilt ferner

$$(11) \quad \bar{\mathfrak{F}}'_2 \cap \bar{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{F}'_2 \cap \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}'_2 \cap \mathfrak{F}_2.$$

Zum Beweise von (11) sei  $t = t_0 + \bar{t}$  ein Vektor in  $\mathfrak{I}_2$ , dessen zu den  $\varrho_v$  senkrechte Komponente  $\bar{t}$  in  $\bar{\mathfrak{I}}'_2$ , d. h. in  $\bar{\mathfrak{I}}'_2 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2$  liegt. Dann liegt  $t_0$  wegen  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2 = \mathfrak{I}'_1 + \bar{\mathfrak{I}}'_2$  in  $\mathfrak{I}'_1$ , also in  $[\varrho_1, \dots] = \mathfrak{I}'_1 \cap \mathfrak{I}_2$ . Mithin liegt  $\bar{t}$  in  $\mathfrak{I}_2$  und daher in  $\mathfrak{I}'_2 \cap \mathfrak{I}_2$ , mithin ist  $\bar{\mathfrak{I}}'_2 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2 \subset \mathfrak{I}'_2 \cap \mathfrak{I}_2$ . Ist umgekehrt  $\bar{t}$  in  $\mathfrak{I}'_2 \cap \mathfrak{I}_2$  enthalten, so liegt  $\bar{t}$  gleichzeitig in  $\bar{\mathfrak{I}}_2$ , da  $\mathfrak{I}'_2$  auf allen  $\varrho_v$  senkrecht steht; also gilt auch  $\mathfrak{I}'_2 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2 \supset \mathfrak{I}'_2 \cap \mathfrak{I}_2$ .

Eine der Induktionsvoraussetzungen besagt nun

$$\bar{\mathfrak{I}}'_2 = \bar{\mathfrak{I}}'_2 \cap \bar{\mathfrak{I}}_1 + \bar{\mathfrak{I}}'_2 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2,$$

das ist wegen (10) und (11)

$$\bar{\mathfrak{I}}'_2 = \bar{\mathfrak{I}}'_2 \cap \mathfrak{I}_1 + \bar{\mathfrak{I}}'_2 \cap \mathfrak{I}_2,$$

oder die zweite der Gleichungen (4). Ferner ergibt der Induktionsansatz in Verbindung mit (10)

$$\bar{\mathfrak{I}}'_1 = \bar{\mathfrak{I}}'_1 \cap \mathfrak{I}_1 + \bar{\mathfrak{I}}'_1 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2.$$

Da die  $\alpha_v$  linear unabhängig sind, ist  $\bar{\mathfrak{I}}'_1 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2 = 0$  und folglich  $\bar{\mathfrak{I}}_1 \supset \bar{\mathfrak{I}}'_1$ . Nun ist aber  $\bar{\mathfrak{I}}'_1 = [\alpha_1 + \bar{\sigma}_1, \dots]$ , wo die  $\bar{\sigma}_v$  die zu den  $\varrho_v$  senkrechten Komponenten der  $\sigma_v$  sind. Nur dann liegen die  $\alpha_v + \bar{\sigma}_v$  in  $\bar{\mathfrak{I}}_1$ , wenn die  $\bar{\sigma}_v = 0$  sind. Daher sind die  $\sigma_v$  von den  $\varrho_v$  linear abhängig, und zwar müssen sich die  $\sigma_v$  aus den  $\varrho_v$  mit ganzen Koeffizienten linear kombinieren lassen, da  $[\varrho_1, \dots, \varrho_p]$  Teil einer Basis von  $\mathfrak{I}$  ist. Folglich kann man die Basis (9) so abändern, daß alle  $\sigma_v = 0$  werden. Die Existenz einer solchen Basis besagt

$$\bar{\mathfrak{I}}'_1 = \bar{\mathfrak{I}}'_1 \cap \mathfrak{I}_1 + \bar{\mathfrak{I}}'_1 \cap \bar{\mathfrak{I}}_2,$$

oder die erstere der Gleichungen (4). Die Gleichungen (3) folgen aus (4) unmittelbar.

Eine Folgerung aus Satz 1 ist

**Satz 2.** Bei zwei Zerlegungen eines Gitters

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \dots = \mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2 + \dots$$

in direkte ihrerseits nicht weiter zerlegbare Summanden stimmen die  $\mathfrak{I}_i$  und die  $\mathfrak{I}'_i$  bis auf die Reihenfolge überein.

### Gitter über Ordnungen algebraischer Zahlen.

$k$  sei jetzt eine algebraische Erweiterung  $h$ -ten Grades des rationalen Zahlkörpers  $k_0$ . Es gebe einen involutorischen Automorphismus  $x \rightarrow \bar{x}$  von  $k$  der Art, daß  $x + \bar{x}$  und  $x\bar{x}$  mitsamt allen konjugierten Zahlen reell sind, und  $x\bar{x}$  sogar total positiv (wenn  $k$  total reell ist, genügt der identische Automorphismus  $x = \bar{x}$  dieser Forderung).  $R$  sei ein metrischer Raum der Dimension  $n$  über  $k$ , und der Automorphismus von  $k$  lasse sich zu einer linearen involutorischen Abbildung  $\xi \rightarrow \bar{\xi}$  mit  $x\bar{\xi} = \bar{x}\xi$  von  $R$  auf sich erweitern. Für das skalare Produkt gelte jetzt:

$$1) \xi \bar{\eta} = \bar{\xi} \eta \in k, \quad 2) (x\xi) \bar{\eta} = x(\xi \bar{\eta}), \quad 3) (\xi + \eta) \bar{\zeta} = \xi \bar{\zeta} + \eta \bar{\zeta},$$

$$4) \xi \bar{\xi} \text{ total positiv für } \xi \neq 0.$$

Zwei Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  stehen senkrecht aufeinander, wenn  $\xi \bar{\eta} = 0$  ist.

Eine beliebige Ordnung  $\mathfrak{o}$  von ganzen Zahlen aus  $k$  sei vorgelegt. Unter einem Gitter verstehen wir im folgenden einen endlichen Modul vom Rang  $n$  in  $R$

bezüglich  $\circ$ . Die Definition einer direkten Summe von Teilgittern kann übernommen werden. Eine Schwierigkeit für die Übertragung der Sätze 1 und 2 beruht auf dem Umstand, daß ein Gitter i. a. keine Basis bezgl.  $\circ$  besitzt. Jetzt hilft ein kleiner Kunstgriff.

Der Raum  $R$  kann zu einem metrischen Raum der Dimension  $hn$  über  $k_0$  gemacht werden, indem man ein neues skalares Produkt

$$\xi \circ \eta = \text{Spur}_{k/k_0} (\xi \bar{\eta}) = \text{Spur}_{k/k_0} (\eta \bar{\xi})$$

erklärt. Für dieses gelten dieselben Postulate wie in der Einleitung.

Zum Beweise von Satz 1 gehe man von einer Basis der Art (9) für  $\mathfrak{I}'_1$  bezgl. der Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen aus. Das Teilgitter  $\mathfrak{I}'_1 \cap \mathfrak{I}_2 = [\varrho_1, \dots, \varrho_p]$  enthält mit einem Vektor  $\varrho$  jedesmal  $h$  bezgl.  $k_0$  linear unabhängige von  $\varrho$  in  $k$  linear abhängende Vektoren. Der auf  $p > 0$  beruhende Induktionsbeweis ist auch jetzt gültig. Wenn der Rang  $r'_1$  von  $\mathfrak{I}'_1$  bezgl.  $k$  größer als der Rang  $r_1$  von  $\mathfrak{I}_1$  ist, muß wieder  $p > 0$  sein. Ist indessen  $r_1 = r'_1$ , so geht man wie im ersten Teil des Beweises für Satz 1 vor, benutzt aber die soeben eingeführte Hilfsmetrik  $\xi \circ \eta = \text{Spur} (\xi \bar{\eta})$ . Man findet: entweder ist  $p > 0$ , oder  $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}'_1$ ,  $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}'_2$ .

**Satz 3.** *Unter obigen Voraussetzungen über  $k$  und die Metrik in  $R$  gelten die Sätze 1 und 2 auch für Gitter bzgl. einer beliebigen Ordnung  $\circ$  ganzer Zahlen in  $k$ .*

(Eingegangen am 7. Januar 1952.)

## The irreducibility of impredicative principles.

By

Hao WANG in Cambridge, Mass., U.S.A.

*1. Introduction.* An impredicative class is a class defined (or definable only) by reference to a totality to which the class itself belongs. A definition of such kind is called an impredicative definition. The most important examples of impredicative definitions are probably those involved in the following situations. (1) In defining the least upper bound of a bounded class of real numbers (say, each as a class of rational numbers) as the real number which is the union of all the real numbers of the class, we refer to the totality of all real numbers. (2) In proving CANTOR's theorem, we assume there is a one-one correspondence between the members of a class and all its subclasses, and consider the subclass consisting of all the members of the given class which do not belong to their corresponding subclasses; in this definition of the special subclass we refer to the totality of all the subclasses of the given class.

It is widely accepted that the distinguishing feature of set theory (the theory of classes) is the presence of impredicative definitions. If we speak in terms of constructionism versus platonism in mathematics, it would be quite justifiable to decide whether to call a theory platonistic according as whether it admits impredicative definitions. If we think along the formalistic line, the boundary between systems known to be consistent and those not so known may very well be drawn at the place where impredicative definitions begin to appear. Therefore, from any of the common approaches to the philosophy of mathematics, the study of impredicative definitions is of interest.

In this paper, we are merely concerned with the special problem concerning the reducibility in number of the axioms for generating impredicative classes. As we know, usual systems of set theory contain principles which provide us with infinitely many ways of generating impredicative sets (classes). For example, in the ZERMELO set theory, we can form such sets by the axiom of separation (Aussonderungsaxiom), which enables us to separate subsets of a given set by all properties expressible in the system. In general, each quantifier in the expression for a property refers to a totality containing the subset to be separated by the property; as we can have indefinitely many quantifiers in these expressions we have infinitely many ways of generating impredicative sets from any given set or sets. We want to investigate whether these ways can be reduced to finitely many. Since we know<sup>1)</sup> that the infinitely many ways of generating predicative sets (viz. sets definable without reference to the totality of these sets) of given objects are reducible to finitely many, the question is also relevant to the comparison of predicative and impredicative sets.

We shall prove that in general it is not possible to reduce the ways of generating impredicative sets to finitely many. We shall present a fairly

<sup>1)</sup> See PAUL BERNAYS, *Journal of Symbolic Logic*, 2, 65 (1937).

complete proof for the theorem that the axioms (including the axiom of separation which is actually a schema consisting of an infinite number of special cases) of the usual ZERMELO set theory (call it  $Z$ ) cannot be replaced by any consistent finite set of provable sentences of the system. The argument is roughly this. If the set of sentences is consistent, it has a denumerable model. It happens that, since the set of sentences is finite, we can express in  $Z$  an enumeration of the objects of the model. Therefore, we can define by the diagonal procedure a new set of positive integers which is provided by the axiom of separation but cannot occur in the model. It follows immediately that the particular case in question of the axiom of separation is not derivable from the given finite set of sentences. Hence, the system  $Z$  is not finitely axiomatizable. We shall then indicate that similar results hold for the ordinary simple theory of types and certain systems used by QUINE and the present author<sup>2</sup>).

2. Irreducibility of the axiom of separation. Let  $Z$  be the Zermelo set theory as refined by FRAENKEL, SKOLEM, and others. More specifically, we shall identify  $Z$  with the following system<sup>3</sup>). It has one kind of variable including  $x, y, z, u, v, w, t, s$ , and one primitive predicate  $\in$  from which we can build up simple sentences  $x \in y$ , etc. and the complex sentences involving logical operators such as  $\supset$  (implication),  $\&$  (conjunction),  $\vee$  (alternation),  $\sim$  (negation),  $=$  (equivalence),  $(x)$  (for all  $x$ ),  $(\exists x)$  (for some  $x$ ). The theorems of  $Z$  are all the sentences derivable with quantification theory (the restricted predicate calculus)<sup>4</sup>) from the following special axioms: (1) the axiom of extensionality stating that two sets with the same members belong to the same sets; (2) the axiom of pairing providing the pair set of any two given sets; (3) the axiom of infinity providing a set with infinitely many members; (4) the axiom of union set providing the union of all members of a given set of sets; (5) the axiom of power set providing the set of all subsets of a given set; (6) the schema of the axiom of substitution according to which, for any set  $x$  and any sentence  $F(u, v)$  that defines a one-many correlation, there is a set  $y$  whose members are just those sets  $u$  for which there are members  $v$  of  $x$  such that  $F(u, v)$ .

It is easy to see that by taking  $(u \in x \& G(u) \& v = v)$  as  $F(u, v)$ , we can derive from (6) the axiom of separation:

2.1. If  $G(u)$  is any sentence of  $Z$  in which the variable  $y$  does not occur, then for all values of the free variables (apart from  $x$ ) in  $G(u)$ ,  $(x)(\exists y)(u)(u \in y = (u \in x \& G(u)))$  is an axiom (or theorem).

Let  $Z_c$  be the system obtained from  $Z$  by adding the following form of the axiom of choice:

<sup>2</sup>) Related results were announced in our note on p. 479 of Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, 36 (1950). However, the proofs sketched there are different and contain an erroneous assertion (namely, the sentence which begins at the bottom of p. 482). J. B. ROSSER has made on p. 143 of Journal of Symbolic Logic 16 (1951) adverse criticisms of our note which do not seem justified; compare our brief "Reply to Professor ROSSER" to appear in that same journal.

<sup>3</sup>) Compare, e. g., the formulation on p. 150 of Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, 35 (1949).

<sup>4</sup>) We assume the formulation given in QUINE's book (Mathematical Logic, 3rd printing, 1951). In this formulation, there are infinitely many axioms and no other variables except those for the objects (or "individuals").

2.2. We can actually write out a sentence  $F(x, y)$  of  $Z$  for which we have: (1)  $F(x, y)$  determines a one-many correlation between values of  $x$  and those of  $y$ ; (2) for every non-empty set  $y$ ,  $(\exists x)(x \in y \ \& \ F(x, y))$ . Then we can derive from GÖDEL's arguments and results:

2.3. If  $Z$  is consistent, then  $Z_c$  is also.

Proof. It is known<sup>5)</sup> that if  $Z$  is consistent, then the system  $\Sigma$  in GÖDEL's monograph<sup>6)</sup> is consistent. Therefore, if  $Z$  is consistent, then  $\Sigma$  plus GÖDEL's choice axiom  $E$  (ibid., p. 6) is also consistent by his model  $A$ . However, GÖDEL actually not only proves for the model  $A$  that there exists a choice function satisfying axiom  $E$ , but he also exhibits the definition of the function (ibid., p. 53, definition 11.8). Since the definition of the choice function given there involves only symbols which occur in both  $Z$  and  $\Sigma$ , not only axiom  $E$ , but 2.2 also holds in the model. Therefore, 2.3 is proved<sup>7)</sup>.

In the usual manner, we can also introduce in  $Z$  the descriptions or  $\iota$ -expressions by defining the contexts in which they can occur<sup>8)</sup>.

2.4.  $x = y$  for  $(z)(z \in x \equiv z \in y)$ .

2.4.1.  $y \in \iota_x F(x)$  for  $(\exists u)(y \in u \ \& \ (x = u \equiv F(x)))$ .

2.4.2.  $\iota_x F(x) \in z$  for  $(\exists v)(v \in z \ \& \ (x = v \equiv F(x)))$ .

Using these  $\iota$ -expressions, we can express and prove in  $Z_c$  theorems falling under the following schema.

2.5. For every given sentence  $R(v, \dots, z, u)$  of  $Z$ , we can actually exhibit a related sentence  $G(v, \dots, z, u)$  such that if  $(v) \dots (z)(\exists u) R(v, \dots, z, u)$  then  $(v) \dots (z) R(v, \dots, z, \iota_u G(v, \dots, z, u))$ .

Proof. We make use of the definite expression  $F(x, y)$  specified in 2.2 and identify  $G$  with the expression  $(\exists y)(u \in y \ \& \ (x \in y \equiv R(v, \dots, z, x))) \ \& \ F(u, y)$ . Then we see from 2.2 that for any given  $v, \dots, z$ , there is one and only one  $u$  such that  $G(v, \dots, z, u)$ .

Let  $Z'_c$  be any consistent system obtained from quantification theory by adding as axioms a definite finite set of sentences of the system  $Z_c$ . We want to prove that not all theorems of  $Z$  are theorems of  $Z'_c$ .

Since  $Z'_c$  contains only a finite number of special axioms, we can write out the conjunction of the closures of these axioms (the closure of an axiom is the result obtained from it by adding at the beginning the general quantifiers for all the free variables in it), and bring the result into an equivalent sentence in prenex normal form:

2.6.  $(x) \dots (y)(\exists z) \dots (\exists w)(u) \dots (v)(\exists t) \dots (\exists s) \dots U(x, \dots, y, z, \dots, w, u, \dots, v, t, \dots, s, \dots, \epsilon, |),$

in such a way that no quantifiers occur in  $U$  and at least one general quantifier occurs at the beginning<sup>9)</sup>. Therefore, 2.6 is consistent (or, in other words,

<sup>5)</sup> See I. L. NOVAK: *Fundamenta Mathematicae* 37, 87 (1950) or J. B. ROSSER and HAO WANG, *Journal of Symbolic Logic* 15, 113 (1950).

<sup>6)</sup> The Consistency of the Continuum Hypothesis, 1940, Princeton University Press.

<sup>7)</sup> We emphasize that if we are patient, we can actually write out, with the constructions in GÖDEL's monograph, the sentence  $F(x, y)$  required in 2.2.

<sup>8)</sup> Alternatively, we could also include  $\iota$  as a primitive symbol; see, e. g., *Journal of Symbolic Logic* 4, 18 (1939). Note that in the definition 2.4.2, we should actually add the case where an  $\iota$ -expression occurs in place of the variable  $z$ .

<sup>9)</sup> See, e. g.: CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, 1944, Princeton University Press, p. 60 and p. 84. The symbol  $|$  in 2.6 is for joint negation from which, as is well-known, all the other truth-functions can be defined.

the negation of 2.6 is not provable in quantification theory) if and only if  $Z'_c$  is consistent; every model of 2.6 is also one of  $Z'_c$ , and vice versa. In short, instead of  $Z_c$ , we need only consider the special sentence 2.6 expressed in the notation of  $Z_c$  and  $Z'_c$ .

To simplify our considerations, we assume that the sentence 2.6 is merely this:

$$2.7. \quad (x) (\exists y) (z) (\exists u) (\exists v) (w) H(x, y, z, u, v, w, \epsilon, |),$$

where  $H$  contains no quantifiers nor any other variables besides those exhibited. Of course 2.6 can actually be more complex than 2.7, but it will be clear that exactly analogous considerations are involved in all cases. So let us confine our attention to 2.7.

We want to prove that we cannot derive all the axioms of  $Z_c$  from 2.7 by quantification theory. We proceed by the indirect method of assuming that we can. Then every theorem of  $Z_c$  would be a theorem of  $Z'_c$  which contains as its special axiom merely 2.7.

Consider the sentence  $(z) (\exists u) (\exists v) (w) H$ . By 2.5, which is a theorem of  $Z_c$  and therefore, by hypothesis, one of  $Z'_c$ , we have:

$$2.8. \quad (x) (z) (\exists u) (\exists v) (w) H(x, \iota_y G(x, y), z, u, v, w, \epsilon, |),$$

for a suitable  $G$ . Similarly, we can also prove in  $Z'_c$  for suitable  $B$  and  $C$ :

$$2.9. \quad (x) (z) (\exists v) (w) H(x, \iota_y G(x, y), z, \iota_u B(x, z, u), v, w, \epsilon, |),$$

$$2.10. \quad (x) (z) (w) H(x, \iota_y G(x, y), z, \iota_u B(x, z, u), \iota_v C(x, z, v), w, \epsilon, |).$$

If  $Z'_c$  is consistent (i. e., contains no contradictory theorems), then the negation of 2.7 is not provable in quantification theory. Therefore, by the completeness of quantification theory<sup>10</sup>, if  $Z'_c$  is consistent, there exists a model  $M(D, I_\epsilon)$  for 2.7. In other words, there is a non-empty domain  $D$  such that by giving suitable truth values to  $\alpha \in \beta$  for all pairs of members  $\alpha$  and  $\beta$  of  $D$  and taking  $D$  as the universe, 2.7 comes out true under the ordinary interpretation of truth functions and quantifiers.

In  $Z_c$  (and therefore, by hypothesis, in  $Z'_c$ ), we can prove, for instance, the existence of the empty set  $0 (= \iota_x (y) (y \in x \equiv \sim y = y))$ . Therefore, there is an object  $0^*$  in  $D$  corresponding to the set  $0$ . There is also an object  $(\iota_y G(0, y))^*$  corresponding to the set  $\iota_y G(0, y)$ , an object  $(\iota_u B(0, 0, u))^*$  corresponding to the set  $\iota_u B(0, 0, u)$ , etc. Consider the subdomain  $D'$  of  $D$  which consists of exactly those objects of  $D$  that correspond to the following sets of  $Z_c$  and  $Z'_c$ :  $0$ ,  $\iota_y G(0, y)$ ,  $\iota_u B(0, 0, u)$ ,  $\iota_v C(0, 0, v)$ ,  $\iota_y G(\iota_y G(0, y), y)$ ,  $\iota_y G(\iota_u B(0, 0, u), y)$ ,  $\iota_u B(0, \iota_y G(0, y), u)$ , etc., where all and only the results obtained by substituting in an arbitrary manner given members of the sequence for all the arguments in  $\iota_y G(x, y)$ ,  $\iota_u B(x, z, u)$ , or  $\iota_v C(x, z, v)$ , occur in the sequence. Then the original interpretation of  $\epsilon$  with the domain restricted to  $D'$  again determines a model  $M(D', I_\epsilon)$  for 2.7 and therefore also one for  $Z'_c$  and  $Z_c$ .

This can be seen<sup>11</sup> from the way the members of  $D'$  are chosen. Thus, since 2.10, being a theorem of  $Z'_c$ , is by hypothesis true in the model  $M(D, I_\epsilon)$ , it remains true if we restrict the range of values which the variables  $x, z, w$  can take to the members of the domain  $D'$ . Moreover, by the definition of  $D'$ , for each pair of members of  $D'$  corresponding to two sets  $x$  and  $z$  of  $Z'_c$ , there is a member of  $D'$  corresponding to  $\iota_v C(x, z, v)$ . Therefore, 2.9 is also true when

<sup>10</sup> See, e. g.: CHURCH, op. cit.

<sup>11</sup> Cf. SKOLEM, on p. 26 of *Les entretiens de Zurich*, Zurich 1941.



we restrict the range of values which the variables  $x, z, v, w$  can take to the members of the domain  $D'$ . Similarly, 2.8 is also true when we restrict the range of the variables  $x, z, u, v, w$  to  $D'$ , because for any  $x$  and  $z$  which correspond to members of  $D'$ , there is a member of  $D'$  corresponding to  $\iota_u B(x, z, u)$ . Finally, since  $\iota_y G(x, y)$  corresponds to a member of  $D'$  if  $x$  does, 2.7 is also true when we restrict the range of values of the variables  $x, y, z, u, v, w$  to  $D'$ ; in other words, 2.7 is true in  $M(D', I_\epsilon)$  (i. e., 2.7 is true if we retain the interpretation of  $\epsilon$  as in  $M(D, I_\epsilon)$  but restrict the domain of objects in the model to  $D'$ ). In short, under the assumption that  $Z_c$  is consistent and  $Z_c$  is reducible to (or contained in)  $Z'_c$ , we reach the conclusion that  $M(D', I_\epsilon)$  is a model for both  $Z_c$  and  $Z'_c$ .

We proceed to give in  $Z_c$  an enumeration of the sets in  $Z_c$  which correspond to the members of  $D'$ , thereby finding a set which has two properties: (1) its existence can be proved in  $Z_c$  by the axiom of separation 2.1; (2) we can prove that it must be different from every member of  $D'$ . When we have found such a set, we can then conclude that  $M(D', I_\epsilon)$  is not a model for  $Z_c$ , and therefore, that our initial assumption of the reducibility of  $Z$  to  $Z'$  is false.

In order to exhibit the enumeration of all the sets of  $Z_c$  and  $Z'_c$  which correspond to members of  $D'$ , we observe first that, as is well-known, we can develop the ordinary theory of natural numbers in  $Z_c$ . For instance, we can define the natural number zero as the empty set of  $Z_c$ , the successor of a set as the set containing the given set as its only member, and the set of natural numbers as the intersection of all sets which include zero and the successor of each of its members. We can then easily introduce variables,  $m, n, k$ , etc. which take natural numbers as values, and define the ordered triple  $\langle m, n, k \rangle$  of three natural numbers as another natural number; we can also define a function  $J$  such that  $J(n)$  is the  $n$ -th ordered triple  $\langle k, m, n \rangle$  ( $k < 4$ ) of natural numbers in some suitable enumeration, and functions  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) such that  $K_i(n)$  is the  $i$ -th term of  $J(n)^{12}$ . To enumerate the sets of  $Z_c$  which correspond to members of  $D'$ , we correlate them with natural numbers in the following manner: Correlate  $m$  with the empty set if  $K_1(m)$  is 0; correlate  $m$  with  $\iota_y G(x, y)$  if  $K_1(m)$  is 1 and  $x$  is correlated with  $K_2(m)$ ; correlate  $m$  with  $\iota_u B(x, z, u)$  if  $K_1(m)$  is 2 and  $x, z$  are respectively correlated with  $K_2(m)$  and  $K_3(m)$ ; correlate  $m$  with  $\iota_v C(x, z, v)$  if  $K_1(m)$  is 3 and  $x, z$  are correlated with  $K_2(m)$  and  $K_3(m)$ . Clearly, in this way each set of  $Z_c$  corresponding to a member of  $D'$  is correlated with one or more natural numbers and each natural number is correlated with a unique such set.

Our problem is to define in  $Z_c$  a function which would give us the enumeration. For this purpose, it is sufficient to define a relation  $e$  such that  $y \in \vec{e}(n)$  if and only if  $y$  belongs to the  $n$ -th set in the enumeration thus described, or, in other words, such that the following statements hold<sup>13</sup>).

$$2.11. \quad K_1(k) = 0 \supset \vec{e}(k) = 0.$$

$$K_1(k) = 1 \supset \vec{e}(k) = \iota_y G(\vec{e}(K_2(k)), y).$$

$$K_1(k) = 2 \supset \vec{e}(k) = \iota_u B(\vec{e}(K_2(k)), \vec{e}(K_3(k)), u).$$

$$K_1(k) = 3 \supset \vec{e}(k) = \iota_v C(\vec{e}(K_2(k)), \vec{e}(K_3(k)), v).$$

<sup>12</sup> Compare our note cited under footnote <sup>9</sup>).

<sup>13</sup> Compare our note just mentioned. The set  $\vec{e}(k)$  consists of all the sets  $y$  such that the relation  $e$  holds between  $y$  and  $k$ .



To find a relation  $e$  which satisfies 2.11, we define a predicate  $Q(n, r)$  meaning that the relation  $r$  provides an enumeration of all the sets which are correlated with natural numbers no greater than  $n$ :

$$2.12. \quad Q(n, r) \text{ for } (m) ((\exists x) x \in \vec{r}(m) \supset m \leq n) \& (k) (k \leq n \supset ((K_1(k) = 0 \& \vec{r}(k) = 0) \vee (K_1(k) = 1 \& \vec{r}(k) = \iota_y G(\vec{r}(K_2(k)), y)) \vee (K_1(k) = 2 \& \vec{r}(k) = \iota_u B(\vec{r}(K_2(k)), \vec{r}(K_3(k)), u)) \vee (K_1(k) = 3 \& \vec{r}(k) = \iota_v C(\vec{r}(K_2(k)), \vec{r}(K_3(k)), v))))).$$

Then  $e$  is, roughly, the sum of such relations  $r$ .

$$2.13. \quad x \in \vec{e}(n) \text{ for } (\exists r) (Q(n, r) \& x \in \vec{r}(n)).$$

Using this relation  $e$ , we can prove<sup>14</sup> the statements listed under 2.11 as theorems of  $Z_e$ .

Since  $Z_e$  contains the axiom of infinity, we can prove that there exists the set of all natural numbers. Hence, by the axiom of separation, we can provide every set of natural numbers which is definable in  $Z_e$ . In particular, we can prove in  $Z_e$  the following theorem:

$$2.14. \quad (\exists y) (m) (m \in y \equiv \sim m \in \vec{e}(m)).$$

But the set  $y$  thus introduced is distinct from all the sets of  $Z_e$  which correspond to members of  $D'$ . Thus, for every set  $a$  that corresponds to a member of  $D'$ , there exists, on account of 2.11, a definite number  $m$  (a definite set of  $Z_e$ ) such that the sentence  $a = \vec{e}(m)$  is a theorem of  $Z_e$  and therefore, by hypothesis, is true in  $M(D', I_\zeta)$ . Suppose there were a number  $n$  such that the sentence  $\iota_y (m) (m \in y \equiv \sim m \in \vec{e}(m)) = \vec{e}(n)$  is true in  $M(D', I_\zeta)$ , then the following sentence would also be true in  $M(D', I_\zeta)$ :  $n \in \vec{e}(n) \equiv \sim n \in \vec{e}(n)$ . Since the last sentence cannot be true in any model of  $Z_e$  or  $Z'_e$ , it follows that the set  $\iota_y (m) (m \in y \equiv \sim m \in \vec{e}(m))$  of  $Z_e$  corresponds to no member of  $D'$ . That means 2.14 has the value falsehood in  $M(D', I_\zeta)$ . But this is impossible, because 2.14 is known to be a theorem of  $Z_e$  and therefore must be true in every model of  $Z_e$ . Hence, if  $Z$  and  $Z_e$  are consistent, our initial assumption that all theorems of  $Z_e$  are provable in  $Z'_e$  must be false.

Since  $Z'_e$  is an arbitrary consistent system whose special axioms are a finite number of sentences of  $Z_e$ , we have:

*Theorem I.*  $Z_e$  is finitely axiomatizable if and only if it is inconsistent; in other words, there exists no consistent finite set (i. e., a finite set which, when added to quantification theory as special axioms, yields no contradictions) of sentences of  $Z_e$  from which we can derive all axioms of  $Z_e$  by using quantification theory.

Of course if  $Z_e$  is inconsistent, there exists a finite subset of the axioms of  $Z_e$  from which we can derive a contradiction and therefore, by quantification theory, every sentence, including the other axioms of  $Z_e$ ; but then the finite set of axioms is no longer a consistent set.

<sup>14</sup> We omit the proofs here. Details of some similar proofs are included in our paper "Certain Predicates Defined by Recursion Schemata", to appear in *Journal of Symbolic Logic*.

If  $Z_c$  is consistent, then every set of theorems of  $Z_c$  forms a consistent set. Moreover, by 2.3,  $Z$  is consistent if and only if  $Z_c$  is. Hence, we have a corollary:

2.15. If  $Z$  is consistent, then there exists no finite set of theorems (here, as elsewhere in this paper, an axiom is also taken as a theorem) of  $Z_c$  from which we can derive all the axioms of  $Z_c$  by using quantification theory.

Let us now consider an arbitrary finite set  $S$  of sentences of  $Z$  and  $Z_c$  which is compatible with the system  $Z_c$  in the sense that the system  $S'$ , obtained from  $Z_c$  by taking as axioms those sentences of the set that are not originally theorems of  $Z_c$ , is consistent. We want to show that not all cases of the axiom of separation 2.1 are provable in  $S$ . For this purpose, we can assume that the axioms (1)–(5) of  $Z$  (i. e., all the axioms of  $Z_c$  except the two schemata of the substitution axiom and the choice axiom) are provable in  $S$ , because given any finite set compatible with  $Z_c$ , the result  $T'$  obtained by adding (1)–(5) to  $T$  is again a finite set compatible with  $Z_c$ , and if some cases of 2.1 are unprovable in  $T'$  then of course they are also unprovable in  $T$ .

Given any such set  $S$ , we can treat the sentences of it in the same way as we treat the special axioms of  $Z_c$ . Thus, we can represent  $S$  by a sentence like 2.7, determine with  $S'$  (viz.  $Z_c$  plus  $S$ ), since  $S$  is compatible with  $Z_c$ , a denumerable model  $M'$  for  $S$  like the model  $M(D', I_c)$  for  $Z_c$ , and define notions answering to 2.12 and 2.13.

Assume that all the cases of the axiom of separation 2.1 are derivable from  $S$ . Then we can also derive from  $S$  theorems answering to the statements of 2.11 because, in order to prove 2.11 in  $Z_c$ , we need only<sup>15</sup> the axiom of extensionality, the axiom of infinity, and the axiom of separation, which are, by hypothesis, all contained in  $S$ .

But if theorems answering to 2.11 are derivable from  $S$ , then we can argue as in the case of  $Z'_c$  and conclude that a sentence corresponding to 2.14 must be at the same time derivable from  $S$  and yet take the value falsehood in the denumerable model  $M'$  (mentioned above) for  $S$ . Since no theorem of a system can be false in any model of the system, we conclude that the hypothesis that all cases of the axiom of separation 2.1 are derivable from  $S$  by quantification theory is false. Hence, we have:

*Theorem II.* There exists no finite set  $S$  of sentences of  $Z$  and  $Z_c$  such that  $S$  is compatible with  $Z_c$  and at the same time we can derive all cases of the separation axiom 2.1 from  $S$ .

If  $Z_c$  is consistent, then every set of theorems of  $Z_c$  is of course compatible with  $Z_c$ . Therefore, by 2.3, we have:

2.16. If  $Z$  is consistent, then there exists no finite set of theorems of  $Z_c$  from which we can derive all cases of the separation axiom.

Let  $Z_1$  be the system obtained from  $Z$  by replacing the substitution axiom (6) by the separation axiom 2.1. Obviously every theorem of  $Z$  or  $Z_1$  is also a theorem of  $Z_c$ . Hence, we have also:

2.17. If  $Z$  is consistent, then there exists no finite set of theorems of  $Z$  (or of  $Z_1$ ) from which we can derive all cases of the axiom of separation.

2.18. If  $Z$  is consistent, then in  $Z$  (or in  $Z_1$ ) we cannot replace the separation axiom by any finite number of its special cases.

<sup>15</sup> Although we need the axiom of choice 2.2 in selecting the predicates  $G$ ,  $B$ , and  $C$  which occur in the definition of  $\epsilon$ , the proof of 2.11 involves only ordinary modes of reasoning about natural numbers and sets of natural numbers. Compare footnote <sup>14</sup>).

In passing, it may be mentioned that our considerations thus far have also established the following conclusion: For every system  $S$ , determined by an arbitrary finite set of sentences of  $Z_c$  which is compatible with  $Z_c$ , a denumerable model for  $S$  can be exhibited in  $Z_c$ . In other words, we can define in  $Z_c$  a relation  $e$  (answering to the relation  $e$  of 2.13 for  $Z_c$ ) for  $S$  and then take as sets of  $S$  those sets of  $Z_c$  each of which is equal to a set  $\vec{e}(m)$  for some  $m$ .

More exactly, we can define:

$$2.19 \quad (\bar{x}) F(\bar{x}) \quad \text{for} \quad (x) ((\exists j) (x = \vec{e}(j)) \supset F(x)), \text{ etc.,}$$

and call the result of replacing all the variables  $x, y$ , etc. in a sentence of  $Z_c$  by  $\bar{x}, \bar{y}$ , etc. the translation of the sentence. Then we can prove in  $Z_c$  the translations of all the theorems of  $S^{16}$ .

Alternatively, we can also identify the translation of a sentence as the result obtained from it by first substituting  $(j) F(\vec{e}(j))$  for  $(x) F(x)$ , etc., and then substituting  $i \in * j$  for  $\vec{e}(i) \in \vec{e}(j)$ , etc. Then we see again that the translations of all the theorems of  $S$  are theorems of  $Z_c$ . Thus, for instance, if  $(x) F(x)$  is provable in  $S$ , then  $(x) ((\exists j) (x = \vec{e}(j)) \supset F(x))$  is provable in  $Z_c$ , then  $(j) (x = \vec{e}(j) \supset F(x))$  and  $(j) F(\vec{e}(j))$  are also. In other words, it is possible to define in  $Z_c$  a predicate  $\in^*$  such that if we replace  $\in$  by  $\in^*$  and replace the variables by variables for natural numbers in the axioms of  $S$ , then the results are all provable in  $Z_c$ .

3. *Other systems.* We proceed to indicate briefly how similar results can be proved for systems other than ZERMELO's set theory.

Consider first certain systems (call them  $M, N$ , and  $K$ ) studied by QUINE and the present author<sup>17</sup>. Each of these systems has the same notation as ZERMELO's system  $Z$  and contains enough theory for handling natural numbers and (predicative and impredicative) classes of natural numbers. Moreover, each of these systems contains infinitely many axioms providing ways of generating impredicative classes, but none of them contains an axiom of choice which would answer to 2.2 of  $Z_c$ . Let us assume we have found such choice axioms for these systems and refer to the results obtained from  $M, N, K$  by adding in each case a new axiom answering to 2.2 as  $M_c, N_c, K_c$  respectively. Furthermore, let us refer to the impredicative principle<sup>18</sup> common to these systems as the class axiom. By arguments exactly analogous to those used in the case of  $Z_c$ , we can prove the following.

3.1. There exists no finite consistent set of sentences of  $M_c$  (resp.  $N_c$  or  $K_c$ ) from which we could derive all axioms of  $M_c$  (resp.  $N_c$  or  $K_c$ ) by using quantification theory.

3.2. There exists no finite set  $S$  of sentences of  $M_c$  (resp.  $N_c$  or  $K_c$ ) such that  $S$  is compatible with  $M_c$  (resp.  $N_c$  or  $K_c$ ) and at the same time we could derive all the cases of the class axiom from  $S$ .

<sup>16</sup> For a more detailed discussion of the general notion of "translation", see Transactions of the American Mathematical Society 71, 283 (1951).

<sup>17</sup> See respectively, Journal of Symbolic Logic 15, 241 (1950); 6, 135 (1941) and Quine's book, op. cit.

<sup>18</sup> Viz. the principle \*202 on p. 162 of QUINE's book, op. cit.

The simple theory of types presents somewhat different problems, because it contains, instead of one, infinitely many types of classes and infinitely many kinds of variables.

Let us consider the following formulation (system  $T$ ) of the simple theory of types founded on natural numbers (as the bottom type entities). (a) Primitive symbols: variables of infinitely many types ( $x_1, y_1, z_1, \dots; x_2, y_2, z_2, \dots; x_3, y_3, z_3, \dots; \dots$ ), the membership predicate  $\in$ , the successor predicate  $Sd$ , the truth-functional connectives, and quantifiers for all types of variables. (b) Sentences are formed by truth functions and quantifiers from simple ones of the forms  $x_1 Sd y_1$ , etc. and  $x_n \in y_{n+1}$ , etc. ( $n$  being 1, 2, 3, ...). (c) Definitions: for every positive integer  $n$ ,  $x_n = y_n$  for  $(z_{n+1})$  ( $x_n \in z_{n+1} \equiv y_n \in z_{n+1}$ ); descriptions or  $\iota$ -expressions can be defined in some usual manner; the number zero 0 for  $\iota_{x_1} (y_1) \sim y_1 Sd x_1$ ; the successor  $Sx_1$  of  $x_1$  for  $\iota_{y_1} x_1 Sd y_1$ ; the class  $N_n$  of natural numbers as the intersection of all classes  $x_n$  such that  $0 \in x_n$  and  $(x_1) (x_1 \in x_n \supset Sx_1 \in x_n)$ . (d) The theorems include those of quantification theory for all types of variables and whatever are derivable from them by the following additional axioms (c 1)–(c 3). (c 1) The Peano axioms (including an axiom of infinity):  $(\exists x_1) (y_1) \sim y_1 Sd x_1, (x_1) (z_1) ((y_1) \sim y_1 Sd x_1 \& (y_1) \sim y_1 Sd z_1 \supset x_1 = z_1), (x_1) (\exists y_1) x_1 Sd y_1, (x_1) (y_1) (z_1) ((x_1 Sd y_1 \& x_1 Sd z_1) \supset y_1 = z_1), (x_1) (y_1) (z_1) ((y_1 Sd x_1 \& z_1 Sd x_1) \supset y_1 = z_1), (x_1) x_1 \in N_n$ . (c 2) The axiom of extensionality: for every positive integer  $n$ ,  $(y_{n+1}) (z_{n+1}) ((x_n) (x_n \in y_{n+1} \equiv x_n \in z_{n+1}) \supset y_{n+1} = z_{n+1})$ . (c 3) The axiom of comprehension. For every positive integer  $n$  and every sentence  $A$  of the system in which  $y_{n+1}$  does not occur, the closure of  $(\exists y_{n+1}) (x_n) (x_n \in y_{n+1} \equiv A)$  is an axiom.

In this system  $T$ , we can define the ordinary arithmetic notions about natural numbers such as addition, multiplication, power, etc. Therefore, we can define in familiar fashion ordered  $n$ -tuples of objects of type  $i$  without going into any higher types. For instance,  $\langle x_1, y_1 \rangle$  for  $2^x \cdot 3^y$ ,  $\{x_i\}_1$  for the unit class of  $x_i$ ,  $\{x_i\}_{j+1}$  for the unit class of  $\{x_i\}_j$ ,  $\langle x_{k+1}, y_{k+1} \rangle$  for  $\iota_{x_{k+1}} (z_k) (z_k \in z_{k+1} \equiv (\exists y_k) ((x_k \in x_{k+1} \& z_k = \langle \{S0\}_{k-1}, \langle x_k, \{0\}_{k-1} \rangle)) \vee (y_k \in y_{k+1} \& z_k = \langle \{0\}_{k-1}, \langle \{0\}_{k-1}, y_k \rangle)))$ , and  $\langle x_{k+j}, y_k \rangle$  for  $\langle x_{k+j}, \{y_k\}_j \rangle$ ,  $\langle x_k, y_{k+j} \rangle$  for  $\langle \{x_k\}_j, y_{k+j} \rangle$ . Moreover, we can also define prenex normal forms of sentences with many kinds of variable in an analogous fashion as in the ordinary case where there is only one kind of variable.

Let  $T_c$  be the system obtained from  $T$  by adding the following form of the choice axiom:

3.3. For every integer  $i$ , we can actually write out a sentence  $F_i(x_i, y_{i+1})$  of  $T$  for which we have: (1)  $F_i(x_i, y_{i+1})$  determines a one-many correlation between values of  $x_i$  and those of  $y_{i+1}$ ; (2) for every non-empty set  $y_{i+1}$ ,  $(\exists x_i) (x_i \in y_{i+1} \& F_i(x_i, y_{i+1}))$ .

Further, let  $T_n$  be the part of  $T_c$  which contains only the sentences and theorems of  $T_c$  that involve no variables of any type higher than  $n$ .

Then we can proceed as in the case of  $Z_c$  and prove:

3.4. There exists no finite consistent set of sentences of  $T_n$  ( $n < 1$ ) from which we could derive all axioms of  $T_n$  by using quantification theory; there exists no finite set  $S$  of sentences of  $T_n$  such that  $S$  is compatible with  $T_n$  and at the same time we could derive from  $S$  all cases of the axiom of comprehension of  $T_n$ . Similar results concerning  $T_c$  as a whole can also be proved analogously. However, since it is anyhow not likely that we could generate classes of

infinitely many types with only a finite number of class axioms, we may expect that the irreducibility of the axiom of comprehension of  $T$  to any finite number of sentences can be proved more directly and without use of any axiom of choice. Our next step is to show that such is indeed the case.

We prove the following theorem.

3.5. If  $T'$  is an arbitrary system obtained by using quantification theories for all types of variables and including as axioms the cases of the axiom of extensionality (c 2) plus a finite number of additional axioms, then either  $T'$  is inconsistent, or it is impossible to derive in  $T'$  all cases of the axiom of comprehension (c 3).

Proof. In the finitely many additional axioms, only variables of up to a definite finite type, say  $n$ , can occur. Let  $T'_n$  be the part of  $T'$  in which only variables of type  $n$  or lower occur. If  $T'$  is consistent, then  $T'_n$  is consistent and has a model. If we extend the model (say) by assuming in each of the types higher than  $n$  a single class which contains as members all the classes of the next lower type, then we obtain a model for  $T'$  which is not satisfied by the axiom of comprehension (c 3). In other words, we can make a translation of  $T'$  into  $T'_n$  so that the translations of all the theorems of  $T'$  are theorems of  $T'_n$ , but there are many cases of (c 3) whose translations are not theorems of  $T'_n$ . For example, we can use the following translation. Replace every sentence or part of a sentence of the form  $x_m \in y_{m+1}$  ( $m > n$ ) by a tautology, say  $(x_1) (x_1 Sd 0 \vee \sim x_1 Sd 0)$ , and one of the form  $x_n \in y_{n+1}$  by  $(x_{n-1}) (x_{n-1} \in x_n \vee \sim x_{n-1} \in x_n)$  if  $n > 1$ , or by  $(x_n Sd 0 \vee \sim x_n Sd 0)$  if  $n$  is 1; after making such replacements everywhere, we omit the vacuous quantifiers which are no longer attached to variables (of types higher than  $n$ ) and call the results the translations in  $T'_n$  of the original sentences of  $T'$ . It can be verified that the translations of all axioms and rules of quantification theories remain valid, the translations of all cases of the axiom of extensionality are theorems of  $T'_n$ , and the translations of the additional axioms are the same as the original sentences; but, for example, the negation of the translation of the case  $(\exists y_{n+1}) (x_n) (x_n \in y_{n+1} \equiv \sim x_n = x_n)$  of (c 3) is also a theorem of  $T'_n$  so that the particular sentence must be independent of the axioms of  $T'$ .

Since this conclusion in 3.5 seems to be something which is plausible even without our proof, we may wish to find some stronger result such as: there exists no infinite set of sentences of which only a finite number concern each type and from which we can derive all the axioms of  $T$ . It happens that we can prove the negation of this. We can prove:

3.6. We can find a subset  $S$  of the set of the sentences of  $T$  which fall under the comprehension axiom (c 3) such that (1) for each  $n$ , only a finite number of sentences of the form  $(\exists y_{n+1}) (x_n) (x_n \in y_{n+1} \equiv A)$  belong to  $S$ , and (2) by substituting the members of  $S$  for all cases of (c 3) of the system  $T$ , we obtain a system in which we can derive all cases of (c 3) and therefore also all the axioms of  $T$ .

Proof. We observe that we can develop in  $T$  the ordinary theory of identity without using the axiom of comprehension, and that we can define the unit class  $\{x_n\}$  of a class or a natural number  $x_n$  in some usual manner. Let us enumerate all the sentences of  $T$  in which none of the variables  $y_2, y_3, y_4, \dots$  occur:  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . Clearly it is sufficient to derive for each given  $n$  all the sentences  $(\exists y_{n+1}) (x_n) (x_n \in y_{n+1} \equiv F_i)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). We assert that the



# Über uneigentliche Lösungen linearer geometrischer Differenzgleichungen.

Von

WOLFGANG HAHN in Berlin.

## § 1. Einleitung.

Die linearen homogenen geometrischen Differenzgleichungen ( $q$ -Differenzgleichungen) haben die Form

$$(1.1) \quad p_n(x) f(q^n x) + p_{n-1}(x) f(q^{n-1} x) + \dots + p_0(x) f(x) = 0 \quad (|q| < 1);$$

unter Benutzung der „geometrischen Differenzen“

$$(1.2) \quad \vartheta f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}, \quad \vartheta^2 f(x) = \vartheta \vartheta f(x), \dots$$

kann man sie auch in die Gestalt

$$(1.3) \quad P_n(x) \vartheta^n f(x) + P_{n-1}(x) \vartheta^{n-1} f(x) + \dots + P_0(x) f(x) = 0$$

bringen. Ihre Theorie kennt zwei Methoden zur Lösung, durch Potenzreihen und durch Reihen der Gestalt

$$(1.4) \quad A_0 + \frac{A_1}{1 - aq^{-1}x} + \frac{A_2}{(1 - aq^{-1}x)(1 - aq^{-2}x)} + \dots$$

Die hier auftretenden Bildungen bezeichne ich als „Potentiellen“; sie sind für beliebige Zeiger durch

$$(1.5) \quad (1 - ax)_\lambda = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 - aq^j x}{1 - aq^{j+\lambda} x}$$

erklärt. Mit dieser Bezeichnung kann man für (1.4) auch

$$(1.6) \quad A_0 + A_1(1 - ax)_{-1} + A_2(1 - ax)_{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(1 - ax)_{-i}$$

schreiben. Mit Hilfe dieser Lösungsansätze läßt sich zeigen, daß (1.1) bzw. (1.3) i. a. Lösungen besitzt, die sich in gewissen Gebieten (Kreisringen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt) analytisch verhalten, und daß sich Fundamentalsysteme von  $n$  Lösungen auswählen lassen, durch die man alle übrigen Lösungen linear und homogen darstellen kann; als Koeffizienten treten dabei  $q$ -periodische Funktionen  $k(x)$  mit  $k(qx) = k(x)$  auf<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Die Potenzreihenlösung ist erstmalig von CARMICHAEL [The general theory of linear  $q$ -difference equations. Amer. J. Math. **34**, 146—168 (1912)] durchgeführt worden, die Lösung durch Reihen (1.4) von RYDÉ [A contribution to the theory of linear homogeneous geometric difference equations ( $q$ -difference equations). Diss. Lund 1921]. Vgl. zur Bibliographie auch C. R. ADAMS, Linear  $q$ -difference equations. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 361—400 (1931). Seitdem hat TRJITZINSKY [Analytic theory of linear  $q$ -difference equations. Acta math. (Uppsala) **61**, 1—10 (1933) u. a.] Gleichungen untersucht, deren Lösungen sich nach gebrochenen Potenzen entwickeln lassen. Die sonstigen neueren Arbeiten auf diesem Gebiet (z. B. von W. N. BAILEY) beziehen sich auf spezielle Funktionen, die durch Gleichungen (1.1) definiert werden können. Die hier aufgeworfene Fragestellung ist bisher noch nicht behandelt worden.



Ein öfter behandeltes Beispiel für eine Gleichung vom Typ (1.3) ist die „hypergeometrische  $q$ -Differenzgleichung“

$$(1.7) \quad (q-1)^2 x(c-abqx) \theta^2 f(x) + (q-1)((a+b-(1+q)ab)x + c-1) \theta f(x) - (1-a)(1-b)f(x) = 0.$$

Wenn man  $q$  gegen eins gehen läßt, entstehen aus den geometrischen Differenzen die gewöhnlichen Ableitungen,

$$(1.8) \quad \lim_{q \rightarrow 1} \theta f(x) = \frac{d}{dx} f(x),$$

und (1.7) geht in die bekannte GAUSSsche Differentialgleichung

$$(1.9) \quad x(x-1)F''(x) - (\gamma - (1-\alpha-\beta)x)F'(x) + \alpha\beta F(x) = 0$$

über; vorher ist  $a = q^x$  usw. zu setzen<sup>2)</sup>. Wir wollen kurz überlegen, wie sich bei diesem Grenzübergang die Lösungen von (1.7) verhalten werden. Aus den Potenzreihen werden ebenfalls Potenzreihen; aus den Reihen (1.4) entstehen offenbar Reihen, die nach fallenden Potenzen von  $1-x$  fortschreiten. (Der in (1.4) eingehende Parameter  $a$  hat den Grenzwert 1.) Da (1.7) die Transformation  $x \rightarrow x^{-1}$  zuläßt, erhält man als Lösungen für (1.9) auch noch Potenzreihen in  $x^{-1}$  und  $(1-x^{-1})^{-1}$ . Bekanntlich hat die GAUSSsche Gleichung aber auch noch Integrale, die nach steigenden Potenzen von  $1-x$  und  $1-x^{-1}$  fortschreiten. Diese könnten nur aus *aufsteigenden* Potentiellenreihen durch Grenzübergang erhalten werden.

Die entsprechende Überlegung läßt sich für jede Gleichung (1.3) durchführen, und es ist zu erwarten, daß sich diese Gleichung auch durch Reihen der Gestalt

$$(1.10) \quad f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} B_i (1-ax)_i$$

lösen läßt. Das ist nun aber keineswegs immer der Fall. Der Ansatz (1.10) führt zwar zu konvergenten Reihen, die aber durchaus nicht immer Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Trotzdem stehen sie zu dieser in enger Beziehung, und ich nenne deshalb eine „Lösung“ der Gestalt (1.10), die man sogar noch allgemeiner in der Form

$$(1.11) \quad g(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i (1-ax)_{n+i}$$

( $x$  ist ein willkürlicher Parameter) ansetzen kann, eine *uneigentliche* Lösung der Gl. (1.1) bzw. (1.3). Unter Beschränkung auf rationale Koeffizienten  $p_r(x)$  bzw.  $P_r(x)$  werde ich in der vorliegenden Note folgendes beweisen:

1. Nicht jede Gleichung hat uneigentliche Lösungen. Wenn aber uneigentliche Lösungen auftreten – dafür gibt es einfache Kriterien – so besitzen sie folgende Eigenschaften:

2. Die Koeffizienten  $B_i$  genügen einer für die Lösungen von (1.3) charakteristischen Rekursionsformel.

3. Die uneigentlichen Lösungen genügen der Ausgangsgleichung an unendlich vielen Argumentstellen, die eine geometrische Reihe mit  $q$  als Quotienten bilden.

4. Die uneigentlichen Lösungen sind eigentliche Lösungen einer gewissen angebbaren  $q$ -Differenzgleichung von höherer Ordnung.

<sup>2)</sup> Vgl. auch für das Folgende W. HAHN: Beiträge zur Theorie der HEINESchen Reihen. Math. Nachr. (Berlin) 2, 340–379 (1949).



5. Die nach rechts abbrechenden uneigentlichen Lösungen sind stets auch eigentliche Lösungen.

6. Die nach links abbrechenden Lösungen sind im wesentlichen ganze Funktionen. Unter gewissen Bedingungen bilden sie ein „Fundamentalsystem aus mehr als  $n$  Funktionen“ derart, daß sich jede Lösung der Ausgangsgleichung durch sie linear und homogen mit  $k$ -Funktionen ausdrücken läßt. Der allgemeine funktionentheoretische Charakter der eigentlichen Lösungen ist dann leicht zu übersehen.

7. Wenn sich die Gl. (1.3) durch den Grenzübergang  $q \rightarrow 1$  in eine lineare homogene Differentialgleichung überführen läßt, so gehen die passend normierten nach links abbrechenden uneigentlichen Lösungen in Lösungen der Differentialgleichung über, und zwar erhält man die Reihen, die die Differentialgleichung in der Umgebung eines von Null verschiedenen Punktes auflösen.

Im § 2 untersuche ich zunächst einige funktionentheoretische Eigenschaften der Potentiellenreihen. Im § 3 beweise ich, von dem Ansatz (1.11) ausgehend, die Haupteigenschaft 2., aus der sich die weiteren leicht ableiten lassen. Im letzten Paragraphen erläutere ich die im allgemeinen Fall etwas unübersichtlichen Rechnungen an einigen Beispielen aus der Theorie der HEINESchen Reihen.

## § 2. Allgemeines über Potentiellenreihen.

Wir betrachten eine beiderseits unendliche Reihe der Gestalt

$$(2.1) \quad h(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i (1-x)_{n+i}.$$

Darin ist  $n$  eine willkürliche Zahl. Aus (1.5) folgt

$$(2.2) \quad (1-x)_{n+i} = (1-x)_n (1-q^n x)_i,$$

$$(2.3) \quad (1-x)_{-n} = (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{-n} \frac{1}{(1-qx^{-1})_n} \quad (n \text{ positiv ganz}).$$

Daher kann man schreiben

$$(2.4) \quad h(x) = (1-x)_n \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i (1-q^n x)_i + \sum_{i=1}^{\infty} A_{-i} (-1)^i \frac{q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{(xq^n)^i (1-q^{1-n}x^{-1})_i} \right).$$

Die Potentiellen bleiben für endliches  $x$  beschränkt. Daher konvergiert die erste Reihe auf der rechten Seite von (2.4), wenn  $\sum_{i=0}^{\infty} |A_i|$  konvergiert, für alle

endlichen  $x$ . Die andere Reihe konvergiert sicher außerhalb eines gewissen Kreises, sofern nur die Koeffizienten  $A_{-i}$  nicht stärker wachsen als  $q^{\frac{i(i+1)}{2}}$ . Unter diesen Annahmen stellt die beiderseits unendliche Reihe (2.1) eine analytische Funktion für endliche  $x$  dar, wenn man den Nullpunkt sowie die Punkte  $q^{1-n}, q^{2-n}, \dots$  durch kleine Kreise ausschließt. Die Funktion hat am Nullpunkt und im Unendlichen wesentliche Singularitäten; die andern Stellen sind einfache Pole.

Wenn die Koeffizienten mit negativen Indizes alle verschwinden, entsteht eine aufsteigende Potentiellenreihe

$$(2.5) \quad \sum_{i=0}^{\infty} A_i (1-x)_i$$

( $x$  ist gleich Null gesetzt); sie stellt eine ganze Funktion dar, wenn  $\sum_{i=0}^{\infty} |A_i|$  konvergiert. (Auf den Fall bedingter Konvergenz wollen wir hier nicht eingehen.) Zur Abschätzung des Wachstums von (2.5) überlegen wir uns, daß es dann sicher eine positive Zahl  $p < 1$  gibt, derart daß

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} A_i (1-x)_i \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} p^i (1+|x|)^i$$

ist. Der Stern rechts soll bedeuten, daß die Potentiellen mit  $|q|$  zu bilden sind. Nun steht rechts aber eine HEINESche Reihe<sup>3)</sup>: setzt man

$$(2.6) \quad {}_2\varphi_1(r, s; t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-r)_i (1-s)_i}{(1-t)_i (1-q)_i} z^i,$$

so ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i (1+|x|)^i = {}_2\varphi_1(-|x|, |q|; 0; p)^*.$$

Für die Reihen (2.6) hat schon HEINE die Transformationsformel

$$(2.7) \quad {}_2\varphi_1(r, s; t; z) = \frac{(1-r)_{\infty} (1-sz)_{\infty}}{(1-t)_{\infty} (1-z)_{\infty}} {}_2\varphi_1\left(\frac{t}{r}, z; sz; r\right)$$

abgeleitet. Läßt man hierin  $r$  über alle Grenzen wachsen, so hat die Reihe auf der rechten Seite den endlichen Grenzwert

$$(2.8) \quad {}_1\varphi_1(z; sz; t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{(1-z)_i}{(1-sz)_i (1-q)_i} t^i.$$

Man schließt daraus, daß für absolut große  $r$  die Funktion  ${}_2\varphi_1(r, s; t; z)$  von der Größenordnung des Produktes  $(1-r)_{\infty}$  ist; es ist aber

$$(2.9) \quad (1-r)_{\infty}^* \sim \text{const.} \exp\left(-\frac{\log^2 r}{2 \log |q|}\right) r^{\frac{1}{2}}.$$

Also ist die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i (1+|x|)^i$$

von der Größenordnung von  $(1+|x|)_{\infty}^*$ ; die Reihe (2.5) kann dann auch nur höchstens diese Größenordnung haben. Es folgt:

Wenn die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$  absolut konvergiert, so stellt die entsprechende aufsteigende Potentiellenreihe (2.5) eine ganze Funktion dar, die für absolut große Argumente höchstens wie die Funktion

$$\exp\left(-\frac{\log^2 |x|}{2 \log |q|}\right) |x|^{\frac{1}{2}}$$

wächst.

<sup>3)</sup> Vgl. das Zitat in Anm. 2

<sup>4)</sup> Vgl. HAHN: Über die höheren HEINESchen Reihen und eine allgemeine Theorie der sog. speziellen Funktionen. Math. Nachr. (Berlin) 3, 257–294 (1950), Formel (2.1).

Wir wollen noch etwas der Frage nachgehen, wann sich eine gegebene ganze Funktion

$$(2.10) \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

in eine Potenzenreihe entwickeln läßt, und setzen dazu

$$(2.11) \quad g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} B_s (1 - kx)_s,$$

$k$  ist ein zunächst willkürlicher Parameter; die Koeffizienten  $B_s$  sind zu bestimmen. Wir führen die Abkürzungen

$$(2.12) \quad [n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1] \dots [n-r+1]}{[1][2] \dots [r]},$$

die sog. „basischen Zahlen“, ein und bilden nach (1.2)

$$(2.13) \quad \partial^r x^i = [i][i-1] \dots [i-r+1] x^{i-r}, \quad r = 1, 2, \dots, i$$

$$(2.14) \quad \partial^r (1 - kx)_s = (-1)^r k^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} [s][s-1] \dots [s-r+1] (1 - q^r kx)_{s-r}.$$

Wir wenden den Operator  $\partial$   $r$ -mal auf die Gleichung (2.11) an und erhalten unter Berücksichtigung von (2.10)

$$(2.15) \quad \sum_{i=r}^{\infty} a_i [i][i-1] \dots [i-r+1] x^{i-r} = k^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} (-1)^r \sum_{s=r}^{\infty} B_s [s][s-1] \dots [s-r+1] (1 - q^r kx)_{s-r}.$$

Setzen wir hierin  $x = k^{-1} q^{-r}$ , so verschwinden rechts alle Glieder der Reihe bis auf das erste, und es folgt

$$(2.16) \quad B_r = (-1)^r k^{-r} q^{\frac{r(r-1)}{2}} \frac{q}{[1][2] \dots [r]} \sum_{i=r}^{\infty} a_i [i][i-1] \dots [i-r+1] (k^{-1} q^{-r})^{i-r}.$$

Wenn die rechte Seite von (2.11) überhaupt für gewisse  $x$  konvergieren soll, so muß sie für  $x = 0$  konvergieren; es muß mithin  $\sum_{s=0}^{\infty} B_s$  konvergieren. Es ist aber

$$(2.17) \quad \sum_{r=0}^{\infty} B_r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2}} \sum_{i=r}^{\infty} a_i \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} k^{-i} q^{-ir}.$$

Die innere Reihe konvergiert bei festem  $r$  absolut, da die Ausdrücke  $\begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix}$  beschränkt sind. Wir denken uns in (2.17) überall die Absolutstriche gesetzt und ordnen rechts, zunächst formal, um. Es entsteht

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i k^{-i}| \sum_{r=0}^i \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} |q|^{\frac{r(r+1)}{2} - ir} = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i k^{-i}| (1 + |q|^{1-i})_i.$$

Das Quotientenkriterium liefert für die letzte Reihe die Ungleichung

$$\left| k^{-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| (1 + |q|^{-i}) \leq \varepsilon < 1, \quad \text{für große } i$$

als hinreichende Bedingung dafür, daß sich  $g(x)$  in der Form (2.11) darstellen läßt. Sie ist bei genügend großen  $i$  für jedes von Null verschiedene  $k$  erfüllt, wenn  $a_i = o\left(q^{\frac{i(i-1)}{2}}\right)$  ist. Ist dagegen  $a_i = O\left(q^{\frac{i(i-1)}{2}}\right)$ , so gilt sie jedenfalls

für genügend große  $k$ . Daß die Entwicklung im letzten Fall wirklich nicht für beliebige  $k$  realisierbar ist, zeigt das Beispiel

$$g(x) = (1-x)_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{(1-q)_i} x^i.$$

Hier ist

$$\partial^r g(x) = (-1)^r \frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{(1-q)^r} (1-q^r x)_\infty,$$

und die obigen Formeln gehen in

$$B_r = k^{-r} \frac{(1-k^{-1})_\infty}{(1-q)^r}$$

$$B_r = (1-k^{-1})_\infty \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k^{-r}}{(1-q)^r}$$

über. Die letzte Reihe konvergiert aber nur für  $|k| > 1$ .

Das Ergebnis, das in Einklang mit dem steht, was oben über die Wachstumsordnung der Potentiellenreihen bewiesen worden ist, ist ein einfaches Beispiel für eine Entwicklung nach Polynombasen<sup>5)</sup> und hätte sich auch aus den hierauf bezüglichen allgemeineren Untersuchungen folgern lassen.

### § 3. Existenz der uneigentlichen Lösung.

Wir kehren nun zu der geometrischen Differenzengleichung (1.1) bzw. (1.3) zurück und machen die folgenden Voraussetzungen. 1. Die Koeffizienten sollen ganze rationale Funktionen von  $x$  sein. 2. Die Gleichung soll mindestens eine Lösung haben, die bei Null endlich ist und nicht verschwindet. Das läßt sich durch eine Transformation der Gestalt  $f(x) \rightarrow x^k f(x)$  unter Umständen in Verbindung mit  $x \rightarrow x^{-1}$  immer erreichen, wenn in (1.1) der Grad von  $p_n(x)$  von keinem anderen Koeffizientengrad übertroffen wird. 3. Der höchste Koeffizient soll die Nullstelle  $q^{1-n}$  haben; das läßt sich durch eine Transformation  $x \rightarrow ax$  immer erreichen. Wir denken uns dementsprechend die Ausgangsgleichung in der Gestalt

$$(3.1) \quad (q-1)^n (1-qx)_{n-1} P_n(x) \partial^n f(x) + \\ + (q-1)^{n-1} (1-qx)_{n-2} P_{n-1}(x) \partial^{n-1} f(x) + \\ + \dots + (q-1) P_1(x) \partial f(x) + P_0(x) f(x) = 0$$

vorgelegt, was sich durch Multiplikation mit  $(1-qx)_{n-2}$  immer erreichen läßt. Wir erklären noch Zahlen  $p_{ik}$  durch

$$(3.2) \quad (1-x) P_0(x) = \sum_{r=0}^s p_{0k} x^k; \quad q^{\frac{r(r-1)}{2}} P_r(x) = \sum_{k=0}^s p_{rk} x^k \quad (r=1, 2, \dots, n);$$

dabei soll wenigstens ein  $p_{rs}$  von Null verschieden sein.  $s$  ist mindestens eins. Wir versuchen nun die Gleichung (3.1) durch eine aufsteigende Potentiellenreihe zu lösen und setzen zu diesem Zwecke

$$(3.3) \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j (1-x)_{k+j}.$$

Durch diesen Ansatz erfassen wir auch die Lösungen nach absteigenden Reihen; der „Lösungsparameter“  $\lambda$  bleibt zunächst unbestimmt.

<sup>5)</sup> WHITTAKER, J. M.: Sur les séries de base de polynomes quelconques. Paris 1949.

Wir erhalten unter Benutzung von (2.14) und (2.15)

$$\sum_{r=1}^n q^{\frac{r(r-1)}{2}} P_r(x) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (1 - q^{\lambda+j}) (1 - q^{\lambda+j-1}) \dots (1 - q^{\lambda+j-r+1}) \times \\ \times C_j (1 - xq)_{\lambda+j-1} + (1-x) P_0(x) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j (1 - xq)_{\lambda+j-1} = 0.$$

Man kann die Polynome nach Potentiellen entwickeln. Es ist – vgl. (3.2) –

$$(3.4) \quad \sum_{k=0}^s p_{rk} x^k = \sum_{k=0}^s p_{rk} \sum_{v=0}^k (-1)^v \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} q^{-kv + \frac{v(v+1)}{2}} (1 - xq^{\lambda+j})_v q^{-k(\lambda+j)} \\ = \sum_{v=0}^s (-1)^v q^{\frac{v(v+1)}{2}} (1 - xq^{\lambda+j})_v \sum_{k=v}^s \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} q^{-k(\lambda+j+v)} p_{rk},$$

und wenn man dies einsetzt, folgt

$$(3.5) \quad \sum_{r=0}^n \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j (1 - q^{\lambda+j}) \dots (1 - q^{\lambda+j-r+1}) \sum_{v=0}^s (-1)^v q^{\frac{v(v+1)}{2}} (1 - qx)_{\lambda+j+v-1} \times \\ \times \sum_{k=v}^s \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} q^{-k(\lambda+j+v)} p_{rk} = 0.$$

Hier und im folgenden ist das  $r$ -gliedrige Produkt  $(1 - q^{\lambda+j}) \dots (1 - q^{\lambda+j-r+1})$  für  $r=0$  gleich 1 zu setzen. Hierin vertauschen wir die Reihenfolge der Summationen und ordnen nach den Potentiellen um. Es entsteht

$$(3.6) \quad \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (1 - qx)_{\lambda+t} \sum_{v=0}^s (-1)^v q^{\frac{v(v+1)}{2}} C_{t-v+1} \sum_{r=0}^n (1 - q^{\lambda+t-v+1}) \dots (1 - q^{\lambda+t-v-r+2}) \times \\ \times \sum_{k=v}^s \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} q^{-k(\lambda+t+1)} p_{rk} = 0.$$

(Die Berechtigung dieser Maßnahme wird weiter unten geprüft werden.) Die Gleichung ist erfüllt, wenn die  $C_t$  der Rekursionsformel

$$(3.7) \quad \sum_{r=0}^s C_{t-v+1} (-1)^v q^{\frac{v(v+1)}{2}} \sum_{r=0}^n (1 - q^{\lambda+t-v+1}) \dots (1 - q^{\lambda+t-v-r+2}) \times \\ \times \sum_{k=v}^s \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} q^{-k(\lambda+t+1)} p_{rk} = 0$$

genügen. Wir wollen die Koeffizienten dieser Rekursionsformel, die ja von  $q^t$  abhängen, mit  $S_r(q^t)$  bezeichnen. Es sei  $y = q^{t+\lambda+1}$ . Dann ist

$$(3.8) \quad S_r(y) = (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2}} \sum_{r=0}^n (1 - yq^{-r}) (1 - yq^{-r-1}) \dots (1 - yq^{-r-r+1}) \times \\ \times \sum_{k=r}^s \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} y^{-k} p_{rk}.$$

Insbesondere ist

$$(3.9) \quad S_0(y) = \sum_{r=0}^n (1 - y) (1 - yq^{-1}) \dots (1 - yq^{-r+1}) \sum_{k=0}^s y^{-k} p_{rk}, \\ S_s(y) = (-1)^s q^{\frac{s(s+1)}{2}} y^{-s} \sum_{r=0}^n (1 - yq^{-s}) (1 - yq^{-s-1}) \dots (1 - yq^{-s-r+1}) p_{rs}.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens kann es sein, daß in den  $S_r(y)$  die negativen Potenzen von  $y$  nur scheinbar auftreten. Ist beispielsweise

$\sum_{r=0}^n p_{rs} = 0$ , so wird in den  $S_r(y)$  höchstens noch  $y^{-s+1}$  vorkommen; entsprechende lineare Beziehungen sind Voraussetzung für das Verschwinden der übrigen negativen Potenzen. Im allgemeinen werden solche Beziehungen jedoch nicht bestehen, und dann ist die Reihennummern, die zu (3.6) führte, nicht zulässig. Denn in dem Faktor von  $(1-qx)_{1+t}$  ist ja dann  $y^{-ts}$  enthalten, und diese Zahl wächst im aufsteigenden Teil der Reihe über alle Grenzen: die umgeordnete Reihe ist divergent. In diesem Fall wird also die Reihe (3.3) keine Lösung unserer Differenzgleichung ergeben, es sei denn, daß die  $C_t$  von einem Index  $T$  an alle verschwinden (was wir z. B. später mittels des Lösungsparameters erzwingen werden). Sonst können wir nur schließen, daß die Reihe (3.3) die Gleichung in den Punkten der Folge  $x = q^{-1}, q^{-2}, \dots$  erfüllt; denn dort hat der divergente Zweig der Reihe, da er nur endlich viele von Null verschiedene Glieder enthält, keinen Einfluß. Eine solche Reihe, deren Koeffizienten zwar die für eine Lösung charakteristische Rekursionsformel (3.7) erfüllen, trotzdem aber der Gleichung nur in einer gewissen Punktfolge Genüge leisten, wollen wir eine „uneigentliche“ Lösung nennen. (Bei Differentialgleichungen kann so etwas nicht passieren.)

Wir müssen noch die Konvergenz der Reihen nachweisen und wenden dazu den Satz von POINCARÉ auf die Differenzgleichung (3.7) an<sup>6)</sup>. Die ganzzahlige Veränderliche ist der Index  $t$ . Da  $q^t = 0$  ist, wenn  $t$  über alle Grenzen wächst, muß man die Grenzwerte

$$(3.10) \quad w_i = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{S_{s-i}(y)}{S_s(y)}$$

für  $y \rightarrow 0$  bilden. Es sei nun zunächst

$$\sum_{r=0}^n p_{rs} \neq 0, \text{ d. h. } \lim_{y \rightarrow 0} y^s S_0(y) \neq 0.$$

Dann lassen sich die  $w_i$  leicht berechnen: es ist

$$(3.11) \quad w_{s-i} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{S_i(y)}{S_0(y)} = \frac{\sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix} p_{rs} q^{\frac{i(i+1)}{2}} (-1)^i}{\sum_{r=0}^n p_{rs}} = (-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix}.$$

Wir bilden hiermit die charakteristische Gleichung

$$(3.12) \quad Z^s + w_1 Z^{s-1} + \dots + w_s = \sum_{i=0}^s (-1)^i \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i+1)}{2}} Z^{s-i} \equiv (Z - q)_s = 0.$$

Ihre Wurzeln sind  $q, q^2, \dots, q^s$ , also alle dem Betrag nach kleiner als 1. Wählen wir nun irgendein  $\alpha$  zwischen  $|q|$  und 1, so liefert der Satz von POINCARÉ (in seiner schwächsten Fassung) für die in (3.7) erscheinenden Größen  $C$  die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_t \alpha^{-t} = 0 \text{ oder } C_t = o(\alpha^t).$$

Damit ist die Konvergenz des aufsteigenden Teils der Reihe (3.3) gesichert. — Ist

$\sum_{r=0}^n p_{rs} = 0$ , so kommt es auf das Verhalten von

$$(3.13) \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{s-1} S_0(y) = \sum_{r=0}^n p_{rs-1} - \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} q^{1-r} p_{rs}$$

<sup>6)</sup> Vgl. z. B. NÖRLUND: Differenzenrechnung, Kap. 10. Berlin 1924.

an. Wir wollen annehmen, daß dieser Wert von Null verschieden ist. Es wird dann

$$(3.14) \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{s-1} S_r(y) = (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2}} \left( \begin{bmatrix} s-1 \\ r \end{bmatrix} \sum_{r=0}^n p_{rs-1} - \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} q^{-r} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} q^{1-r} p_{rs} \right);$$

für die Gleichung erhält man

$$(Z - q)_{s-1} \left( Z \sum_{r=0}^n p_{rs-1} - (Z-1) \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} q^{1-r} p_{rs} \right) = 0.$$

Man muß also hier, wenn der POINCARÉsche Satz angewandt werden soll, die Ungleichung

$$\left| \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} q^{1-r} p_{rs} \right| < \left| \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} q^{1-r} p_{rs} - \sum_{r=0}^n p_{rs-1} \right|$$

voraussetzen. (Andernfalls kann man wirklich die  $C_t$  so bestimmen, daß die mit ihnen gebildete Reihe nicht konvergiert.) Ist auch (3.13) gleich Null, so muß man entsprechend weitergehen, um Bedingungen für die Anwendbarkeit des Satzes zu erhalten. Wir wollen hier nur noch die Bedingungen aufschreiben, die bestehen müssen, wenn in den Funktionen (3.8) alle negativen Potenzen kompensiert werden, so daß nur eigentliche Lösungen auftreten. Die linearen Beziehungen zwischen den  $p_{rk}$  müssen dann die Form

$$(3.15) \quad \sum_{r=0}^n q^{-jr} p_{rs} = 0 \quad (j = 0, \dots, s-1),$$

$$\sum_{r=0}^n q^{-jr} p_{rs-1} = 0 \quad (j = 0, \dots, s-2), \dots, \sum_{r=0}^n p_{r1} = 0$$

haben; (3.12) nimmt die Gestalt

$$(3.16) \quad (Z - q^{1-s})_s \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} q^{(1-r)s} p_{rs} - Z(Z - q^{2-s})_{s-1} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} r \\ s-1 \end{bmatrix} q^{(1-r)(s-1)} p_{rs-1} + \dots + (-1)^s Z^s \sum_{r=0}^n p_{r0} = 0$$

an. Für die Konvergenz der Reihe ist erforderlich, daß diese Gleichung nur Wurzeln eines Betrages kleiner als Eins hat.

Der POINCARÉsche Satz gestattet auch, die Konvergenz des absteigenden Teiles der Reihe (3.3) zu prüfen. Man muß dazu in (3.7)  $t$  durch  $-t$  ersetzen, d. h. man muß die Rekursionsformel von rechts nach links lesen. Da dann  $y$  mit wachsendem  $t$  gegen Unendlich geht, hat man anstelle von (3.10) die Grenzwerte

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{S_r(y)}{S_s(y)}$$

zu betrachten. Damit sie existieren, ist zu verlangen, daß der Grad von  $S_s(y)$  in  $y$  nicht kleiner ist als der irgendeines  $S_r(y)$ , d. h. es muß  $p_{ns} \neq 0$  sein. (Das läuft darauf hinaus, daß (3.1) ein im Unendlichen reguläres Lösungssystem besitzt.) Wir brauchen die Gleichung (3.10) diesmal nicht zu bilden. Es genügt zu wissen, daß ihre Wurzeln beschränkt sind (was außer Frage steht), da ja nach der im Anschluß an (2.4) angestellten Überlegung

$C_t = O\left(q^{-\frac{i(i+1)}{2}}\right)$  für die Konvergenz genügt, wenn man den Nullpunkt und etwaige Nullstellen der Nenner in der Reihe (3.3) ausschließt.

Damit ist also nachgewiesen, daß die beiderseits unendliche Potentiellenreihe im allgemeinen in der ganzen Ebene, von einzelnen Punkten abgesehen, konvergiert. Das Verfahren liefert zugleich den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz in jedem endlichen Gebiet, aus dem der Nullpunkt und die Nullstellen der Nenner durch kleine Kreise ausgeschlossen sind; denn wir hatten ja die Konvergenz der Reihe durch Majorisierung mittels einer von  $x$  unabhängigen konvergenten Reihe gezeigt.

#### § 4. Die $q$ -Differenzengleichung der uneigentlichen Lösungen.

Wir wollen zeigen, daß die uneigentlichen Lösungen eigentliche Lösungen einer bestimmten  $q$ -Differenzengleichung von i. a. höherer Ordnung als (3.1) sind. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Rekursionsformel (3.7) mit der kleinsten Potenz  $y^v$  von  $y = q^{\lambda+t+1}$  multipliziert, die die negativen Potenzen beseitigt. Es wird also  $0 \leq v \leq s$  sein. Wir denken uns dann die Koeffizienten der Rekursionsformel nach den „basischen Zahlen“

$$[\lambda + t - r] = \frac{q^{\lambda+t-r} - 1}{q - 1}$$

entwickelt, so daß die rechte Seite von (3.7) folgende Gestalt erhält:

$$\begin{aligned} & (d_{s0} + [\lambda + t + 1] d_{s1} + [\lambda + t + 1] [\lambda + t] d_{s2} + \dots \\ & \quad + [\lambda + t + 1] [\lambda + t] \dots [\lambda + t - n - v + 2] d_{s, n+v}) C_{t+1} \\ & + (d_{s-1,0} + [\lambda + t] d_{s-1,1} + [\lambda + t] [\lambda + t - 1] d_{s-1,2} + \dots \\ & \quad + [\lambda + t] [\lambda + t - 1] \dots [\lambda + t - n - v + 2] d_{s-1, n+v-1}) C_t \\ & + \dots \dots \dots \\ & + (d_{00} + [\lambda + t - s + 1] d_{01} + [\lambda + t - s + 1] [\lambda + t - s] d_{02} + \dots \\ & \quad + [\lambda + t - s + 1] [\lambda + t - s] \dots [\lambda + t - n - v + 2] d_{0, n-v-s+1}) C_{t-s+1}. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} C_t (1-x)_{\lambda+t} = h(x)$$

und beachtet, daß

$$\begin{aligned} & \sum_{t=-\infty}^{+\infty} C_{t-j} [\lambda + t - j] [\lambda + t - j - 1] \dots [\lambda + t - j - k + 1] (1-x)_{\lambda+t} \\ & = (-1)^j q^{-\frac{j(j-1)}{2} - kj} (1-x)_{j+k} \partial_x^k h(x q^j), \end{aligned}$$

so ergibt sich nach Multiplikation der Rekursionsformel mit  $(1-x)_{\lambda+t}$  und Summation über alle  $t$  — die jetzt zulässig ist, weil die negativen Potenzen beseitigt sind — eine  $q$ -Differenzengleichung der Ordnung  $n+v$  für  $h(x)$ ; sie enthält nämlich das Glied  $\partial_x^n h(x q^v)$ . Ist  $v=0$ , so erhält man natürlich die Ausgangsgleichung (3.1) wieder. Die Gleichung für  $h(x)$  werden wir im folgenden als „Hüllgleichung“ bezeichnen.

Wir haben bisher noch keinen Gebrauch davon gemacht, daß die Potentiellenreihen einen willkürlichen Parameter  $\lambda$  enthalten. Durch spezielle Wahl dieses Parameters kann man Lösungsreihen mit bestimmten Eigenschaften konstruieren, z. B. solche, die nur aus einem aufsteigenden oder nur aus einem absteigenden Ast bestehen, die also nach links bzw. rechts abbrechen. Man muß dazu, wie es von den linearen Differentialgleichungen her bekannt



ist,  $\lambda$  so wählen, daß in der Rekursionsformel (3.7) der Koeffizient von  $C_0$  bzw.  $C_s$  verschwindet. Die dazu gehörigen Werte von  $q^{\lambda}$  sind die Wurzeln der Gleichungen  $y^s S_0(y) = 0$  bzw.  $y^v S_s(y) = 0$ . Die Grade dieser beiden Polynome in  $y$  sind höchstens  $n + v$  bzw.  $n - s + v$ . Diese Zahlen geben also an, wieviel nach links bzw. nach rechts abbrechende uneigentliche Lösungen höchstens auftreten können. Die Ordnung der Hüllgleichung ist  $n + v$ . Die nach rechts abbrechenden Potentiellenreihen können also niemals ein Fundamentalsystem der Hüllgleichung bilden, da ihre Anzahl dazu nicht ausreicht. Für die nach links abbrechenden Reihen, die die Gestalt

$$(4.1) \quad g_{\lambda}(x) = (1-x)_{\lambda} \text{ mal ganze Funktion}$$

haben, ist dies dagegen sehr wohl möglich, wenn nämlich die Gleichung  $y^s S_0(y) = 0$  genau  $n + v$  Wurzeln hat; dabei darf der Quotient von je zwei dieser Wurzeln keine ganzzahlige Potenz von  $q$  sein. Man erhält dann  $n + v$  verschiedene Reihen vom Typ (4.2) und muß nun noch prüfen, ob diese linear abhängig sind, d. h. ob zwischen ihnen eine Relation

$$k_1(x) g_{\lambda_1}(x) + \dots + k_{n+v}(x) g_{\lambda_{n+v}}(x) = 0$$

mit  $q$ -periodischen Funktionen ( $k(x) = k(qx)$ ) als Koeffizienten bestehen kann. Vermutlich sind die nach links abbrechenden Potentiellenreihen immer linear unabhängig; es ist überhaupt anzunehmen, daß  $n$  (echte) Lösungen vom Typ (3.3) genau dann ein Fundamentalsystem der Gleichung  $n$ -ter Ordnung bilden, wenn die entsprechenden  $\lambda$ -Werte voneinander verschieden sind und wenn sich niemals zwei dieser Werte um ganze Zahlen unterscheiden. Ein allgemeiner Beweis hierfür ist noch nicht bekannt.

Aus der im Anschluß an (3.9) angestellten Überlegung folgt, daß die nach rechts abbrechenden Potentiellenreihen eigentliche Lösungen der Ausgangsgleichung (3.1) sind. (Es sind das übrigens im wesentlichen diejenigen Lösungen, die der Ansatz von RYDE liefert.) Schreiben wir (3.1) in symbolischer Form,

$$(4.2) \quad L(x, f(x)) = 0,$$

wobei  $L$  einen „geometrischen Differenz-Operator“ darstellt, und entsprechend die Gleichung für die uneigentlichen Lösungen

$$(4.3) \quad M(x, f(x)) = 0,$$

so genügen die nach rechts abbrechenden Reihen beiden Gleichungen. Wir können daraus auf die Existenz eines Operators der Ordnung  $v$  schließen, der (4.2) in (4.3) überführt:

$$(4.4) \quad N(x, L(x, f(x))) = M(x, f(x)).$$

Dabei haben alle drei Operatoren ganze rationale Koeffizienten. Man kann auch sagen, daß (4.3) „reduzibel“ ist. Bezeichnet man mit  $\varphi(x)$  die allgemeine Lösung der  $q$ -Differenzgleichung  $v$ -ter Ordnung

$$(4.5) \quad N(x, f(x)) = 0,$$

die also von  $v$   $q$ -periodischen Funktionen abhängt, so genügt die uneigentliche Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(4.6) \quad L(x, f(x)) = \varphi(x),$$

aus der man natürlich (4.3) wieder herstellen kann. Die uneigentliche Lösung hat also nach bekannten Sätzen die Gestalt:

spezielle Lösung von (4.6) plus allgemeine Lösung von (4.2); da die spezielle Lösung von  $v$   $q$ -periodischen Funktionen abhängt, gehen richtig  $v + n$   $q$ -periodische Funktionen ein.

Wenn die nach rechts abbrechenden Reihen ein Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung bilden, kann man jede Lösung von (3.1) durch diese Reihen und damit aber auch durch ein passend gewähltes System von  $n + v$  uneigentlichen Lösungen darstellen. Bilden insbesondere die Reihen vom Typ (4.1) ein Fundamentalsystem der Hüllgleichung, so läßt sich jede Lösung von (3.1) in der Form

$$\sum_{r=1}^{n+v} k_r(x) \sum_{j=0}^{\infty} A_j (1-x)_{\lambda_r+j}$$

darstellen. (Natürlich ist nicht etwa jede Funktion dieser Art Lösung von (3.1)). Man kann daraus über Pole und Wachstum der Lösungen mancherlei Aufschlüsse erhalten.

### § 5. Der Grenzübergang $q \rightarrow 1$ .

Wir wollen noch kurz das Schicksal der uneigentlichen Lösungen verfolgen, wenn  $q$  gegen eins geht. Hält man dabei die Variable  $x$  fest, so gehen die geometrischen Differenzen gegen die entsprechenden Ableitungen. Soll also die linke Seite von (3.1) einen vernünftigen Grenzwert haben, so müssen sich die Potenzen von  $q - 1$  gegen die Nenner der  $P_i(x)$  kompensieren; es muß daher  $p_{rk}$  den Nenner  $(q - 1)^r$  haben. In diesem Fall haben die Koeffizienten der Rekursionsformel (3.7) Grenzwerte, da ja

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^x}{1 - q} = x,$$

und im Falle

$$\sum_{k=0}^s \lim_{q \rightarrow 1} p_{nk} = \lim_{q \rightarrow 1} P_n(1) \neq 0$$

kann man wie oben den POINCARÉschen Satz anwenden. Die Potentiellen gehen gegen die Potenzen  $(1 - x)^k$ , und das ganze Verfahren liefert eine Lösung der aus (3.1) entstehenden Differentialgleichung in der Umgebung der Stelle  $x = 1$ , wobei im allgemeinen allerdings nur die nach links abbrechenden Potentiellenreihen konvergenten Entwicklungen zustreben. Man überlegt sich leicht, daß die linke Seite der Hüllgleichung keinen endlichen Grenzwert hat; denn durch die Einführung der basischen Zahlen hatten wir ja allerhand Potenzen von  $1 - q$  in die Entwicklung gebracht.

Man kann mit der linken Seite von (3.1) noch einen anderen Grenzübergang ausführen, wenn man für die Variable ihren Logarithmus einführt:  $x = q^{\xi}$ . Dann strebt  $(q - 1)^r \partial^r f(x)$  mit  $q \rightarrow 1$  gegen die arithmetische Differenz  $\Delta^r f(\xi)$ , und aus (3.1) entsteht eine gewöhnliche Differenzengleichung, wenn die Quotienten

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{P_r(x) (1 - xq)_{r-1}}{P_n(x) (1 - xq)_{n-1}}$$

existieren. Es existieren dann aber auch die Grenzwerte der Koeffizienten von (3.7). Denn es muß ja auch

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{P_r(x) (1 - qx)_{r-1}}{(1 - q)^{n+s-1}}$$

vorhanden sein. In den Nennern der  $p_{rk}$  müssen daher gewisse Potenzen von  $1-q$  auftreten, und diese kann man mit den in (3.7) vorkommenden Faktoren  $(1-q^{1+t-r+1}) \dots (1-q^{1+t-r-r+2})$  so zusammenfassen, daß die entstandenen Quotienten Grenzwerte haben. Die uneigentlichen Lösungen werden hier im allgemeinen gegen Faktoriellenreihen streben. Als Lösungen der Differenzgleichungen wird man allerdings meist nur die Grenzwerte der nach rechts abbrechenden Reihen benutzen können, die auf Fakultätenreihen führen, da die Grenzwerte der nach links abbrechenden Reihen i. a. nicht konvergieren.

### § 6. Beispiele.

Zur Erläuterung der abgeleiteten Beziehungen sollen einige einfache Beispiele behandelt werden. Es sei eine lineare homogene  $q$ -Differenzgleichung mit linearen Koeffizienten

$$(6.1) \quad \sum_{r=0}^n (B_r - A_r x) f(x q^r) = 0 \quad (A_n B_n \neq 0)$$

vorgelegt, und zwar möge zunächst  $A_0 = B_0 = 1$  und  $\sum_{r=0}^n B_r = 0$  sein. Man kann dann  $2n-1$  Zahlen  $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_{n-1}$  so wählen, daß

$$(6.2) \quad \prod_{j=1}^n (1 - a_j Z) = \sum_{r=0}^n A_r Z^r; \quad (1 - qZ) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - b_j Z) = \sum_{r=0}^n B_r q^r Z^r.$$

Die Potenzreihenlösung von (6.1) läßt sich mittels HEINESCHER Reihen

$$(6.3) \quad r\varphi_{r-1}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_{n-1}; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-a_1)_i \dots (1-a_n)_i}{(1-b_1)_i \dots (1-b_{n-1})_i} \frac{x^i}{(1-q)_i}$$

darstellen<sup>7)</sup>. Uns interessieren jedoch hier die uneigentlichen Lösungen. Wir schreiben (6.1) um,

$$(6.4) \quad \sum_{r=0}^n (q-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r \partial_x^r f(x) \sum_{j=r}^n \binom{j}{r} (B_j - A_j x) = 0.$$

Die Zahl  $s$  ist gleich  $n-1$ ; denn wegen  $\sum_{r=0}^n B_r = 0$  ist der Koeffizient von  $f(x)$  und damit die ganze Gleichung durch  $x$  teilbar. Wir setzen die Entwicklung nach Potentiellen  $\left(1 - \frac{A_n q}{B_n q^n} x\right)_{\lambda+t}$  an (das entspricht der zu Anfang von § 3 gemachten Voraussetzung, daß der höchste Koeffizient die Nullstelle  $q^{1-n}$  haben soll) und multiplizieren dementsprechend vorher mit  $\left(1 - \frac{A_n q}{B_n} q^{2-n} x\right)_{n-2}$ . Für die Koeffizienten der Entwicklung erhält man eine  $n$ -gliedrige Rekursionsformel, deren äußere Koeffizienten – vgl. (3.9) –

$$(6.5) \quad S_0(y) = (-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} y^{1-n} (1-y) (1-yq^{-1}) \dots (1-yq^{n-2}) \left(1 - \frac{A_n q}{B_n q^n} y\right),$$

$$(6.6) \quad S_{n-1}(y) = -q^{(n-1)^2} y^{1-n} \sum_{r=0}^n (yq^{-n+1})^r A_r$$

lauten, dabei ist wie oben  $y = q^{t+\lambda+1}$ . Man ersieht daraus sofort die Parameterwerte, die abbrechende Reihen liefern: es sind

$$\lambda = 0, 1, \dots, n-2, \quad n-1 - \sum_{r=1}^n (\alpha_r - \beta_r) \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \vartheta - \alpha_1, \vartheta - \alpha_2, \dots, \vartheta - \alpha_n,$$

<sup>7)</sup> Vgl. HAHN, Anm. 4, ferner zu diesem Paragraphen HAHN: Über die Reduzibilität einer speziellen geometrischen Differenzgleichung, Math. Nachr. (Berlin) 5, 347–354 (1951).

wobei die griechischen Buchstaben die zu den entsprechenden lateinischen gehörenden Exponenten zur Basis  $q$  bedeuten:  $a_1 = q^1$ , usw. Die letzten Werte führen auf eigentliche Lösungen. Man sieht weiter, daß stets uneigentliche Lösungen existieren müssen; denn in (6.5) z. B. wird bei beliebiger Wahl der Parameter  $a_i$ ,  $b_i$  niemals die Potenz  $y^{1-n}$  kompensiert werden können.

Ändert man die Voraussetzung über (6.1) etwas ab und läßt auch  $A_0 = 0$  zu, so wird im Fall  $n = 2$  die Potenz  $y^{1-2} = y^{-1}$  kompensiert. Man kann diesen Fall realisieren, wenn man in (6.1) bzw. (6.3) die Variable durch  $xa_n^{-1}$  ersetzt und dann mit  $a_n$  gegen unendlich geht. Es entsteht die „konfluente“ hypergeometrische Differenzengleichung

$$(6.7) \quad (b - a q x) f(q^2 x) - (b + q - q x) f(q x) + q f(x) = 0$$

mit der Lösung

$$(6.8) \quad {}_1\varphi_1(a; b; x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(1-a)_i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{(1-b)_i (1-q)_i} x^i,$$

die man aber auch auf die Gestalt

$$(6.9) \quad \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 - \frac{b}{a} q^j}{1 - b q^j} {}_2\varphi_1\left(a, \frac{a x}{b}; 0; \frac{b}{a}\right)$$

bringen kann, und das ist die gesuchte aufsteigende Potentiellenreihe. Voraussetzung ist dabei allerdings  $|b| < |a|$  — das ist eine der oben aus (3.14) abgeleiteten Ungleichungen.

Im Fall  $n = 2$  erhält man aus (6.4) die Gleichung (1.7). Wie ich an anderer Stelle<sup>\*)</sup> gezeigt habe, lassen sich alle ihre uneigentlichen Lösungen durch HEINESCHE Reihen zweiter Ordnung darstellen. Die Hüllgleichung ist von der Ordnung 3. Da nur zwei nach links abbrechende Potentiellenreihen auftreten, können diese kein Fundamentalsystem bilden. — Übrigens ergeben sich durch den im § 5 behandelten Grenzübergang aus den eigentlichen und den uneigentlichen Lösungen genau die 24 aus der KUMMERSCHEN Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung bekannten Integrale, wenn man noch gewisse Transformationseigenschaften der Gleichung (1.7) heranzieht.

Zuletzt wollen wir noch den Fall betrachten, daß in (3.1) die Polynome  $P_r(x)$  linear sind.  $s$  ist also eins. Die Rekursionsformel (3.7) muß dann zweigliedrig sein:

$$(6.10) \quad \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{G_n(y)}{H_{n+1}(y)};$$

rechts stehen Polynome der Grade  $n$  bzw.  $n + 1$ . Es ist [vgl. (3.2)]  $p_{01} = p_{00}$ ; deshalb ist  $H_{n+1}(1) = 0$ , und der Nenner in (6.11) wird  $(1 - y) K_n(y)$  geschrieben werden können. Nun folgt aber aus dem Satz von POINCARÉ — der Grad von (3.12) ist ja eins —

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{G_n(0)}{K_n(0)} = q,$$

so daß nach Einführung von  $2n$  Konstanten  $a_i$  und  $b_i$  der Quotient (6.10) auf die Gestalt

$$(6.11) \quad \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{(1 - a_1 y) \dots (1 - a_n y)}{(1 - y) (1 - b_1 y) \dots (1 - b_n y)} q$$

<sup>\*)</sup> Vgl. HAHN, ANM. 4, § 6.

gebracht werden kann. Denkt man an die Bedeutung von  $y$ , so kommt schließlich

$$(6.12) \quad C_t = C_0 \frac{(1 - a_1 q^{\lambda})_t \dots (1 - a_n q^{\lambda})_t}{(1 - q^{\lambda+1})_t (1 - b_1 q^{\lambda})_t (1 - b_n q^{\lambda})_t} q^t,$$

und die uneigentliche Lösung wird eine Reihe

$$(6.13) \quad \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x)_{\lambda+t} (1-a_1)_{\lambda+t} \dots (1-a_n)_{\lambda+t}}{(1-q)_{\lambda+t} (1-b_1)_{\lambda+t} \dots (1-b_n)_{\lambda+t}} q^{\lambda+t}.$$

Diese Reihe ist den HEINESchen Reihen nahe verwandt. Sie genügt einer  $q$ -Differenzgleichung der Ordnung  $n+1$ ,  $v$  ist also gleich 1.

Aus (6.12) liest man ab, daß es (bei „beliebigen“ Parametern)  $n+1$   $\lambda$ -Werte gibt, die nach links abbrechende Lösungen charakterisieren, nämlich die Werte  $0, 1 - \beta_1, 1 - \beta_2, \dots, 1 - \beta_n$ , während die  $n$ -Werte  $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$  die nach rechts abbrechenden Lösungen liefern. Die Theorie der Reihen (6.13) lehrt, daß die nach links abbrechenden Lösungen ein Fundamentalsystem der Hüllgleichung bilden. Hier liegen also die am Schluß von § 4 erwähnten Verhältnisse vor.

Die Bedingungen vom Typ (3.15) und (3.16) laufen hier darauf hinaus, daß die hier mit  $H_n(y)$  und  $K_n(y)$  bezeichneten Polynome die gemeinsame Nullstelle  $y=0$  haben. Um das zu erreichen, muß man in (6.13)  $a_n$  und  $b_n$  so über alle Grenzen wachsen lassen, daß  $\frac{a_n}{b_n} = k$  endlich bleibt. Man erhält dann die neue Reihe

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x)_{\lambda+t}}{(1-q)_{\lambda+t}} \frac{(1-a_1)_{\lambda+t} (1-a_2)_{\lambda+t} \dots (1-a_{n-1})_{\lambda+t}}{(1-b_1)_{\lambda+t} (1-b_2)_{\lambda+t} \dots (1-b_{n-1})_{\lambda+t}} (kq)^{\lambda+t},$$

für die Konvergenz ist  $|kq| < 1$  zu fordern. Diese Reihe genügt einer weiteren Differenzgleichung der Ordnung  $n-1$ .

Da die Hüllgleichung hier von der Ordnung  $n+1$  ist, ist der in (4.4) eingeführte Operator  $N(x, f(x))$  linear und zwar von der Gestalt

$$N(x, f(x)) = (1-q)(1-qx)\vartheta f(x) + qf(x),$$

wie man leicht ermittelt, wenn man die beiden Funktionalgleichungen aufschreibt. Die Funktion  $\varphi(x)$  aus (4.6) ist gleich  $(1-x)_{\infty}$  mal  $k$ -Funktion.

(Eingegangen am 10. Juni 1951.)

## Die konforme Abbildung echter Polygone.

Von

HELMUT UNKELBACH in Bonn.

Mit 19 Textabbildungen.

Die Frage, wie sich ein vorgegebenes Polygon durch eine analytische Funktion konform auf die Halbebene bzw. den Einheitskreis abbilden läßt, gehört zu den ältesten auf dem Gebiet der konformen Abbildung. Bereits in den Jahren 1868—1869 fanden H. A. SCHWARZ und E. B. CHRISTOFFEL (siehe [7] und [8]) ungefähr gleichzeitig die bekannte Abbildungsformel

$$z = C \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{r=1}^n (\tau - \kappa_r)^{\alpha_r - 1} d\tau.$$

Dabei liegt das Polygon in der  $z$ -Ebene und die Punkte  $\zeta = \kappa_r$  sind die Bilder der Polygonecken  $E_r$  mit den Winkeln  $\alpha_r \pi$ . Es folgten einige weitere Arbeiten anderer Autoren über Polygonabbildung, in denen unter anderem die Frage behandelt wurde, wie sich bei vorgegebenem Polygon  $\mathfrak{P}$  die Konstanten  $\kappa_r$  ermitteln lassen. Dabei wurden vielfach (unnötige) einschränkende Voraussetzungen über  $\mathfrak{P}$  gemacht, teils wurde Beschränktheit, teils Schlichtheit vorausgesetzt. Wo auf einschränkende Voraussetzungen verzichtet und eine allgemeine Definition für  $\mathfrak{P}$  gegeben wurde, da stimmte diese gewöhnlich dem Wortlaut nach so ungefähr mit unserer Definition II, S. 88, überein (man vergleiche etwa [8])<sup>1)</sup>. Man übersah jedoch, daß unter diese Definition Gebilde von viel allgemeinerer Art fallen, als sie in den erwähnten Arbeiten tatsächlich betrachtet wurden. Nach Definition II braucht nämlich der Rand eines Polygons — auf der RIEMANNschen Kugel betrachtet — durchaus kein stetiges Abbild des Kreises zu sein; vielmehr existiert zu einer beliebig vorgegebenen — auch einer *nicht zusammenhängenden* — endlichen Menge linearer Randstücke in den meisten Fällen ein zugehöriges (nach Def. II einfach zusammenhängendes) Polygon, das im allgemeinen unendlich-vielblättrig ist.

Wir wollen uns nun im folgenden konsequent auf die allgemeine Polygondefinition II stützen. Zu einer wesentlichen Verallgemeinerung des Polygonbegriffs werden wir noch dadurch geführt, daß wir in Definition I auch isolierte Punkte zu den linearen Randstücken rechnen<sup>2)</sup>. In § 1 und § 2 wird es sich in der Hauptsache darum handeln, für die verallgemeinerten Polygone  $\mathfrak{P}$  anschauliche Beispiele und exakte Definitionen zu bringen. Dabei wird sich zeigen, daß ein wichtiger Unterschied besteht, je nachdem  $\mathfrak{P}$  den Punkt  $\infty$  unendlich oft oder höchstens endlich oft überdeckt. Im letzteren Fall nennen wir  $\mathfrak{P}$  *echt*. In der vorliegenden Arbeit werden wir im wesentlichen nur echte Polygone betrachten.

<sup>1)</sup> Zuweilen wird auch zugelassen, daß das Polygon endlich viele Verzweigungspunkte im Innern enthält (vgl. [12]).

<sup>2)</sup> Dies ist schon deshalb naturgemäß, weil durch Zusammensetzung zweier Polygone ohne isolierte Randpunkte ein neues Polygon mit isolierten Randpunkten entstehen kann.

In § 3 werden die Abbildungsformeln für alle echten Polygone hergeleitet (vgl. vor allem Satz 3, S. 95). Dabei ist jedoch zu beachten, daß Polygone, die nur isolierte Randpunkte besitzen (Punktpolygone), nicht auf den Einheitskreis bzw. die Halbebene, sondern auf die punktierte Ebene abzubilden sind. Die konforme Abbildung der Punktpolygone liefert uns einige allgemeine Sätze über im Kleinen schlichte<sup>2)</sup> meromorphe Funktionen mit endlich vielen asymptotischen Werten und höchstens endlich vielen Polen (siehe die Sätze 1a und 2a sowie Satz 5a, S. 103).

Bei den Abbildungsformeln für unsere Polygone bleiben gewisse Konstanten zunächst unbestimmt. In § 4 befassen wir uns nun mit der Frage, wie sich diese Konstanten für spezielle vorgegebene Polygonklassen ermitteln lassen. Dabei werden vor allem die regulären Polygone (nebst verwandten „außergewöhnlichen“ Sternpolygone, Fig. 10) etwas eingehender behandelt, wobei zu beachten ist, daß es auf Grund der Definition IX, S. 90, zu jeder vorgegebenen Eckenzahl  $n$  mit  $n \geq 2$  unendlich viele (mehrblättrige) reguläre  $n$ -Ecke mit zusammenhängendem Rand gibt. Außerdem werden auch reguläre Punktpolygone behandelt. In Satz 8, S. 108, wird für die Gesamtheit aller regulären Polygone der Typ der Abbildungsfunktion angegeben, und die Konstanten werden in den einfachsten Fällen berechnet. Von den Beziehungen, die bei nicht-regulären Polygonen zwischen den Konstanten der Abbildungsfunktion bestehen, sei hier nur die nachstehende herausgegriffen (Fig. 11, genauere Formulierung in Satz 11, S. 113): Wir betrachten ein Polygon  $\mathfrak{P}$  mit zusammenhängendem Rand, das den Punkt  $\infty$  nicht im Innern enthält. Dagegen möge der Rand den Punkt  $\infty$  enthalten, und zwar möge er diesen Punkt ohne Knick passieren (siehe Fig. 11<sup>4)</sup>).  $\mathfrak{P}$  möge auf die obere  $\zeta$ -Halbebene konform abgebildet werden, und zwar so, daß sein unendlich ferner Randpunkt dem Punkt  $\zeta = \infty$  entspricht. Die endlichen Bilder  $\kappa_v$  der Polygonecken  $E_v$  seien mit Massen belegt, die dem jeweiligen Außenwinkel  $(1 - \alpha_v) \pi$  von  $E_v$  gleich sind. Dabei kommen auch negative Massen vor, da die Außenwinkel einspringender Ecken negativ sind. Nun denken wir uns eine beschränkte Polygonseite geknickt, so daß eine neue Ecke  $E_*$  entsteht. Dann liegt das Bild  $\kappa_*$  von  $E_*$  stets im Schwerpunkt der Massen auf  $\kappa_v$ . Das ist völlig unabhängig davon, wo der Knick vorgenommen wird.

Im Spezialfall der meromorphen Funktionen liefert die Konstantenbestimmung genauere Angaben über die Pole. Unter anderem ergibt sich folgendes: Besitzt eine im Kleinen schlichte meromorphe Funktion  $f(\zeta)$  genau 2 asymptotische Werte, so hat sie entweder überhaupt keinen Pol oder unendlich viele Pole (Satz 7, S. 107). Bei 3 asymptotischen Werten besitzt sie notwendig unendlich viele Pole (Folgerung aus Satz 1a, S. 103). Bei 4 asymptotischen Werten gibt es zum erstenmal die Möglichkeit endlich vieler Pole; diese liegen dann notwendig alle auf einer Geraden, die in beiden Richtungen zum asymptotischen Wert  $\infty$  gehört (Satz 8b, S. 111). Über die Lage der Pole auf der Geraden lassen sich nach Satz 8, S. 108, genauere Angaben machen. Auch bei mehr asymptotischen Werten ist die Lage der Pole auf Grund der Schlichtheit im Kleinen wesentlichen Einschränkungen unterworfen.

Zum Schluß werden wir in § 5 noch zwei Sätze über die Krümmungsverteilung bei konformer Abbildung beweisen, die durch Approximation

<sup>2)</sup> Das heißt  $f'(\zeta) \neq 0$  und nur Pole erster Ordnung.

<sup>4)</sup> Man könnte sagen, der Punkt  $\infty$  liege im Innern einer Polygonseite. Doch stimmt dies nicht mit der Terminologie des § 2 überein.



allgemeinerer konformer Abbildungen durch Polygonabbildungen gewonnen werden. Wir betrachten eine Funktion  $z = f(\zeta)$ , die das Äußere  $|\zeta| \geq r$  eines Kreises  $\mathfrak{K}$  konform auf das Äußere einer einfach geschlossenen analytischen Kurve  $\mathfrak{J}$  abbildet, so daß  $f(\infty) = \infty$ . Die Krümmung von  $\mathfrak{J}$  im Punkte  $z = f(\zeta)$  mit  $|\zeta| = r$  bezeichnen wir mit  $K(\zeta)$ . Dann gilt stets

$$\int_{\mathfrak{K}} K(\zeta) \cdot |\zeta| \cdot |d\zeta| = 0.$$

Das bedeutet, daß das Produkt der Krümmung  $K$  und des Vergrößerungsverhältnisses  $|f'(\zeta)|$  gleichmäßig auf  $\mathfrak{K}$  verteilt ist (Satz 12).

Bei der konformen Abbildung des Innern von  $\mathfrak{K}$  auf das Innere von  $\mathfrak{J}$  ist diese Gleichverteilung dann und nur dann vorhanden, wenn  $f''(0) = 0$  ist. Damit gewinnen wir eine sehr anschauliche Charakterisierung derjenigen Stellen einer konformen Abbildung, in welchen die zweite Ableitung der Abbildungsfunktion verschwindet.

Die vorliegende Arbeit stellt nur einen Ausschnitt aus umfangreicheren Untersuchungen dar. In Vorbereitung ist in erster Linie eine Arbeit über ganzzahlig-linear-automorphe Funktionen, welche ein echtes Polygon als Fundamentalbereich besitzen. Der explizite Ausdruck dieser Funktionen hat eine zu (2) in Satz 3 analoge Gestalt, wobei jedoch die Konstanten  $\kappa_\nu$  und  $\alpha_\nu$  sowie die Koeffizienten von  $R(\tau)$  komplex werden. Dabei gibt es allerdings gewisse Ausnahmewerte der Konstanten, für welche kein echtes Polygon als Fundamentalbereich existiert.

In den erwähnten Untersuchungen ist auch wieder der Spezialfall im Kleinen schlichter meromorpher Funktionen bemerkenswert. Es scheint, daß auf diesem Gebiet noch eine Reihe interessanter Probleme der Lösung harrt.

### § 1. Anschauungsmaterial.

Unter einem Polygon wollen wir im folgenden ein einfach zusammenhängendes Gebiet verstehen, das keinen Verzweigungspunkt im Innern enthält und von endlich vielen geraden Linien (und isolierten Punkten) begrenzt wird (siehe Definition II, § 2). Bevor wir die Definition des Polygons, seiner Ecken, Winkel usw. exakt formulieren, wollen wir zur Anschauung einige Beispiele erläutern, die zeigen, daß es Polygone von viel allgemeinerer Art gibt als landläufig angenommen wird.

Wir betrachten etwa die Strecken  $\overline{(0, 1)}$  und  $\overline{(i, i+1)}$  der komplexen  $z$ -Ebene. Das obere bzw. untere Ufer von  $\overline{(0, 1)}$  bezeichnen wir mit  $s_1$  bzw.  $s_2$  und entsprechend die Ufer von  $\overline{(i, i+1)}$  mit  $s'_1$  bzw.  $s'_2$ . Dann gibt es zu jeder Kombination  $s_\nu, s'_\mu$  ein Polygon, das von  $s_\nu$  und  $s'_\mu$  berandet wird und sonst keine weiteren Randpunkte besitzt. Für den Rand  $(s_1, s'_2)$  geht man beispielsweise aus von dem Quadrat mit den Ecken  $0, 1, i+1, i$ . An die Seite  $\overline{(0, i)}$  dieses Quadrates heftet man einen Teil der RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z}{z-i}$ , der dadurch entsteht, daß man ein Blatt der Fläche längs  $\overline{(0, i)}$  aufschneidet (die Fläche zerfällt durch diesen Schnitt in zwei kongruente Hälften). Ebenso heftet man an die Seite  $\overline{(1, 1+i)}$  eine Hälfte der RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z-1}{z-1-i}$ . Das entstehende Polygon  $\mathfrak{P}^{(1)}$  hat die verlangte Eigenschaft<sup>5)</sup>, wobei alle Randpunkte einfach zu zählen sind.

<sup>5)</sup> Es gibt sogar, wie hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, unendlich viele Polygone, die alle denselben Rand wie  $\mathfrak{P}^{(1)}$  besitzen.



Als Ecken von  $\mathfrak{P}^{(1)}$  könnte man die vier Punkte  $0, 1, i+1, i$  definieren. Das wäre jedoch unzuweckmäßig. Denn unsere Definitionen sollen so beschaffen sein, daß die wichtigsten elementargeometrischen Sätze über Polygone auch für den verallgemeinerten Polygonbegriff erhalten bleiben. Insbesondere sollen weiterhin jeder Polygonecke zwei Polygonseiten zugeordnet werden (sofern das Polygon mindestens zwei Seiten besitzt), und die Anzahl der Ecken soll mit der Anzahl der Seiten übereinstimmen. Daher betrachten wir das Punktepaar  $(i, 0)$  als eine Ecke  $E_1$  und das Punktepaar  $(1, 1+i)$  als eine Ecke  $E_2$  (vgl. Def. VIII, § 2, S. 89). Diese Definition ist auch noch aus dem folgenden topologischen Grunde zweckmäßig: Betrachten wir eine beliebige stetige Abbildung des abgeschlossenen Polygons  $\mathfrak{P}^{(1)}$  auf den Einheitskreis  $|\xi| \leq 1$ , die im offenen Polygon auch noch umkehrbar eindeutig ist, dann entspricht dem Punktepaar  $(i, 0)$  bzw.  $(1, 1+i)$  jeweils ein einziger Punkt der Kreis-peripherie  $|\xi| = 1$ . (Den Beweis dieser Tatsache wollen wir hier übergehen.) Als Ordnung einer Ecke werden wir die Zahl der einzelnen Punkte („Elemente“) bezeichnen, aus denen sie sich zusammensetzt. Die Ecken von  $\mathfrak{P}^{(1)}$  sind also von der zweiten Ordnung.

Ein von  $\mathfrak{P}^{(1)}$  verschiedenes Gebiet, das ebenfalls nur von  $s_1$  und  $s_2'$  (einfach) berandet wird, erhält man, indem man von der längs  $(0, 1)$  und  $(i, i+1)$  aufgeschlitzten Vollebene ausgeht und an die Ufer  $s_2$  bzw.  $s_1'$  jeweils Hälften der RIEMANNSchen Flächen von  $\log \frac{z}{z-1}$  bzw.  $\log \frac{z-i}{z-1-i}$  anheftet. Das entstehende Gebiet ist jedoch nach unserer Definition kein Polygon, da es nicht einfach zusammenhängend ist. Dagegen erhalten wir wieder ein von  $s_1$  und  $s_2$  berandetes Polygon ( $\mathfrak{P}^{(2)}$ ), wenn wir das gewonnene Gebiet nochmals längs  $(0, 1+i)$  aufschlitzen und an jedes Ufer dieses Schlitzes eine Hälfte der RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z}{z-1-i}$  anheften. Bei  $\mathfrak{P}^{(2)}$  sind die Eckenelemente  $0$  und  $1+i$  doppelt zu zählen, da in beiden Punkten zwei verschiedene logarithmische Verzweigungspunkte übereinander geschichtet sind. Aus den Ausführungen von § 2 wird sich ergeben, daß die Ecken  $E_1$  bzw.  $E_2$  von  $\mathfrak{P}^{(2)}$  sich aus den Elementen  $1, 0, 1+i$  bzw.  $i, 1+i, 0$  zusammensetzen, d. h. von der 3. Ordnung sind.

Ein weiteres von  $s_1$  und  $s_2'$  einfach berandetes Polygon  $\mathfrak{P}^{(3)}$  gewinnt man dadurch, daß man von dem Parallelstreifen  $0 < \Im(z) < 1$  ausgeht und in folgender Weise vier Hälften RIEMANNScher Flächen an Halbgeraden anheftet:

An den Halbgeraden:

$$\Im(z) = 0 \quad \Re(z) \leq 0$$

$$\Im(z) = 0 \quad \Re(z) \geq 1$$

$$\Im(z) = 1 \quad \Re(z) \leq 0$$

$$\Im(z) = 1 \quad \Re(z) \geq 1$$

Hälften d. RIEM. Flächen von:

$$\log z$$

$$\log(z-1)$$

$$\log(z-i)$$

$$\log(z-i-1).$$

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als sei der Rand von  $\mathfrak{P}^{(1)}$  mit dem Rand von  $\mathfrak{P}^{(3)}$  identisch. Das ist jedoch nicht richtig. Denn bei  $\mathfrak{P}^{(3)}$  liegen über dem Punkt  $\infty$  zwei voneinander verschiedene logarithmische Verzweigungspunkte. Logarithmische Verzweigungspunkte sind jedoch topologisch stets als Randpunkte aufzufassen. Bei  $\mathfrak{P}^{(3)}$  besteht also der Rand aus  $s_1$  und  $s_2'$  und dem doppelt gezählten Punkt  $\infty$ . Die Ecken  $E_1$  bzw.  $E_2$  von  $\mathfrak{P}^{(3)}$  setzen sich aus den Elementen  $0, \infty, i$  bzw.  $1+i, \infty, 1$  zusammen und sind von der 3. Ordnung (und von der 1. Art, vgl. Def. XII, S. 93).

Zwischen den Polygonen  $\mathfrak{P}^{(1)}$  und  $\mathfrak{P}^{(2)}$  einerseits und dem Polygon  $\mathfrak{P}^{(3)}$  andererseits besteht ein wesentlicher Unterschied: Erstere überdecken jeden Punkt der Ebene, einschließlich des Punktes  $\infty$ , unendlich oft (wir nennen sie deshalb unecht), während  $\mathfrak{P}^{(3)}$  den Punkt  $\infty$  überhaupt nicht überdeckt ( $\mathfrak{P}^{(3)}$  ist echt, vgl. § 2, Def. IV). Es wird sich zeigen, daß die echten Polygone mit den gewöhnlichen eine wichtige elementargeometrische Eigenschaft gemeinsam haben, welche die unechten Polygone nicht mehr besitzen (Formel (1) S. 92 über die Winkelsumme in den Ecken).

In analoger Weise findet man Polygone, die von  $s_1$  und  $s'_1$  statt von  $s_1$  und  $s'_2$  berandet werden. Beispielsweise geht man aus von einem schlichten gewöhnlichen Polygon, das berandet wird von den geraden Strecken  $(0, 1)$ ,  $(1, i)$ ,  $(i, 1+i)$  und von den beiden Halbgeraden  $\text{arc}(z-1) = \pi/4$  und  $\text{arc} z = \frac{5\pi}{4}$ . An die Strecke  $(1, i)$  bzw. an die beiden Halbgeraden heften wir

jeweils eine Hälfte der RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z-1}{z-i}$  bzw.  $\log \frac{z-1-i}{z}$  und erhalten so ein unechtes Polygon  $\mathfrak{P}^{(4)}$  mit den Ecken  $E_1 = (1, i)$  und  $E_2 = (1+i, 0)$ . Zur Konstruktion eines echten Polygons  $\mathfrak{P}^{(5)}$  — berandet von  $s_1, \infty, s'_1, \infty$  — geht man aus von einem (nicht schlichten) gewöhnlichen Polygon mit dem Rand  $s_1; \text{arc}(z-1) = \pi/4; \text{arc}(z-i) = \pi/4; s'_1; \text{arc}(z-1-i) = -\pi/4; \text{arc} z = -\pi/4$  und hängt an die vier Halbgeraden ebenso wie bei Polygon  $\mathfrak{P}^{(3)}$  vier Hälften RIEMANNScher Flächen. Die Ecken von  $\mathfrak{P}^{(5)}$  sind wieder von der 3. Ordnung (Fig. 7, S. 93).

Den bisher konstruierten Polygonen ist gemeinsam, daß sie von ihren Seiten  $s_i$  und  $s'_i$  — abgesehen von den Endpunkten — einfach berandet werden. Es gibt jedoch auch Polygone, deren Rand diese Seiten mehrfach enthält. Schlitzt man beispielsweise bei Polygon  $\mathfrak{P}^{(1)}$   $f$  Blätter der halben RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z}{z-i}$  längs  $(0, 1)$  auf und heftet an jedes Ufer  $s_2$  dieser

Schlitzte je eine Hälfte einer RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z}{z-1}$ , so gewinnt man ein Polygon  $\mathfrak{P}^{(f)}$ , das von  $s'_2$  einfach, von  $s_1$  dagegen  $(f+1)$ -fach berandet wird. In analoger Weise kann man zu den Polygonen  $\mathfrak{P}^{(2)} \dots \mathfrak{P}^{(5)}$  Varianten mit mehrfach sich überlagernden Polygonseiten konstruieren.

Alle Polygone  $\mathfrak{P}^{(1)} \dots \mathfrak{P}^{(5)}, \mathfrak{P}^{(f)}$  („außergewöhnliche“ Polygone, siehe § 2, Def. III) wurden durch Anheften von Hälften logarithmischer RIEMANNScher Flächen an gewöhnliche Polygone gewonnen. Man kann jedoch auch mit anderen anschaulichen Mitteln zu außergewöhnlichen Polygonen gelangen. Beispielsweise erhält man ein außergewöhnliches Dreieck  $\mathfrak{P}^{(6)}$ , indem man aus einem Blatt der RIEMANNSchen Fläche von  $\log z$  ein gewöhnliches (endliches) Dreieck  $\mathfrak{D}$  mit den Ecken  $0, 1, i$  ausschneidet. Die Ecken  $E_2 = 1$  und  $E_3 = i$  von  $\mathfrak{P}^{(6)}$  sind von der 1. Ordnung; die Ecke  $E_1$  scheint auf den ersten Blick von der 2. Ordnung zu sein. Letzteres ist jedoch nicht richtig; denn das Eckenelement  $z=0$  ist — wie aus § 2, S. 90, hervorgeht — doppelt zu zählen, obwohl über  $z=0$  scheinbar nur ein logarithmischer Verzweigungspunkt gelegen ist. Die Ecke  $E_1$  ist von der 3. Ordnung (und von der 1. Art) und besitzt die Elemente  $0, \infty, 0$  (Fig. 2, S. 90 und Fig. 5, S. 92).

Schneidet man aus der RIEMANNSchen Fläche von  $\log z$  ein gewöhnliches endliches Dreieck aus, dessen Rand den Nullpunkt nicht enthält, so gewinnt man kein Polygon, da das entstehende Gebiet nicht einfach zusammenhängend

ist. Dagegen erhält man ein Polygon, wenn man aus der RIEMANNschen Fläche ein gewöhnliches unendliches Dreieck ausschneidet, z. B. das Dreieck  $\mathfrak{D}'$ , das berandet wird von der Strecke  $(\overline{1, i})$  und von den Halbgeraden  $\mathfrak{G}(z) = 0$ ,  $\Re(z) \geq 1$  und  $\mathfrak{G}(z) \geq 1$ ,  $\Re(z) = 0$ . Das entstehende außergewöhnliche Dreieck  $\mathfrak{P}^{(7)}$  besitzt eine Ecke  $E_1$  von der 3. Ordnung (und von der 2. Art) mit den Elementen  $\infty, 0, \infty$  (Fig. 6, S. 92).

Zu den Polygonen rechnen wir auch einfach zusammenhängende Gebiete, die nur von isolierten Punkten begrenzt werden. Anschauungsbeispiele hierfür sind die in § 2 behandelten regulären Punktpolygone.

Die Definition der Winkel liegt für unseren verallgemeinerten Polygonbegriff nicht so ohne weiteres auf der Hand. Wir vergleichen etwa das Polygon  $\mathfrak{P}^{(6)}$  mit dem Polygon  $\mathfrak{P}^{(6)*}$ , das aus der schlichten Vollebene durch Ausschneiden des Dreiecks  $\mathfrak{D}$  entsteht.  $\mathfrak{P}^{(6)}$  und  $\mathfrak{P}^{(6)*}$  sind hinsichtlich ihrer Seiten kongruent, haben aber trotzdem verschiedene Winkel: Die Ecke  $E_1^* = 0$  von  $\mathfrak{P}^{(6)*}$  hat den Winkel  $\frac{3\pi}{2}$ , die Ecke  $E_1$  von  $\mathfrak{P}^{(6)}$  jedoch den Winkel  $-\frac{5\pi}{2}$ , wie wir aus § 2 folgern werden. (Bei gewöhnlichen Polygonen haben nur unendlich ferne Ecken negative Winkel.)

Auch der Vergleich zwischen  $\mathfrak{P}^{(6)}$  und  $\mathfrak{P}^{(7)}$  ergibt, daß man nicht alle Winkelsätze unbeschränkt von gewöhnlichen Polygonen auf außergewöhnliche übertragen darf. Für gewöhnliche Polygone gilt nämlich der folgende Satz:

Transformiert man eine Ecke  $E$  durch  $z_* = \frac{1}{z-E}$  ins Unendliche, so behält der Winkel seinen absoluten Betrag bei, während er sein Vorzeichen umkehrt. Ein analoger Satz gilt für außergewöhnliche Polygone nicht mehr. Denn die Ecke  $E_1$  (samt den zugehörigen Seiten) von  $\mathfrak{P}^{(7)}$  geht aus der Ecke  $E_1$  von  $\mathfrak{P}^{(6)}$  durch die Transformation  $z_* = 1/z$  hervor. Der Winkel in  $E_1$  von  $\mathfrak{P}^{(7)}$  ist jedoch nach § 2 gleich  $-\frac{3\pi}{2}$  (Figuren 5 und 6, Winkeldef. nach § 2).

Bei Polygon  $\mathfrak{P}^{(3)}$  ergibt sich in beiden Ecken der Winkel null, was der unmittelbaren Anschauung auch entspricht. Ganz anders liegen jedoch die Verhältnisse bei  $\mathfrak{P}^{(5)}$ : Obwohl der Rand des Polygons durch eine Spiegelung an der Geraden  $\Re(z) = 1/2$  mit sich selbst zur Deckung gelangt, wobei die Ecken  $E_1 = (0, \infty, 1+i)$  und  $E_2 = (1, \infty, i)$  miteinander vertauscht werden, sind die Winkel  $w_1$  und  $w_2$  in beiden Ecken verschieden, und zwar ist  $w_1 = -\pi$  und  $w_2 = \pi$ . Dies liegt daran, daß die Gerade  $\Re(z) = 1/2$  wohl für den Rand des Polygons  $\mathfrak{P}^{(5)}$ , nicht aber für das Polygon selbst Symmetrielinie ist. Trotz der Symmetrieeigenschaft des Randes von  $\mathfrak{P}^{(5)}$  läßt sich zu diesem Rand kein symmetrisches (gleichwinkliges) Polygon konstruieren<sup>6)</sup>. (Fig. 7).

Die Winkeldefinition für unechte Polygone kann nicht mit den Mitteln des § 2 durchgeführt werden. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen.

Zu den Figuren 2–16, die unsere Darlegungen verdeutlichen sollen, ist noch folgendes zu bemerken: Die Polygonseiten sind ausgezogen; die Polygonzüge  $\mathfrak{D}_n$ , die der Winkeldefinition zugrunde liegen (vgl. S. 91–92), sind strichpunktiert; alle übrigen geraden Linien sind gestrichelt. Diejenigen Ufer der Polygonseiten, welche das Polygon beranden, sind schraffiert. Die endlichen logarithmischen Verzweigungspunkte des Polygons sind mit Stacheln versehen. Wo eine Polygonseite oder sonstige gerade Linie ins Unendliche verlängert zu denken ist, wird dies durch einen Doppelpfeil angedeutet. Führt die Poly-

<sup>6)</sup> Dies folgt unschwer aus Gleichung (1) S. 92.

gonseite (oder gerade Linie) zu einem unendlich fernen logarithmischen Verzweigungspunkt, so ist sie mit einem dreifachen Pfeil versehen. Dieser ist mit derjenigen Ecke  $E$ , beschriftet, welcher der betreffende im Unendlichen gelegene logarithmische Verzweigungspunkt angehört. Durch einfache Pfeile wird ein Durchlaufungssinn festgelegt.

## § 2. Geometrische Grundbegriffe über Polygone.

Wir legen unseren Betrachtungen die folgenden Definitionen zu Grunde:

*Definition I:* Als ein *lineares Randstück* bezeichnen wir jedes der beiden Ufer einer vollen Geraden, einer Halbgeraden, einer endlichen Strecke sowie einen isolierten Punkt<sup>7)</sup>. Isolierte Randpunkte bezeichnen wir auch als *ausgeartete Randstücke*. Ein nicht ausgeartetes lineares Randstück einer RIEMANNschen Fläche soll keinen Verzweigungspunkt im Innern besitzen.

Wir bemerken, daß ein isolierter Randpunkt eines einfach zusammenhängenden, von der einfach punktierten Ebene verschiedenen Gebietes, das im Innern keinen Verzweigungspunkt besitzt, notwendig ein logarithmischer Verzweigungspunkt ist. Beim Abzählen der Randstücke gilt ein logarithmischer Verzweigungspunkt als ein Randstück. Sind mehrere logarithmische Verzweigungspunkte über einen Punkt der Ebene geschichtet, so wird das Randstück entsprechend mehrfach gezählt. Ein nicht ausgeartetes lineares Randstück eines Gebietes wird so oft gezählt, wie die Zahl der von ihm berandeten Blätter beträgt. Diese Abzählungsregeln legen wir zugrunde bei der folgenden

*Definition II:* Unter einem Polygon  $\mathfrak{P}$  verstehen wir ein einfach zusammenhängendes (offenes) Gebiet, das keinen Verzweigungspunkt im Innern enthält und von endlich vielen linearen Randstücken begrenzt wird<sup>8)</sup>.

*Definition III:* Falls ein Polygon keinen Punkt der Ebene unendlich oft überdeckt, bezeichnen wir es als *gewöhnlich*, andernfalls als *außergewöhnlich*.

Beispiele: Alle Polygone  $\mathfrak{P}^{(1)} \dots \mathfrak{P}^{(7)}$ ,  $\mathfrak{P}^{(1^t)}$  von § 1 sind außergewöhnlich. Man überlegt sich, daß bei einem gewöhnlichen Polygon der Rand — auf der RIEMANNschen Kugel betrachtet — ein stetiges Abbild des Kreises ist, während dies bei einem außergewöhnlichen Polygon nicht zutrifft.

*Definition IV:* Überdeckt ein Polygon den Punkt  $\infty$  höchstens endlich oft ( $p$ -fach), so nennen wir es *echt*, andernfalls *unecht*. Im ersten Fall sagen wir, das Polygon besitzt  $p$  Pole. Ein echtes Polygon, das den Punkt  $\infty$  überhaupt nicht überdeckt ( $p = 0$ ), nennen wir *beschränktartig*<sup>9)</sup>.

Beispiele:  $^{(3)}\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{P}^{(5)}$ ,  $\mathfrak{P}^{(6)}$ ,  $^{(7)}\mathfrak{P}$  ist echt, dagegen  $\mathfrak{P}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{P}^{(2)}$ ,  $\mathfrak{P}^{(4)}$ ,  $\mathfrak{P}^{(1^t)}$  unecht.

*Definition V:* Ein Polygon, das nur isolierte Randpunkte besitzt, bezeichnen wir als *ausgeartetes Polygon* oder *Punktpolygon*.

Ein Punktpolygon mit mehr als einem Randpunkt ist notwendig außergewöhnlich.

<sup>7)</sup> Ein Ufer der linearen Komplementärmenge eines endlichen Intervalls betrachten wir nicht als ein geradliniges Randelement, obwohl diese Menge auf der RIEMANNschen Kugel zusammenhängend ist.

<sup>8)</sup> Die Modulfläche, bei der unendlich viele logarithmische Verzweigungspunkte übereinander geschichtet sind, ist kein Polygon. Ebenso sind die Überlagerungsflächen, wie sie bei der Uniformisierung eine Rolle spielen, keine Polygone in unserem Sinn. Dagegen sind die in [14] betrachteten RIEMANNschen Flächen Punktpolygone in unserem Sinn.

<sup>9)</sup> Ein beschränktartiges Polygon braucht nicht beschränkt zu sein, da sein Rand den Punkt  $\infty$  enthalten darf.

*Definition VI:* Die nicht ausgearteten Randstücke eines Polygons bezeichnen wir als seine Seiten.

*Definition VII:* Als Eckenelemente eines Polygons bezeichnen wir die isolierten Randpunkte sowie die beiden Endpunkte jeder Polygonseite. Im Falle des Ufers einer vollen Geraden gilt der Punkt  $\infty$  als Endpunkt, und zwar wird er für jedes einfache Ufer einer vollen Geraden doppelt gezählt, abgesehen von dem trivialen Fall, daß das Polygon gleich der Halbebene ist.

Bei der Abzählung der Eckenelemente ist zu berücksichtigen, daß im Falle zweier Polygonseiten, von denen je ein Endpunkt in denselben Punkt der RIEMANNSchen Fläche fällt, der nicht logarithmischer Verzweigungspunkt ist, diese beiden Endpunkte zu identifizieren sind.

Wir wollen nun die Reihenfolge der Eckenelemente  $e_v$  ( $v = 1, 2, \dots, N$ ) definieren<sup>10)</sup>. Zu diesem Zweck betrachten wir einen festen Punkt  $P$  im Innern des Polygons  $\mathfrak{P}$ . Offensichtlich kann man  $P$  mit jedem  $e_v$  durch einen zusammenhängenden Polygonzug  $\mathfrak{C}_v$  verbinden, so daß jedes  $\mathfrak{C}_v$  (abgesehen von  $e_v$ ) ganz in  $\mathfrak{P}$  verläuft und kein  $\mathfrak{C}_v$  auf der RIEMANNSchen Fläche ein anderes trifft (außer in  $P$ ). Nun zeichnen wir eine schlichte Kreisscheibe  $\mathfrak{f}$  mit dem Mittelpunkt  $P$ , welche ganz in  $\mathfrak{P}$  liegt, und numerieren die  $\mathfrak{C}_v$  und die zugehörigen  $e_v$  so, daß die  $\mathfrak{C}_v$  innerhalb von  $\mathfrak{f}$  im positiven Sinn aufeinanderfolgen. Da  $\mathfrak{P}$  einfach zusammenhängend ist, hängt diese Reihenfolge von der Wahl der  $\mathfrak{C}_v$  und von  $P$  nicht ab. Daran knüpfen wir an bei der folgenden

*Definition VIII:* Unter einer Ecke  $E_v$  eines nicht ausgearteten Polygons verstehen wir eine Gesamtheit aufeinanderfolgender Eckenelemente, die mit je einem Seitenendpunkt beginnt und abschließt und sonst höchstens noch isolierte Randpunkte aufweist<sup>11)</sup>. Die Zahl  $k_v$  der Elemente einer Ecke nennen wir die Ordnung einer Ecke.

Eine Ecke 1. Ordnung heißt endlich oder unendlich fern, je nachdem sie über einem eigentlichen oder über dem uneigentlichen Punkt gelegen ist. Ein gewöhnliches Polygon hat, wie man sieht, nur Ecken 1. Ordnung.

Von einem außergewöhnlichen Polygon können wir uns mit Hilfe der Polygonzüge  $\mathfrak{C}_v$  ein anschauliches Bild machen: Die  $\mathfrak{C}_v$  zerlegen unser Polygon  $\mathfrak{P}$  in  $N$  Teilpolygone  $\mathfrak{P}_v$ , wobei  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{P}_v$  nur die Eckenelemente  $e_v$  und  $e_{v+1}$  gemeinsam hat. Gehören  $e_v$  und  $e_{v+1}$  verschiedenen Ecken von  $\mathfrak{P}$  an, so ist  $\mathfrak{P}_v$  ein gewöhnliches Polygon, das von  $\mathfrak{C}_v$ ,  $\mathfrak{C}_{v+1}$  und der Seite  $\overline{e_v e_{v+1}}$  begrenzt wird. Sind  $e_v$  und  $e_{v+1}$  zwei endliche Elemente derselben Ecke von  $\mathfrak{P}$ , die über verschiedenen Punkten der Ebene liegen, so setzt sich  $\mathfrak{P}_v$  zusammen aus einem gewöhnlichen Polygon  $\mathfrak{P}'_v$ , das von  $\mathfrak{C}_v$ ,  $\mathfrak{C}_{v+1}$  und der (in einem geeigneten Blatt der RIEMANNSchen Fläche gezeichneten) Strecke  $\overline{e_v e_{v+1}}$  begrenzt wird, und einer Hälfte  $\mathfrak{H}_v$  der RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z - e_v}{z - e_{v+1}}$ , welche längs  $\overline{e_v e_{v+1}}$  zerschnitten ist. Ist  $e_{v+1}$  bzw.  $e_v$  unendlich fern, so ist  $\log \frac{z - e_v}{z - e_{v+1}}$  durch  $\log(z - e_v)$  bzw.  $\log(z - e_{v+1})$  zu ersetzen, und an die Stelle von  $\overline{e_v e_{v+1}}$  tritt eine von  $e_v$  bzw.  $e_{v+1}$  aus innerhalb  $\mathfrak{P}$  verlaufende Halbgerade  $\mathfrak{h}_v$ .

<sup>10)</sup> Aus der Reihenfolge der Eckenelemente ergibt sich unmittelbar auch eine Reihenfolge der Randstücke.

<sup>11)</sup> Darin ist auch der Fall enthalten, daß eine Ecke nur ein Element enthält, das Endpunkt zweier Polygonseiten ist.

Es bleibt noch der Fall zu prüfen, daß zwei aufeinanderfolgende Elemente  $e_r$  und  $e_{r+1}$  derselben Ecke über dem gleichen Punkt der Ebene liegen<sup>12)</sup>. Wir denken uns in diesem Fall das Polygon  $\mathfrak{P}$ , in abzählbar viele gewöhnliche Dreiecke  $\mathfrak{D}_{\nu\mu}$  zerlegt, so daß jede Seite von  $\mathfrak{C}_r$  und  $\mathfrak{C}_{r+1}$  mit einer Dreiecksseite zusammenfällt. Da  $\mathfrak{P}$ , nur von  $\mathfrak{C}_r$  und  $\mathfrak{C}_{r+1}$  berandet wird, ist jede Dreiecksseite, die nicht auch Seite von  $\mathfrak{C}_r$  oder  $\mathfrak{C}_{r+1}$  ist, mit einer andern zu identifizieren.

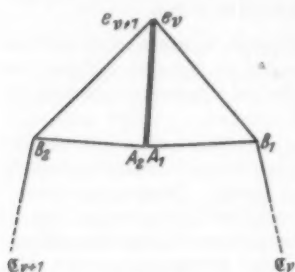
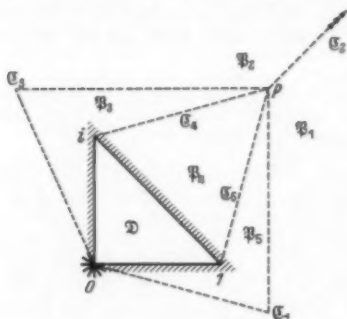


Fig. 1.

Nun sind aber die Punkte  $e_r$  und  $e_{r+1}$  voraussetzungsgemäß auf der RIEMANNschen Fläche verschieden. Infolgedessen sind die Dreiecksseiten  $A_1 e_r$  und  $A_2 e_{r+1}$  (Fig. 1) nicht zu identifizieren, vielmehr muß man sich an diese Seiten weitere (unendlich viele) Dreiecke angeheftet denken. Daraus folgt aber, daß es in unserem Dreiecksnetz einen Eckpunkt geben muß, in welchem sich beim Umlaufen die anstoßenden Dreiecke niemals schließen, d. i. ein logarithmischer Verzweigungspunkt. Es gäbe also außer  $\mathfrak{C}_r$  und  $\mathfrak{C}_{r+1}$  noch einen weiteren Randpunkt von  $\mathfrak{P}$ , entgegen der Voraussetzung. Zwei aufeinanderfolgende Elemente derselben Ecke liegen also stets über verschiedenen Punkten der Ebene. Unser obiger Aufbau von  $\mathfrak{P}$  umfaßt daher alle vorkommenden Fälle.

Es ist lehrreich, den geschilderten Aufbau am Beispiel des Polygons  $\mathfrak{P}^{(6)}$  durchzuführen (Fig. 2). Die Zerlegung von  $\mathfrak{P}^{(6)}$  durch die Polygonzüge  $\mathfrak{C}_r$  in Teilpolygone  $\mathfrak{P}_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, 5$ , ist aus der Figur ersichtlich. Der Nullpunkt ist, wie schon in § 1 erwähnt, als Eckenelement doppelt zu zählen, da er sowohl als Endpunkt von  $\mathfrak{C}_1$  als auch als Endpunkt von  $\mathfrak{C}_3$  aufgefaßt werden kann. Als Halbgerade  $\mathfrak{h}_1$  bzw.  $\mathfrak{h}_2$  kann die negativ imaginäre bzw. die negativ reelle Halbachse angesehen werden.

Fig. 2. (Polygon  $\mathfrak{P}^{(6)}$ )

An jede dieser Halbachsen hat man sich eine Hälfte der RIEMANNschen Fläche von  $\log z$  angeheftet zu denken.

Aus der Eckendefinition folgt, daß die Anzahl der Ecken und der Seiten eines (nicht ausgearteten) Polygons übereinstimmt. Wir bezeichnen ein

nicht ausgeartetes Polygon mit  $n$  Ecken und  $n$  Seiten auch als  $n$ -Eck<sup>13)</sup>.

Im Anschluß daran wollen wir noch definieren, was unter einem regulären Polygon verstanden werden soll:

**Definition IX:** Ein  $n$ -Eck ist regulär, wenn es gewöhnlich ist und durch eine Drehung um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann.

<sup>12)</sup> Daß zwei voneinander verschiedene Elemente derselben Ecke über dem gleichen Punkt der Ebene liegen können, zeigt das Beispiel  $\mathfrak{P}^{(6)}$  (siehe § 1, S. 86, sowie die Ausführungen des folgenden Absatzes).

<sup>13)</sup> Der Buchstabe  $n$  bezeichnet im folgenden stets die Seitenzahl eines Polygons.

Ein echtes Punktpolygon ist regulär, wenn es  $k$  endliche Randpunkte besitzt und durch eine Drehung um den Winkel  $\frac{2\pi}{k}$  mit sich selbst zur Deckung gelangt.

Für  $n = 1$  ist die Halbebene das einzige reguläre (wie überhaupt das einzige gewöhnliche) Polygon. Im Falle  $n = 2$  ergeben sich 2 schlichte reguläre Polygone: der Parallelstreifen und die längs einer endlichen Strecke aufgeschlitzte Vollebene. Indem man eine beliebige endliche Anzahl solcher aufgeschlitzter Vollebenen aneinander heftet, erhält man noch unendlich viele mehrblättrige reguläre Zweiecke. Für festes  $n \geq 3$  gewinnt man ein beschränktes reguläres  $n$ -Eck (es ist regulär im üblichen Sinn), außerdem ein weiteres schlichtes, nämlich das Äußere des beschränkten. Aus beiden Polygonen erhält man noch unendlich viele mehrblättrige reguläre  $n$ -Ecke, indem man an jede Polygonseite  $\overline{E_v E_{v+1}}$  die längs  $\overline{E_v E_{v+1}}$  aufgeschlitzte RIEMANNSche Fläche

von  $\sqrt[q]{\frac{z - \overline{E_v}}{z - \overline{E_{v+1}}}}$  <sup>14)</sup> anheftet, wo  $q$  eine von  $v$  unabhängige natürliche Zahl ist. In § 4 wird sich aus der Konstruktion der Abbildungsfunktion ergeben, daß andere nicht ausgeartete reguläre Polygone als die geschilderten nicht vorkommen<sup>15)</sup>.

Wir denken uns nun bei einem beliebigen nicht ausgearteten regulären Polygon mit  $n \geq 2$  (ausgenommen den Parallelstreifen) auf jede Polygonseite  $\overline{E_v E_{v+1}}$  einen Halbstreifen aufgesetzt und gewinnen auf diese Weise ein neues Polygon, das von 2  $n$  Halbgeraden begrenzt wird. An jede dieser Halbgeraden hängen wir auf die S. 89 geschilderte Weise die Hälfte der RIEMANNSchen Fläche einer Funktion  $\log(z - E_v)$  an. So erhalten wir ein echtes reguläres Punktpolygon mit  $k = n$ . In § 4 werden wir sehen, daß wir auf diese Weise alle echten regulären Punktpolygone bekommen.

Es bleibt noch der Winkel  $w_v = \alpha_v \pi$  einer Polygonecke  $E_v$  zu definieren, wobei wir uns auf die Betrachtung echter Polygone  $\mathfrak{P}$  beschränken wollen. Wir gehen folgendermaßen vor: Auf jeder der zu  $E_v$  gehörenden Polygonseiten  $s_v$  und  $s_{v+1}$  wählen wir einen inneren Punkt (d. h. Nicht-Eckenelement) und verbinden die beiden Punkte durch einen zusammenhängenden, beschränkten Polygonzug  $\Omega_v$  (mit endlich vielen Seiten), der  $s_v$  und  $s_{v+1}$  senkrecht trifft.  $\Omega_v$  teilt  $\mathfrak{P}$  in zwei Teilpolygone  $\mathfrak{P}_v^*$  und  $\mathfrak{P}_v^{**}$ , wo  $\mathfrak{P}_v^*$  die Ecke  $E_v$  enthalten möge. Wir verlangen noch, daß  $\Omega_v$  so beschaffen ist, daß  $\mathfrak{P}_v^*$  beschränktartig ist<sup>16)</sup>. Die Außenwinkel  $q_v^{(\mu)}$  in den Ecken des von  $s_v$  nach  $s_{v+1}$  durchlaufenen  $\Omega_v$  werden in der üblichen Weise definiert, wobei das Vorzeichen von  $q_v^{(\mu)}$  vom Drehungssinn abhängt (siehe die Figuren 3–7). Dann gilt die folgende

<sup>14)</sup> Im Falle  $q = 1$  verstehen wir darunter die aufgeschlitzte schlichte Ebene.

<sup>15)</sup> Läßt man  $q$  über alle Grenzen wachsen, so gelangt man zu einem unechten regulären Punktpolygon, das in einer späteren Arbeit betrachtet wird.

<sup>16)</sup> Daß ein solches  $\Omega_v$  immer existiert, läßt sich mit elementargeometrischen oder einfacher noch mit funktionentheoretischen Mitteln zeigen. Wir betrachten etwa eine in der oberen  $\zeta$ -Halbebene gelegene Halbkreisfläche mit dem Mittelpunkt  $\alpha_v$  (siehe Satz 3, S. 95). Diese sei so klein gewählt, daß  $z = f(\zeta)$  in ihrem Innern sowie auf ihrem Rand keinen Pol enthält. Das Bild des Halbkreisbogens in der  $z$ -Ebene kann dann durch einen Polygonzug  $\Omega_v$  approximiert werden. — Ließe man zu, daß  $\mathfrak{P}_v^*$  Pole enthält, dann würde das  $w_v$  der Definition  $X$  von der Wahl von  $\Omega_v$  abhängig. Da für unechte Polygone die Forderung, daß  $\mathfrak{P}_v^*$  beschränktartig sein soll, nicht immer erfüllbar ist, versagt in diesem Fall unsere Winkeldefinition.

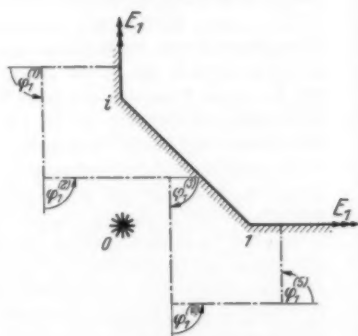
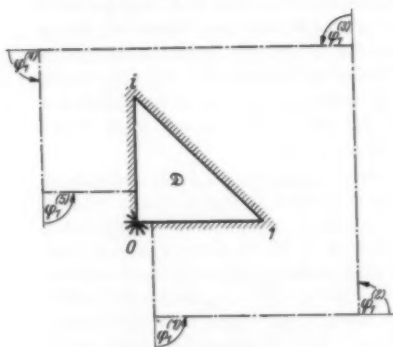
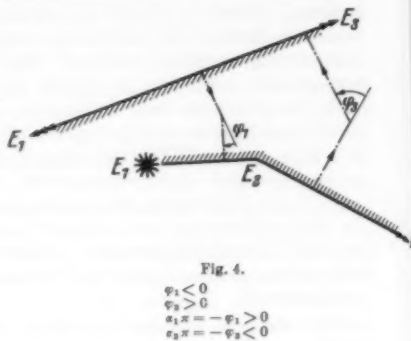
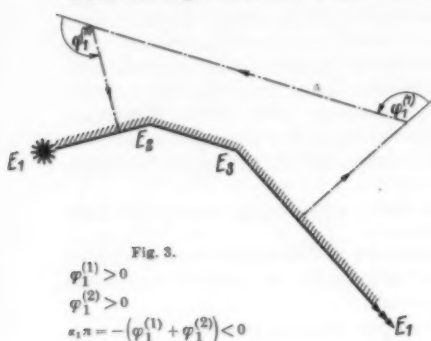


**Definition X:** Der Winkel  $w_r = \alpha_r \pi$  von  $E_r$  ist durch die Formel festgelegt

$$w_r = - \sum_{\mu} \varphi_{\mu}^{(r)}.$$

Beispiele: Figuren 3–7.

Man bestätigt, daß die Winkeldefinition von der speziellen Wahl von  $\mathfrak{D}$ , nicht abhängt. Bei den Ecken 1. Ordnung stimmt die Definition mit der



allgemein üblichen überein, wobei der Winkel in endlichen Ecken positiv<sup>17)</sup> und in unendlich fernen Ecken negativ oder null ist. Bezeichnen wir mit  $p$  stets die Zahl der Pole von  $\mathfrak{D}$ , so gilt unter Zugrundelegung von Definition X die Gl.

$$(1) \quad \sum_{r=1}^n \alpha_r = n + 4p - 2.$$

<sup>17)</sup> Bei Ecken höherer Ordnung kommt auch der Winkel  $w_r = \pi$  vor. Dagegen geht bei Ecken 1. Ordnung die Eckennatur verloren, wenn der Winkel  $= \pi$  wird.



Die Gleichung ist für beschränktartige gewöhnliche Polygone ( $p = 0$ ) geläufig. Ihre Ausdehnung auf beliebige gewöhnliche Polygone gelingt leicht unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich ein gewöhnliches Polygon stets durch einen Polygonzug, der die  $p$  Pole passiert, in zwei beschränktartige gewöhnliche Polygone zerschneiden läßt. Die Gültigkeit von (1) für das Polygon  $\mathfrak{P}^*$  folgt fast unmittelbar aus Def. X. Da sich  $\mathfrak{P}$  aus einem gewöhnlichen Polygon und Polygonen  $\mathfrak{P}^*$  zusammensetzen läßt, folgert man (1) auch für  $\mathfrak{P}$ .

In manchen Untersuchungen spielen Ecken 1. Ordnung mit  $w_v = 0, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$  eine besondere Rolle. Wir bringen daher noch die folgende

**Definition XI:** Eine Ecke  $E_v$  von der 1. Ordnung, deren Winkel gleich null oder ein negativ-ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, bezeichnen wir als *logarithmisch*. Liegen die zu  $E_v$  gehörenden Polygonseiten außerdem auf derselben Geraden, so nennen wir  $E_v$  *uneigentlich logarithmisch*, andernfalls *eigentlich logarithmisch*<sup>10)</sup>.

Wir wollen uns noch mit der speziellen Natur der Ecken echter Polygone befassen und beweisen den folgenden

**Satz 1:** Ein Polygon ist dann und nur dann echt, wenn von zwei aufeinanderfolgenden Elementen einer Ecke stets eines endlich und eines unendlich fern ist.

**Beweis:** Besitzt eine Ecke von  $\mathfrak{P}$  zwei aufeinanderfolgende endliche Elemente  $e_v$  und  $e_{v+1}$ , so enthält  $\mathfrak{P}$  auf Grund seines S. 89 beschriebenen Aufbaues eine Hälfte der RIEMANNSchen Fläche von  $\log \frac{z - e_v}{z - e_{v+1}}$ , überdeckt also den Punkt  $\infty$  unendlich oft und ist daher unecht. Kommen dagegen zwei aufeinanderfolgende endliche Elemente bei keiner Ecke vor, so setzt sich  $\mathfrak{P}$  zusammen, wie wir gesehen haben, aus endlich vielen gewöhnlichen Polygonen und endlich vielen Hälften RIEMANNScher Flächen von Funktionen der Gestalt  $\log(z - e_v)$ . Da ein gewöhnliches Polygon den Punkt  $\infty$  höchstens endlich oft überdeckt, ist damit unser Satz bewiesen.

Nach Satz 1 können wir bei echten Polygonen zwei Arten von Ecken unterscheiden:

**Definition XII:** Wir rechnen bei echten Polygonen eine Ecke mit  $k_v \geq 2$  zur ersten oder zweiten Art, je nachdem ihr erstes Element endlich oder unendlich fern ist.

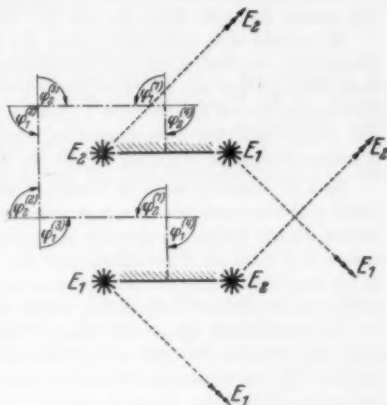


Fig. 7. (Polygon  $\mathfrak{P}^{(5)}$ )

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)} &= \varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(3)} = \varphi_2^{(1)} = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_1^{(4)} &= \varphi_2^{(2)} = \varphi_2^{(3)} = \varphi_2^{(4)} = -\frac{\pi}{2} \\ w_1 &= -\sum_{\mu=1}^4 \varphi_1^{(\mu)} = -\pi \\ w_2 &= -\sum_{\mu=1}^4 \varphi_2^{(\mu)} = \pi\end{aligned}$$

<sup>10)</sup> Eine nullwinklige Ecke 1.0. ist stets eigentlich logarithmisch. Die Figuren 12—17 enthalten zahlreiche Beispiele für eigentlich logarithmische Ecken.

Die Unterscheidung der Definition XII ist vor allem für ungerades  $k, \geq 3$  von Interesse, da sie dann vom Umlaufsinn unabhängig ist.

Beispiele: Die Ecken von  $\mathfrak{P}^{(3)}$  und  $\mathfrak{P}^{(5)}$  und die Ecke  $E_1$  von  $\mathfrak{P}^{(6)}$  sind von der ersten Art, die Ecke  $E_1$  von  $\mathfrak{P}^{(7)}$  ist von der 2. Art.

Es erhebt sich schließlich noch die Frage, unter welchen allgemeinen Bedingungen zu vorgegebenen Randelementen mit vorgegebener Vielfachheit und Reihenfolge ein zugehöriges echtes Polygon existiert. Eine notwendige Bedingung liefert bereits Satz 1. Im übrigen soll eine eingehendere Behandlung der Frage erst im Zusammenhang mit den späteren Untersuchungen über unechte Polygone erfolgen. Hier sei einstweilen nur folgendes festgestellt:

*Satz 2: Gegeben seien  $\mathfrak{N}$  lineare Randstücke einer Ebene, die den Punkt  $\infty$  nicht enthalten und von denen je zwei (in der schlichten Ebene) keinen gemeinsamen Punkt haben. Außerdem sei eine willkürliche Reihenfolge gegeben, wobei zwischen je zwei der Randstücke noch der Punkt  $\infty$  eingeschaltet wird. Dann gibt es ein beschränktartiges echtes Polygon, das von dem  $\mathfrak{N}$ -fachen Punkt  $\infty$  und den  $\mathfrak{N}$  gegebenen endlichen Randstücken in der gegebenen Reihenfolge berandet wird.*

*Bei willkürlich vorgeschriebener Vielfachheit der Randstücke braucht jedoch kein zugehöriges Polygon zu existieren. Beispielsweise gibt es kein Punktpolygon  $\mathfrak{P}$ , mit mehr als 2 Randpunkten, dessen endliche Randpunkte alle über demselben Punkt der Ebene liegen.*

*Beweis:* Die vorgegebene Reihenfolge der Randstücke bedingt eine entsprechende Reihenfolge der endlichen Eckenelemente  $e_r$ , wobei die beiden Enden einer Seite mit aufeinanderfolgenden Nummern zu belegen sind. Man überlegt sich nun, daß man den Punkt  $\infty$  mit jedem  $e_r$  durch einen zusammenhängenden Polygonzug  $\mathfrak{B}_r$  derart verbinden kann, daß folgende 3 Bedingungen erfüllt sind:

1. Je zwei  $\mathfrak{B}_r$  haben außer  $\infty$  keinen Punkt gemeinsam;
2.  $\mathfrak{B}_r$  trifft keinen weiteren Randpunkt außer  $e_r$ ;
3. Eine hinreichend große Kreisperipherie schneidet jedes  $\mathfrak{B}_r$  genau einmal, und die Schnittpunkte liegen auf dem Kreis in der Reihenfolge, welche den  $e_r$  vorgeschrieben ist.

Auf diese Weise erhalten wir ein beschränktartiges gewöhnliches Polygon  $\mathfrak{P}_3$ , das begrenzt wird von den gegebenen Polygonseiten und von den  $\mathfrak{B}_r$ ; hierbei gehören beide Ufer von  $\mathfrak{B}_r$  zur Berandung, falls das zugehörige  $e_r$  ein isolierter Randpunkt ist. Nun setzen wir an die Ränder  $\mathfrak{B}_r$  von  $\mathfrak{P}_3$  Teile RIEMANNScher Flächen von  $\log(z - e_r)$  an, die durch Zerschneiden der vollen Fläche längs  $\mathfrak{B}_r$  entstehen. Das so entstehende zusammengesetzte Polygon hat die verlangte Eigenschaft.

Zum Beweis der letzten Behauptung von Satz 2 nehmen wir an, es gäbe ein Polygon  $\mathfrak{P}$ . Versucht man  $\mathfrak{P}$  auf die Seite 89 beschriebene Weise durch Polygonzüge  $\mathfrak{C}_i$  zu zerlegen, so sieht man, daß notwendig  $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_3$  ist, d. h.  $\mathfrak{P}$  kann nicht mehr als 2 Randpunkte haben.

In den Sätzen 1 und 2 sind Aussagen über ganze und meromorphe Funktionen enthalten (vgl. § 3, Satz 1a und 2a, S. 103).

### § 3. Allgemeine Abbildungsformeln.

Wir wollen nun im nachstehenden Satz 3 die Abbildungsfunktion für die konforme Abbildung nicht ausgearteter echter Polygone auf die Halbebene angeben. Die Abbildung auf den Einheitskreis gewinnt man daraus durch

lineare Transformation. Punktpolygone lassen sich nur auf die punktierte Ebene schlicht abbilden. Für die echten Punktpolygone werden in den Sätzen 4 und 5 die Abbildungsfunktionen angegeben.

Zunächst beweisen wir

*Satz 3:* In der  $z$ -Ebene sei ein echtes  $n$ -Eck  $\mathfrak{P}$  mit den Ecken  $E_v$ ,  $v=1, 2, \dots, n$ , und mit  $p$  Polen gegeben. Die Ecke  $E_v$  habe den Winkel  $\alpha_v \pi$ , die Ordnung  $k_v$  und die Art  $l_v$ . Wir bilden  $\mathfrak{P}$  auf die obere  $\zeta$ -Halbebene so ab, daß die Ecken  $E_1 \dots E_{n-1}$  den eigentlichen Punkten  $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_{n-1}$  entsprechen und  $E_n$  in  $\zeta = \infty$  übergeht<sup>19)</sup>. Die Pole von  $\mathfrak{P}$  mögen den Punkten  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  der oberen  $\zeta$ -Halbebene entsprechen. Dann besitzt die Abbildungsfunktion folgende Gestalt:

$$(2) \quad z = f(\zeta) \equiv C \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{v=1}^{n-1} (\tau - \kappa_v)^{\alpha_v - 1} \cdot e^{R(\tau)} \cdot \prod_{v=1}^p (\tau - \lambda_v)^{-2} (\tau - \bar{\lambda}_v)^{-2} d\tau,$$

wo  $R(\tau)$  eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten und reellen Polen bedeutet. Die Pole von  $R(\tau)$  sind diejenigen Punkte  $\kappa_v$ , für welche  $k_v \geq 2$ , und zwar ist  $\kappa_v$  ein Pol  $(k_v - 1)$ -ter Ordnung. Entwickelt man  $R(\tau)$  in der Umgebung von  $\kappa_v$  nach Potenzen von  $\tau - \kappa_v$ , so besitzt der Koeffizient von  $(\tau - \kappa_v)^{-k_v + 1}$  das Vorzeichen von  $(-1)^{k_v + l_v + 1}$ . Der Punkt  $\infty$  ist ein Pol  $(k_n - 1)$ -ter Ordnung von  $R(\tau)$ , und der Koeffizient von  $\tau^{k_n - 1}$  bei der Entwicklung von  $R(\tau)$  in der Umgebung von  $\infty$  nach Potenzen von  $\tau$  hat das Vorzeichen von  $(-1)^{l_n}$ .

Ist umgekehrt eine Funktion der Gestalt (2) gegeben, so bildet sie die obere  $\zeta$ -Halbebene dann und nur dann auf ein Polygon ab, wenn die folgenden  $p$  Gleichungen erfüllt sind:

$$(3) \quad \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\alpha_v - 1}{\lambda_\mu - \kappa_v} + R'(\lambda_\mu) - \sum_{v=1}^p \frac{2}{\lambda_\mu - \bar{\lambda}_v} - \sum_{v=1}^p \frac{2}{\lambda_\mu - \lambda_v} = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, p,$$

wobei ein Stern bei einer Summe stets bedeutet, daß der Summand mit  $v = \mu$  wegzulassen ist<sup>20)</sup>.

*Anmerkung:* Der analoge Satz für die konforme Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auf den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  braucht nicht eigens formuliert zu werden. Die Formeln, welche sich aus (2) und (3) durch Transformation auf  $|\zeta| < 1$  ergeben, werden mit (2\*) und (3\*) bezeichnet. Die durch Transformation aus den  $\kappa_v$  und  $\lambda_v$  sich ergebenden Größen bezeichnen wir mit  $\varepsilon_v$  und  $\eta_v$ .

*Beweis:* Wir beweisen Satz 3 vorerst für gewöhnliche Polygone und denken uns zunächst eine Funktion (2) mit  $R(\tau) \equiv 0$  gegeben<sup>21)</sup>. Den Integranden  $J(\tau)$  von (2) normieren wir so, daß

$$(\tau - \kappa_v)^{\alpha_v - 1} = \varrho_v^{\alpha_v - 1} \cdot e^{i(\alpha_v - 1)\varphi_v}$$

$$\text{mit } \varrho_v^{\alpha_v - 1} > 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi_v \leq \pi.$$

<sup>19)</sup> Letzteres bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit. Denn der Fall, daß  $\zeta = \infty$  keiner Ecke entspricht, ist in (2) als Spezialfall enthalten.

<sup>20)</sup> Im Falle  $n = 1$  bzw.  $p = 0$  fällt in (2) das Produkt  $\prod_{v=1}^{n-1}$  bzw.  $\prod_{v=1}^p$  weg. Im letzteren Fall wird natürlich (3) gegenstandslos und (2) vermittelt stets eine Polygonabbildung.

<sup>21)</sup> Der analoge Beweis in [1], S. 10–12 für den geläufigen Spezialfall beschränkter gewöhnlicher Polygone enthält einen Irrtum. Auch sonst weist die Arbeit [1] eine Reihe von Fehlern auf vgl. z. B. meine Fußnote <sup>24)</sup> S. 97 u. <sup>25)</sup> S. 98.

Damit ist  $J(\tau)$  eine in der oberen  $\tau$ -Halbebene eindeutige Funktion. Der Faktor  $(\tau^2 - (\lambda_r + \bar{\lambda}_r)\tau + \lambda_r \cdot \bar{\lambda}_r)^{-2}$  ist auf der reellen Achse positiv. Daher ist

$$(4) \quad \begin{cases} \text{arc } J(\tau) = 0 & \text{für } \tau > \kappa_{n-1} \\ \text{arc } J(\tau) = \left( \sum_{\nu=\mu+1}^{n-1} \alpha_\nu + \mu + 1 - n \right) \cdot \pi & \text{für } \kappa_\mu < \tau < \kappa_{\mu+1}, \\ & \mu = 1, 2, \dots, (n-2) \\ \text{arc } J(\tau) = \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu + 1 - n \right) \pi & \text{für } \tau < \kappa_1. \end{cases}$$

In den Punkten  $\lambda_\mu$  (und  $\bar{\lambda}_\mu$ ) besitzt  $J(\tau)$  Pole 2. Ordnung. Damit nun  $f(\zeta)$  in der Umgebung von  $\lambda_\mu$  eindeutig wird, muß das Residuum von  $J(\tau)$  in  $\lambda_\mu$  gleich null sein, d. h.

$$(5) \quad \left[ \frac{d}{d\tau} \{ (\tau - \lambda_\mu)^2 \cdot J(\tau) \} \right]_{\tau=\lambda_\mu} = 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, p.$$

Rechnet man den Ausdruck auf der linken Seite von (5) aus und dividiert ihn durch  $[(\tau - \lambda_\mu)^2 J(\tau)]_{\tau=\lambda_\mu}$ , so erhält man die Gleichung (3). Umgekehrt folgt aus (3) die Eindeutigkeit von  $f(\zeta)$ , wenn der Integrationsweg in der oberen  $\zeta$ -Halbebene einschließlich des Randes verläuft und lediglich die Punkte  $\kappa_r$  und  $\lambda_r$  vermeidet. Für  $\zeta \rightarrow \kappa_r$  und  $\zeta \rightarrow \infty$  hat  $f(\zeta)$  wegen  $R(\tau) \equiv 0$  einen bestimmten endlichen oder unendlichen Grenzwert. Deshalb und wegen (4) wird die reelle Achse auf einen Polygonzug abgebildet, der sich auf der RIEMANNschen Kugel schließt und in den Bildpunkten von  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  die Winkel  $\alpha_1 \pi, \dots, \alpha_{n-1} \pi$  besitzt. Da im Innern der oberen Halbebene  $f'(\zeta) \neq 0$  ist, besitzt das Bildgebiet der oberen Halbebene im Innern keinen Verzweigungspunkt und ist daher ein gewöhnliches  $n$ -Eck mit  $p$  Polen und den Winkeln  $\alpha_1 \pi, \dots, \alpha_{n-1} \pi$  und  $(n + 4p - 2 - \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu) \cdot \pi$  (letzteres wegen (1)). Im Falle  $n + 4p - 3 - \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu = 0$  reduziert sich das Polygon auf ein  $(n-1)$ -Eck.

Wir denken uns nun umgekehrt ein gewöhnliches  $n$ -Eck  $\mathfrak{P}_p$  mit  $p$  Polen und den Ecken  $E_1, \dots, E_n$  mit den Winkeln  $\alpha_1 \pi, \dots, \alpha_n \pi$  gegeben. Bei einer konformen Abbildung des Polygons auf die obere  $\zeta$ -Halbebene durch eine Funktion  $z = f(\zeta)$  mögen die Pole den Punkten  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  und die Ecken  $E_r$  den Punkten  $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_{n-1}$  und  $\infty$  entsprechen. Setzt man  $f(\zeta)$  von der oberen Halbebene ausgehend durch Umlauf um Punkte  $\kappa_r$  analytisch fort, so gelangt man nach dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip zu neuen Funktionszweigen  $f^*(\zeta)$  der oberen Halbebene, wobei jeweils

$$(6) \quad f^*(\zeta) = A \cdot f(\zeta) + B \quad (|A| = 1).$$

Daraus folgt, daß  $\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$  eindeutig ist. Dieser Differentialausdruck wird in der Umgebung von  $\kappa_r$  untersucht: Ist  $E_r$  eine endliche Ecke, so führt man in bekannter Weise<sup>22)</sup> die lokale Uniformisierende  $w = (z - E_r)^{1/\alpha_r}$  ein und zeigt, daß

$$(7) \quad w = c \cdot (\zeta - \kappa_r) \cdot \{1 + c_1 (\zeta - \kappa_r) + \dots\} \quad \text{mit } c \neq 0.$$

Hieraus folgt

$$(8) \quad \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\alpha_r - 1}{\zeta - \kappa_r} + P_r(\zeta - \kappa_r),$$

<sup>22)</sup> Vgl. etwa [2] S. 36–39.

wo  $P_r(\zeta - \kappa_r)$  eine im Punkte  $\kappa_r$  reguläre Potenzreihe darstellt. Ist  $E_r$  eine unendlich ferne Ecke, die von einer eigentlich logarithmischen Ecke verschieden ist, dann gibt es stets eine Konstante  $C_r$ <sup>23)</sup>, so daß  $w = (z - C_r)^{1/\alpha_r}$  als eine lokale Uniformisierende benutzt werden kann, wobei man wiederum auf die Gleichung (8) geführt wird.

Ist jedoch  $E_r$  eine eigentlich logarithmische Ecke, so kann man nicht mit einer Potenz  $(z - C_r)^{1/\alpha_r}$  arbeiten<sup>24)</sup>. Man bemerkt jedoch, daß es stets ein gewöhnliches, beschränktartiges Dreieck  $\Delta$  mit einem Winkel  $\alpha_r \pi$  gibt, welches sich in eine solche Lage bezüglich  $\mathfrak{P}_r$  bringen läßt, daß es sich in einer gewissen Umgebung von  $E_r$  mit  $\mathfrak{P}_r$  deckt (vgl. Fig. 8 mit  $\alpha_r = -1$ ).

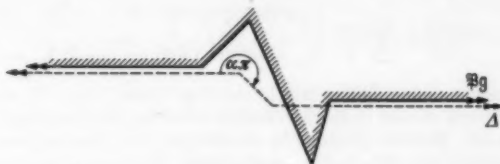


Fig. 8.

Da ein gewöhnliches, beschränktartiges Dreieck durch seine Winkel vollständig bestimmt ist, läßt sich  $\Delta$  durch folgende Funktion konform auf die obere  $w$ -Halbebene abbilden

$$(9) \quad z = f_3(w) = C \cdot \int_{w_0}^w \tau^{\alpha_r-1} (\tau-1)^{\alpha_r-1} d\tau,$$

wo  $\alpha_r \pi$  der auf  $\alpha_r \pi$  folgende Winkel von  $\Delta$  ist. Offenbar ist bei der oben angegebenen Lage von  $\Delta$  die Umkehrfunktion  $w = \bar{f}_3(z)$  von  $z = f_3(w)$  eine lokale Uniformisierende von  $z = f(\zeta)$  in der Umgebung von  $\zeta = \kappa_r$ , d. h. es ist

$$w = \bar{f}_3(f(\zeta)) = g(\zeta),$$

wobei  $w = g(\zeta)$  die in (7) angegebene Gestalt hat. Nun ist

$$f(\zeta) = f_3(g(\zeta)),$$

also

$$(10) \quad \frac{d}{d\zeta} \log f'(\zeta) = g'(\zeta) \cdot \frac{d}{dw} \log f_3(w) + \frac{d}{d\zeta} \log g'(\zeta),$$

und aus (9) folgt

$$(11) \quad \frac{d}{dw} \log f_3'(w) = \frac{\alpha_r - 1}{w} + \frac{\alpha_r - 1}{w - 1}.$$

Durch Einsetzen von (7) und (11) in (10) ergibt sich nun, daß auch in diesem Falle  $\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$  die in (8) angegebene Gestalt hat.

In der oberen Halbebene besitzt  $f(\zeta)$   $p$  einfache Pole  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Wegen dem SCHWARZSchen Spiegelungsprinzip müssen auch die Punkte  $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p$

<sup>23)</sup>  $C_r$  ist der endliche Schnittpunkt der beiden zur unendlich fernen Ecke  $E_r$  gehörenden verlängerten Polygonseiten.

<sup>24)</sup> Dies wurde bisher in der Literatur übersehen. Vgl. [1].

einfache Pole von  $f(\zeta)$  sein<sup>25</sup>). Daraus folgt

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} &= \frac{-2}{\zeta - \lambda_v} + Q_v(\zeta - \lambda_v) \\ \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} &= \frac{-2}{\zeta - \bar{\lambda}_v} + Q_v^*(\zeta - \bar{\lambda}_v), \end{aligned}$$

wo die  $Q(\zeta - \lambda_v)$  und  $Q^*(\zeta - \bar{\lambda}_v)$  reguläre Potenzreihen bedeuten. Der Differentialausdruck  $\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$  muß mit Ausnahme der Punkte  $\kappa_v, \lambda_v, \bar{\lambda}_v$  überall regulär sein. Man bestätigt ferner in bekannter Weise, daß  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = 0$ .

Daraus folgt

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\alpha_v - 1}{\zeta - \kappa_v} - 2 \cdot \sum_{v=1}^n \left( \frac{1}{\zeta - \lambda_v} + \frac{1}{\zeta - \bar{\lambda}_v} \right).$$

Durch Integration dieser Differentialgleichung erhält man (2) mit  $R(\tau) \equiv 0$ .

Nun betrachten wir ein außergewöhnliches echtes Polygon  $\mathfrak{P}$  und behaupten vorerst folgendes: Bei der konformen Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auf die obere  $\zeta$ -Halbebene entsprechen alle Elemente einer Ecke  $E_v$  demselben Punkt  $\kappa_v$  der reellen Achse; oder anders ausgedrückt: verbindet man zwei Elemente von  $E_v$  durch eine in  $\mathfrak{P}$  verlaufende einfache stetige Kurve, so entspricht ihr in der oberen  $\zeta$ -Halbebene eine Jordan-Kurve, die genau einen Punkt  $\kappa_v$  mit der reellen Achse gemeinsam hat. Zunächst überlegt man sich, daß man jedenfalls jedes  $\mathfrak{G}_v$  (siehe S. 89) so wählen kann, daß seine Bildkurve  $\Gamma_v$  in der oberen  $\zeta$ -Halbebene einem bestimmten Grenzwert  $\kappa_v$  der reellen Achse zustrebt, wenn man  $\mathfrak{G}_v$  in Richtung auf  $e_v$  durchläuft. Das Analoge gilt für die Halbgeraden  $\mathfrak{h}_v$ . Wir nehmen jetzt an, daß  $e_{v+1}$  zur selben Ecke wie  $e_v$  gehört und daß  $\Gamma_v$  und  $\Gamma_{v+1}$  zu verschiedenen Punkten  $\kappa_v$  und  $\kappa'_v$  der reellen Achse führen. Das gewöhnliche Polygon  $\mathfrak{P}'$  (S. 89) wird dann durch  $f(\zeta)$  auf ein Gebiet der oberen  $\zeta$ -Halbebene abgebildet, das begrenzt wird durch  $\Gamma_v, \Gamma_{v+1}$  und eine Kurve  $B_v$  (Bild der Halbgeraden  $\mathfrak{h}_v$ ), die  $\kappa_v$  mit  $\kappa'_v$  verbindet, während  $\mathfrak{P}'$  auf das durch  $B_v$  und die Strecke  $\kappa_v \kappa'_v$  begrenzte Gebiet  $G_v$  abgebildet wird. Andererseits geht  $\mathfrak{P}'$  entweder durch  $w = \log(z - e_v)$  oder durch  $w = \log(z - e_{v+1})$  in eine  $w$ -Halbebene  $\mathfrak{B}_v$  über, wobei  $e_v$  und  $e_{v+1}$  auf den einen Punkt  $w = \infty$  abgebildet werden. Dann würde durch die Funktion  $w = \log(f(\zeta) - e_v)$  bzw. durch  $w = \log(f(\zeta) - e_{v+1})$  das Gebiet  $G_v$  so auf  $\mathfrak{B}_v$  abgebildet, daß der Teil  $B_v$  des Randes von  $G_v$  dem ganzen Rand von  $\mathfrak{B}_v$  entsprechen würde. Das ist aber nach dem bekannten Satz über Ränderzuordnung von CARATHÉODORY unmöglich. Unsere Annahme war daher falsch, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Jetzt konstruieren wir eine Folge gewöhnlicher Polygone  $\mathfrak{G}_\mu$ , welche gegen  $\mathfrak{P}$  konvergiert. Mit  $\mathfrak{G}_1$  bezeichnen wir das gewöhnliche Polygon, welches aus  $\mathfrak{P}$  durch Abtrennung aller Flächen  $\mathfrak{P}'$  entsteht. Nun stellen wir uns auf jedem  $\mathfrak{P}'$  eine Folge von Halbgeraden  $\mathfrak{h}_{v\mu}$  ( $\mathfrak{h}_{v1} \equiv \mathfrak{h}_v$ ) vor, welche von dem endlichen Verzweigungspunkt von  $\mathfrak{P}'$  ausgehen und für welche der auf  $\mathfrak{P}'$  gemessene Winkel zwischen  $\mathfrak{h}_{v1}$  und  $\mathfrak{h}_{v\mu}$  mit  $\mu$  über alle Grenzen wächst.  $\mathfrak{G}_\mu$  möge aus  $\mathfrak{G}_1$  durch Anfügen des zwischen  $\mathfrak{h}_{v1}$  und  $\mathfrak{h}_{v\mu}$  gelegenen Teiles jedes  $\mathfrak{P}'$  entstehen. Man bestätigt, daß es zu jedem Punkt  $P$  von  $\mathfrak{P}$  ein  $\mu_0$  gibt, so daß für  $\mu \geq \mu_0$  der Punkt  $P$  in  $\mathfrak{G}_\mu$  liegt.

<sup>25</sup>) Auch dies wurde von RINGLES in dem von ihm erwähnten Spezialfall [1], S. 14 übersehen.

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, daß die Ecken  $E_2, \dots, E_n$  von  $\mathfrak{P}$  von der 1. Ordnung sind. Bezeichnen wir die Ordnung von  $E_1$  mit  $k_1$ , so sind alle Polygone  $\mathfrak{G}_\mu$   $(k_1 + n - 1)$ -Ecke.  $k_1$  Ecken von  $\mathfrak{G}_\mu$  decken sich mit den Elementen von  $E_1$ , wir bezeichnen sie mit  $E_{11}^{(\mu)}, E_{12}^{(\mu)}, \dots, E_{1k_1}^{(\mu)}$ . Die übrigen  $(n - 1)$  Ecken  $E_2^{(\mu)}, \dots, E_n^{(\mu)}$  von  $\mathfrak{G}_\mu$  decken sich mit  $E_2, \dots, E_n$ . Bezeichnen wir die Winkel in den Ecken  $E_{11}^{(\mu)}, \dots, E_{1k_1}^{(\mu)}$  mit  $\alpha_{11}^{(\mu)} \pi, \dots, \alpha_{1k_1}^{(\mu)} \pi$ , so ergibt sich:

$$(13) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_{1\nu}^{(\mu)} = +\infty \quad \text{für ungerades } \nu \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_{1\nu}^{(\mu)} = -\infty \quad \text{für gerades } \nu \end{array} \right\} \text{ falls } E_1 \text{ von der 1. Art}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_{1\nu}^{(\mu)} = -\infty \quad \text{für ungerades } \nu \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_{1\nu}^{(\mu)} = +\infty \quad \text{für gerades } \nu \end{array} \right\} \text{ falls } E_1 \text{ von der 2. Art.}$$

Bei der Approximation der Abbildungsfunktion von  $\mathfrak{P}$  ist es anschaulicher, statt der konformen Abbildung auf die obere  $\zeta$ -Halbebene die Abbildung auf den Einheitskreis  $|\xi| < 1$  zu untersuchen. Sei  $P_0$  ein endlicher Punkt innerhalb  $\mathfrak{G}_1$ . Dann bezeichnen wir mit  $z = F_\mu(\xi)$  diejenige Funktion, welche den Kreis  $|\xi| < 1$  so auf  $\mathfrak{G}_\mu$  abbildet, daß  $\xi = 0$  in  $P_0$  übergeht und  $F_\mu(0) > 0$  ist; die Funktion  $z = F(\xi)$  möge den Einheitskreis auf  $\mathfrak{P}$  abbilden mit der gleichen Normierung wie bei  $F_\mu(\xi)$ . Die Bilder der Ecken  $E_{11}^{(\mu)}, \dots, E_{1k_1}^{(\mu)}, E_2^{(\mu)}, \dots, E_n^{(\mu)}$  auf dem Kreis  $|\xi| = 1$  bei der Abbildung  $z = F_\mu(\xi)$  seien  $\varepsilon_{11}^{(\mu)}, \dots, \varepsilon_{1k_1}^{(\mu)}, \varepsilon_2^{(\mu)}, \dots, \varepsilon_n^{(\mu)}$ . Die Punkte  $\eta_\nu^{(\mu)}$  des Kreises  $|\xi| < 1$  mögen den Polen von  $\mathfrak{G}_\mu$  entsprechen. Bezeichnet man die Umkehrfunktion von  $z = F(\xi)$  mit  $\xi = \bar{F}(z)$ , so sieht man, daß die zusammengesetzte Funktion

$$\xi_* = \bar{F}(F_\mu(\xi))$$

die Bedingungen des SCHWARZschen Lemmas erfüllt. Sie bildet den Kreis  $|\xi| < 1$  auf ein schlichtes Gebiet  $\mathfrak{A}_\mu$  im Kreis  $|\xi_*| < 1$  ab, wobei es zu jedem Punkt  $P_*$  dieses Einheitskreises ein  $\mu_*$  gibt, so daß für  $\mu \geq \mu_*$  der Punkt  $P_*$  in  $\mathfrak{A}_\mu$  liegt. Also ist in jedem Kreis  $|\xi| \leq \rho < 1$  gleichmäßig

$$(14) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \bar{F}(F_\mu(\xi)) = \xi.$$

Aus (14) folgt insbesondere

$$(15) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \eta_\nu^{(\mu)} = \eta_\nu \quad \nu = 1, 2, \dots, p.$$

Nun betrachten wir das Teilgebiet  $\mathfrak{R}_\sigma$  von  $|\xi_*| < 1$ , für welches  $|\xi_* - \varepsilon_1| > \sigma$  ist. In  $\mathfrak{R}_\sigma$  ist

$$(16) \quad \xi = \bar{F}_\mu(F(\xi_*))$$

für  $\mu \geq \mu_\sigma$  eindeutig definiert, und wegen (14) gilt in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von  $\mathfrak{R}_\sigma$  gleichmäßig

$$(17) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \bar{F}_\mu(F(\xi_*)) = \xi_*.$$

Da sich (16) nach dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip über  $|\xi_*| = 1$  (außer  $\xi_* = \varepsilon_1$ ) hinaus analytisch fortsetzen läßt, gilt (17) auch noch gleich-



mäßig auf dem Kreisbogen  $|\xi_*| = 1$ ,  $|\xi_* - \varepsilon_1| > \sigma$ . Daraus folgt aber

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{1\nu}^{(\mu)} = \varepsilon_1 & \text{für } \nu = 1, 2, \dots, k_1 \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu^{(\mu)} = \varepsilon_\nu & \text{für } \nu = 2, 3, \dots, n. \end{array} \right.$$

Aus den Gleichungen (14), (15) und (18) folgt, daß man die Abbildungsfunktion  $z = f_\mu(\zeta)$  der oberen  $\zeta$ -Halbebene auf  $\mathbb{G}_\mu$  so normieren kann, daß

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu(\zeta) = f(\zeta) \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda_\nu^{(\mu)} = \lambda_\nu & \text{für } \nu = 1, 2, \dots, p \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_{1\nu}^{(\mu)} = \kappa_1 & \text{für } \nu = 1, 2, \dots, k_1 \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_\nu^{(\mu)} = \kappa_\nu & \text{für } \nu = 2, 3, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Daher konvergiert auch der Differentialausdruck  $\frac{d}{d\zeta} \log f'_\mu(\zeta)$ , der folgende Gestalt hat:

$$(20) \quad \frac{f''_\mu(\zeta)}{f'_\mu(\zeta)} = \sum_{\nu=1}^{k_1} \frac{\alpha_{1\nu}^{(\mu)} - 1}{\zeta - \kappa_{1\nu}^{(\mu)}} + \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\alpha_\nu^{(\mu)} - 1}{\zeta - \kappa_\nu^{(\mu)}} - 2 \cdot \sum_{\nu=1}^p \left( \frac{1}{\zeta - \lambda_\nu^{(\mu)}} + \frac{1}{\zeta - \bar{\lambda}_\nu^{(\mu)}} \right).$$

Führt man hier den Grenzübergang  $\mu \rightarrow \infty$  durch, so rücken nach (19) in der ersten Summe die  $k_1$  Pole 1. Ordnung  $\kappa_{1\nu}^{(\mu)}$  in den einen Punkt  $\kappa_1$  zusammen (während die Residuen nach (13) abwechselnd gegen  $+\infty$  und  $-\infty$  gehen).

Zur Ermittlung der Grenzfunktion schreiben wir den Ausdruck (20) in der Gestalt  $\frac{P^{(\mu)}}{Q^{(\mu)}}$ , wo  $P^{(\mu)}$  und  $Q^{(\mu)}$  teilerfremde Polynome sind. Der Grad von  $Q^{(\mu)}$  ist dabei unabhängig von  $\mu$  gleich  $k_1 + n - 2 + 2p$  und der Grad von  $P^{(\mu)}$  ist nicht größer als  $k_1 + n - 3 + 2p$ . Bekanntlich läßt sich dann auch die Grenzfunktion in der Gestalt  $P/Q$  schreiben, wo der Grad des Polynoms  $P$  bzw.  $Q$  nicht größer als der Grad von  $P^{(\mu)}$  bzw.  $Q^{(\mu)}$  ist. Daraus folgert man leicht, daß  $\kappa_1$  ein Pol von höchstens  $k_1$ -ter Ordnung der Grenzfunktion wird und daß diese wegen (19) folgende Gestalt hat

$$(21) \quad \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \sum_{\nu=1}^{k_1} \frac{\alpha_\nu}{(\zeta - \kappa_1)^\nu} + \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\alpha_\nu - 1}{\zeta - \kappa_\nu} - 2 \sum_{\nu=1}^p \left( \frac{1}{\zeta - \lambda_\nu} + \frac{1}{\zeta - \bar{\lambda}_\nu} \right),$$

wo die  $\alpha_\nu$  reelle Zahlen sind. Man überlegt sich nun, daß  $a_{k_1} \neq 0$ , d. h. daß der Pol  $\kappa_1$  wirklich von der  $k_1$ -ten Ordnung ist. Denn wäre das nicht der Fall, dann ließe sich der Pol  $\kappa_1$  bereits durch Zusammenrücken von  $k_1 - 1$  Polen 1.0. längs der reellen Achse gewinnen, d. h. § ließe sich bereits durch ein gewöhnliches  $(k_1 + n - 2)$ -Eck approximieren, was nicht möglich ist. Bei der Berechnung von  $a_{k_1}$  beachte man, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\kappa_{11}^{(\mu)} = 0$  und  $\kappa_1 = 0$  setzen darf, wobei alle übrigen  $\kappa$  der Formeln (20) und (21) positiv werden. Man findet dann

$$a_{k_1} = (-1)^{k_1-1} \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_{11}^{(\mu)} \cdot \prod_{\nu=2}^{k_1} \kappa_{1\nu}^{(\mu)},$$

und aus (13) folgt

$$(22) \quad \frac{a_{k_1}}{|a_{k_1}|} = (-1)^{k_1 + l_1}.$$



Ferner folgt durch eine einfache elementargeometrische Betrachtung aus der Winkeldefinition X

$$\alpha_1 - 1 = \sum_{v=1}^{k_1} (\alpha_{1v}^{(\mu)} - 1),$$

also

$$(23) \quad a_1 = \alpha_1 - 1.$$

Durch Integration von (21) findet man unter Berücksichtigung von (22) und (23) die in Satz 3 beschriebene Funktion  $f(\zeta)$  mit  $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 1$ . Dabei ist zu beachten, daß  $a_{k_i}$  das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie der in Satz 3 genannte Koeffizient von  $(\tau - \kappa_1)^{-(k_i-1)}$ . Sind die Ecken  $E_2 \dots E_n$  ebenfalls von höherer Ordnung, so behandelt man sie ebenso wie bisher die Ecke  $E_1$  und findet auf diese Weise die allgemeine Abbildungsformel (2).

(Im Falle  $E_n$  ist dabei noch eine Transformation  $\zeta_* = \frac{1}{\kappa_n - \zeta}$  durchzuführen.)

Die Gleichung (3) ergibt sich durch Grenzübergang aus der entsprechenden Gleichung für gewöhnliche Polygone. Da sich jede Funktion (2) auf die beschriebene Weise approximieren läßt, ist damit Satz 3 vollständig bewiesen.

Wir wollen noch den Spezialfall betrachten, wo die Ecken  $E_1 \dots E_{n-1}$  von  $\mathfrak{P}$  uneigentlich logarithmische Ecken mit dem Winkel  $-\pi$  sind (insbes. also  $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 1$ ). Spiegelt man in diesem Fall  $\mathfrak{P}$  an einer Polygonseite  $s_v$ , so erhält man ein von der speziellen Wahl von  $s_v$  unabhängiges Spiegelbild  $\bar{\mathfrak{P}}$ . Durch Zusammensetzung von  $\mathfrak{P}$  und  $\bar{\mathfrak{P}}$  bekommt man ein symmetrisches Punktpolygon  $\hat{\mathfrak{P}}$ . Berücksichtigt man noch, daß die  $E_1 \dots E_{n-1}$  Pole von  $\hat{\mathfrak{P}}$  sind, so gewinnt man den folgenden

**Satz 4:** In der  $z$ -Ebene sei ein echtes Punktpolygon  $\hat{\mathfrak{P}}$  gegeben, das eine Symmetrieachse und  $k$  endliche Randelemente ( $k > 0$ ) besitzt. Auf der Symmetrieachse mögen  $p_1$  Pole und außerhalb der Symmetrieachse  $2 p_2$  Pole liegen. Bei der konformen Abbildung von  $\hat{\mathfrak{P}}$  auf das Endliche der  $\zeta$ -Ebene mögen die Pole von  $\hat{\mathfrak{P}}$  den Punkten  $\kappa_1 \dots \kappa_{p_1}, \lambda_1 \dots \lambda_{p_2}, \bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_{p_2}$  ( $\kappa_v$  reell,  $\lambda_v$  nicht reell) entsprechen. Dann besitzt die Abbildungsfunktion die folgende Gestalt:

$$(24) \quad z = f(\zeta) = C \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{e^{Q_1(\tau)}}{[Q_2(\tau)]^2} d\tau.$$

Dabei ist  $Q_1(\tau)$  ein Polynom  $k$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten<sup>28)</sup> und  $Q_2(\tau)$  ein Polynom  $(p_1 + 2 p_2)$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten, welches die Größen  $\kappa_1 \dots \bar{\lambda}_{p_2}$  zu einfachen Wurzeln hat.

Ist umgekehrt eine Funktion der Gestalt (24) gegeben, so bildet sie das Endliche der  $\zeta$ -Ebene dann und nur dann auf ein Punktpolygon ab, wenn die folgenden  $(p_1 + p_2)$  Gleichungen erfüllt sind:

$$(25) \quad \begin{aligned} Q_1(\kappa_\mu) - \sum_{v=1}^{p_1} \frac{2}{\kappa_\mu - \kappa_v} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{2}{\kappa_\mu - \lambda_v} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{2}{\kappa_\mu - \bar{\lambda}_v} &= 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, p_1 \\ Q_1(\lambda_\mu) - \sum_{v=1}^{p_1} \frac{2}{\lambda_\mu - \kappa_v} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{2}{\lambda_\mu - \lambda_v} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{2}{\lambda_\mu - \bar{\lambda}_v} &= 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, p_2. \end{aligned}$$

<sup>28)</sup> Das konstante Glied von  $Q_1(\tau)$  denken wir uns mit  $C$  zusammengefaßt.

Für beliebige Punktpolygone gilt der folgende zu Satz 4 analoge

**Satz 5:** In der  $z$ -Ebene sei ein echtes Punktpolygon  $\mathfrak{P}$  gegeben, das  $k$  endliche Randelemente ( $k > 0$ ) und  $p$  Pole besitzt. Dann hat die Funktion, welche die konforme Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auf das Endliche der  $\zeta$ -Ebene vermittelt, die Gestalt (24), wobei diesmal die Polynome  $Q_1(\tau)$  und  $Q_2(\tau)$  beliebige komplexe Koeffizienten aufweisen.  $Q_1(\tau)$  ist wieder vom  $k$ -ten Grad und  $Q_2(\tau)$  vom  $p$ -ten Grad und besitzt die Bilder  $\lambda_\mu$  der Pole von  $\mathfrak{P}$  zu einfachen Wurzeln.

Die Größen  $\lambda_\mu$  müssen dem folgenden System von  $p$  Gleichungen genügen

$$(26) \quad Q_1(\lambda_\mu) - \sum_{\nu=1}^p \frac{2}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, p.$$

Da Satz 5 unmittelbar aus den Ergebnissen meiner nächsten Arbeit folgt, soll der Beweis mit Hilfe von Satz 3 nur skizziert werden. Wir denken uns ein Blatt von  $\mathfrak{P}$  durch einen kleinen geradlinigen Schlitz der Länge  $\sigma$  aufgeschlitzt, der in einem Randpunkt beginnt. Auf diese Weise gewinnen wir ein nicht ausgeartetes Polygon (Zweieck). Wir bilden es mittels linearer Transformation von (2) auf den Kreis  $|\zeta| < R$  ab. Die Abbildungsfunktion von  $\mathfrak{P}$  erhalten wir dann durch Grenzübergang  $\sigma \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$ , wobei  $R$  in geeigneter Weise von  $\sigma$  abhängt.

Es ist von Interesse, unsere Ergebnisse über Punktpolygone auch ohne die Terminologie des § 2 auszusprechen. Dabei ergeben sich Sätze über ganze und meromorphe Funktionen. Wir benutzen folgende Definitionen:

**Definition XIII:** Eine meromorphe Funktion  $f(\zeta)$  ist im Kleinen schlicht, wenn durchweg  $f'(\zeta) \neq 0$  ist und wenn ihre Pole (soweit vorhanden) von der 1. Ordnung sind.

**Definition XIV<sup>27)</sup>:** Nimmt eine meromorphe Funktion bei Annäherung an den Punkt  $\infty$  auf den Wegen  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  die Grenzwerte  $e_1$  und  $e_2$  an, so verstehen wir unter  $e_1$  und  $e_2$  den gleichen asymptotischen Wert, wenn  $e_1 = e_2$  und wenn sich  $\mathfrak{B}_1$  stetig in  $\mathfrak{B}_2$  überführen läßt, ohne daß sich hierbei der Grenzwert ändert. Wir sagen, zwei asymptotische Werte  $e_1$  und  $e_2$  haben den gleichen Wert, wenn  $e_1 = e_2$ .

Bei der Abzählung asymptotischer Werte werden  $e_1$  und  $e_2$  mit der gleichen Nummer belegt, wenn es sich in Wahrheit um die gleichen asymptotischen Werte handelt. Dagegen werden verschiedene asymptotische Werte mit verschiedenen Nummern belegt, auch wenn sie den gleichen Wert besitzen.

Beispielsweise hat die Funktion  $e^{k\zeta}$  offensichtlich  $k$  verschiedene endliche asymptotische Werte, die alle denselben Wert null besitzen. Außerdem hat die Funktion  $k$  verschiedene asymptotische Werte  $\infty$ , im ganzen also  $2k$  asymptotische Werte.

Wir wählen die Wege  $\mathfrak{B}$ , stets so, daß sie in  $\zeta = 0$  beginnen. Sind nun  $e_1$  und  $e_2$  verschiedene asymptotische Werte, so können  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  außerhalb eines hinreichend großen Kreises keine Schnittpunkte besitzen. Daher kann man die Wege  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  stets so wählen, daß sie außer  $\zeta = 0$  und  $\zeta = \infty$  überhaupt keinen Punkt gemeinsam haben. Daran knüpfen wir an bei der folgenden

<sup>27)</sup> Man überlegt sich, daß Def. XIV mit der üblichen Definition der Gleichheit asymptotischer Werte übereinstimmt. Vgl. [2], S. 277.

*Definition XV:* Der asymptotische Wert  $e_2$  folgt auf  $e_1$ , wenn das von dem linken Ufer von  $\mathfrak{B}_1$  und dem rechten von  $\mathfrak{B}_2$  berandete Gebiet keinen von  $e_1$  und  $e_2$  verschiedenen asymptotischen Wert enthält.

Nun beachten wir, daß die asymptotischen Werte einer meromorphen Funktion  $z = f(\zeta)$  die singulären Stellen der Umkehrfunktion sind. Diese singulären Stellen sind notwendig logarithmische Verzweigungspunkte, falls  $f(\zeta)$  im Kleinen schlicht ist und nur endlich viele asymptotische Werte besitzt. Wir können daher nachstehende Folgerungen aus den Sätzen 1, 2 und 5 formulieren:

*Satz 1a:* Eine im Kleinen schlichte transzendente meromorphe Funktion mit endlich vielen asymptotischen Werten besitzt dann und nur dann höchstens endlich viele Pole, wenn von zwei aufeinanderfolgenden asymptotischen Werten immer einer endlich und einer unendlich ist<sup>28)</sup>.

*Satz 2a:* Gegeben seien  $\mathfrak{R}$  endliche asymptotische Werte, die ihrem Werte nach alle voneinander verschieden sind. Außerdem sei eine willkürliche Reihenfolge gegeben, wobei zwischen je zwei asymptotische Werte noch der asymptotische Wert  $\infty$  eingeschaltet wird. Dann gibt es eine im Kleinen schlichte ganze Funktion, welche die asymptotischen Werte in der gegebenen Reihenfolge annimmt.

Es gibt jedoch keine im Kleinen schlichten ganzen (und ebenso keine meromorphen) Funktionen mit endlich vielen, und zwar mehr als zwei asymptotischen Werten, bei denen die endlichen asymptotischen Werte alle dem Werte nach übereinstimmen<sup>29)</sup>.

*Satz 5a:*  $z = f(\zeta)$  sei eine im Kleinen schlichte transzendente meromorphe Funktion mit  $p$  Polen und  $2k$  asymptotischen Werten. Dann besitzt  $f(\zeta)$  die Gestalt (24), wo  $Q_1(\tau)$  bzw.  $Q_2(\tau)$  Polynome vom  $k$ -ten bzw.  $p$ -ten Grad sind. Die Pole  $\lambda_r$  müssen das Gleichungssystem (26) erfüllen.

In analoger Weise enthält Satz 4 eine Aussage über reelle meromorphe Funktionen.

Aus Satz 1a gewinnen wir einen Satz über die  $c$ -Stellen einer meromorphen Funktion durch die Bemerkung, daß mit  $f(\zeta)$  auch die Funktion  $\frac{1}{f(\zeta) - c}$  im Kleinen schlicht ist. Ebenso erhält man aus Satz 5a einen expliziten Ausdruck für im Kleinen schlichte transzendente meromorphe Funktionen mit endlich vielen  $c$ -Stellen und asymptotischen Werten. Die  $c$ -Stellen genügen einem zu (26) analogen Gleichungssystem.

#### § 4. Konstantenbestimmung in den Abbildungsformeln.

Wir wollen uns nun mit der Aufgabe beschäftigen, bei vorgegebenem Polygon  $\mathfrak{P}$  die Konstanten  $C$ ,  $\kappa_r$ ,  $\lambda_r$  und, falls  $\mathfrak{P}$  außergewöhnlich ist, die Koeffizienten von  $R(\tau)$  zu bestimmen. Zunächst will ich einen kurzen Überblick über einige im wesentlichen bekannte Methoden geben. Das Polygon  $\mathfrak{P}$  sei vorerst beschränkt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn in (2)

folgendes gilt:  $p = 0$ ,  $R(\tau) \equiv 0$ ,  $\alpha_r > 0$  für  $r = 1, 2, \dots, n-1$  und  $\sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r < n-2$ .

<sup>28)</sup> Bei meromorphen Funktionen  $f(\zeta)$  mit endlich vielen Polen (auch bei ganzen Funktionen) braucht die Zahl der endlichen und die der unendlichen asymptotischen Werte nicht übereinzustimmen, wenn Nullstellen von  $f'(\zeta)$  vorkommen.

<sup>29)</sup> Dagegen gibt es im Kleinen nicht schlichte ganze Funktionen mit dieser Eigenschaft, z. B. die Funktion  $e^{\zeta^k}$ .

Jede Polygonseite  $\bar{E}_\nu \bar{E}_{\nu+1}$  besitzt dann eine wohldefinierte Länge  $L_\nu$ , und man erhält folgendes System von  $n$  Gleichungen für die  $n$  Unbekannten  $\kappa_1 \dots \kappa_{n-1}$  und  $C$  (wobei wir uns  $\mathfrak{P}$  in der  $z$ -Ebene so gelegen denken, daß  $C > 0$  ist):

$$\begin{aligned} C \cdot \int_{\mu}^{\mu+1} \prod_{\nu=1}^{n-1} (\tau - \kappa_\nu)^{\kappa_\nu-1} d\tau &= L_\mu & \mu = 1, 2, \dots, n-2 \\ C \cdot \int_{n-1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{n-1} (\tau - \kappa_\nu)^{\kappa_\nu-1} d\tau &= L_{n-1} \\ C \cdot \int_{\infty}^{\kappa_1} \prod_{\nu=1}^{n-1} (\tau - \kappa_\nu)^{\kappa_\nu-1} d\tau &= L_n, \end{aligned} \quad (28)$$

wo alle Integrationswege auf der reellen Achse liegen. Zwei der Größen  $\kappa_\mu$  lassen sich bekanntlich willkürlich vorschreiben, wobei nur darauf zu achten ist, daß  $\kappa_{\mu_2} > \kappa_{\mu_1}$  für  $\mu_2 > \mu_1$ . Die übrigen  $n-2$  Unbekannten sind dann durch irgendwelche  $n-2$  Gleichungen aus (28) eindeutig festgelegt; die restlichen 2 Gleichungen aus (28) sind von selbst erfüllt. Man sieht, daß dieser Weg zur Konstantenbestimmung im Prinzip noch gangbar bleibt, wenn  $\mathfrak{P}$  genau eine unendlich ferne Ecke besitzt, wobei dann zwei der Gleichungen (28) ihren Sinn verlieren. Für die konforme Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auf den Einheitskreis ergibt sich ein zu (28) analoges Gleichungssystem für die Größen  $C$  und  $\varepsilon_\mu$ , welches wir mit (28\*) bezeichnen. Die numerische Auflösung von (28) und (28\*) nach Methoden, wie sie in [3] angegeben sind, bereitet im allgemeinen große Schwierigkeiten und ist für  $n \geq 6$  erfahrungsgemäß kaum durchführbar.

Von größerer praktischer Bedeutung sind Methoden der Konstantenbestimmung für Polygonklassen, von denen statt der Beschränktheit gewisse Symmetrieeigenschaften vorausgesetzt werden. Man kann z. B. den Fall betrachten, daß sich ein Polygon  $\mathfrak{P}$  in endlich viele Teilpolygone  $\mathfrak{P}$  so zerlegen läßt, daß zwei benachbarte  $\mathfrak{P}$  durch Spiegelung an ihrer gemeinsamen Seite auseinander hervorgehen. Wir nehmen an, daß für  $\mathfrak{P}$  die Konstanten der Abbildungsfunktion (außer  $C$ ) ermittelt sind; dies ist insbesondere für gewöhnliche beschränktartige Dreiecke der Fall, wo  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  willkürlich wählbar sind, und für gewöhnliche beschränktartige Rechtecke, wo die Konstanten aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt sind. Dann lassen sich die Konstanten  $\kappa_\mu$  für  $\mathfrak{P}$  aus einem System algebraischer Gleichungen berechnen. Dies hat BURNSIDE in [4] für spezielle Fälle gezeigt. Die Ausdehnung auf unseren verallgemeinerten Polygonbegriff bereitet keine Schwierigkeiten und führt nicht zu interessanten Ergebnissen, so daß wir nicht näher darauf eingehen wollen.

Außer den Spiegelungssymmetrien eignen sich in vielen Fällen auch Drehsymmetrien dazu, die Konstanten ganz oder teilweise zu bestimmen. Wir wollen hierfür ein Beispiel betrachten, nämlich ein beschränktartiges gewöhnliches  $n$ -Eck  $\mathfrak{P}_n$  mit geradem  $n$ , welches durch eine Drehung um den Winkel  $\frac{4\pi}{n}$  mit sich selbst zur Deckung gelangt (vgl. Fig. 9 für  $n=8$ ).

Die Bestimmung der Konstanten für diese Polygone sowie die Untersuchung einiger Spezialfälle ist im wesentlichen der Inhalt der Arbeit [1] von RINGLEB. Bezeichnet man den Winkel in den Ecken  $\bar{E}_{2\nu+1}$  mit  $\alpha_1 \pi$  und den Winkel in den Ecken  $\bar{E}_{2\nu}$  mit  $\alpha_2 \pi$ , so gilt die Beziehung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2n-4}{n}.$$

Daraus folgt insbesondere, daß die Größen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  nie beide negativ sind. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß  $E_1$  endlich ist. Durch eine Ähnlichkeitstransformation der  $z$ -Ebene läßt sich dann stets erreichen, daß das Drehzentrum  $M$  von  $\mathfrak{P}_*$  über dem Punkt  $z = 0$  und

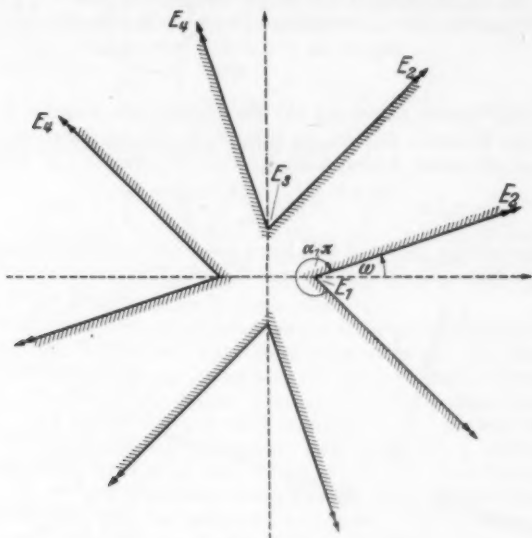


Fig. 9. (Polygon  $\mathcal{P}_9$ .)

die Ecke  $E_1$  über  $z = 1$  gelegen ist. Nun bilden wir  $\mathfrak{P}_*$  auf den Kreis  $|\xi| < 1$  so ab, daß  $E_1$  in  $\xi = 1$  (d. h.  $\varepsilon_1 = 1$ ) und  $M$  in  $\xi = 0$  übergeht. Aus der Drehsymmetrie von  $\mathfrak{P}_*$  folgt nun

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2\nu+1} &= e^{\frac{4\nu\pi i}{n}} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ \varepsilon_{2\nu} &= e^{\left(\frac{4(\nu-1)\pi}{n} + \theta\right)i} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{mit } 0 < \theta < \frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

Die Abbildungsfunktion hat also folgende Gestalt:

$$(29) \quad z = F(\xi) \equiv C \cdot \int_0^{\xi} (\tau^{n_0} - 1)^{\alpha_1 - 1} (\tau^{n_0} - \varepsilon^{n_0})^{1 - \frac{2}{n_0} - \alpha_1} d\tau$$

mit

$$\varepsilon = \varepsilon_2 = e^{\theta i}, \quad n_0 = \frac{n}{2}.$$

Falls die Ecken  $E_{2^r}$  endlich sind, lassen sich die Konstanten  $C$  und  $\varepsilon$  mittels (28\*) errechnen. Andernfalls versagt (28\*), jedoch gilt weiterhin die Gleichung

$$(30) \quad \frac{1}{C} = \int_0^1 (\tau^{n_0} - 1)^{s_1-1} (\tau^{n_0} - \varepsilon^{n_0})^{1-\frac{s_1}{n_0}-s_1} d\tau.$$

Dabei möge der Integrationsweg auf der positiven Halbachse verlaufen und der Integrand möge so normiert werden, daß

$$(31) \quad \begin{array}{ll} \arccos(\tau^{n_0} - 1)^{\alpha_1 - 1} & \text{zwischen } \frac{1}{2}(\alpha_1 - 1)\pi \text{ und } \frac{3}{2}(\alpha_1 - 1)\pi \\ \arccos(\tau^{n_0} - \varepsilon^{n_0})^{1 - \frac{2}{n_0} - \alpha_1} & \text{zwischen } \left(1 - \frac{2}{n_0} - \alpha_1\right)\left(n_0\vartheta - \frac{3\pi}{2}\right) \\ & \text{und } \left(1 - \frac{2}{n_0} - \alpha_1\right)\left(n_0\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

liegt. Um eine weitere Gleichung zur Berechnung von  $\varepsilon$  und  $C$  zu gewinnen, führen wir den Winkel  $\omega$  ein, den die Seite  $\overline{E_1 E_2}$  mit der positiven  $z$ -Halbachse bildet. Dann gilt unter Zugrundelegung von (31) (vgl. [1], S. 48<sup>30</sup>):

$$(32) \quad \omega = \alpha_1 \left( \pi - \frac{n_0 \vartheta}{2} \right) + \left( 1 - \frac{2}{n_0} \right) \left( \frac{n_0 \vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \arccos C.$$

Aus den Gleichungen (30) und (32) kann man durch Grenzübergang Formeln für gewisse außergewöhnliche Polygone erhalten. Hält man nämlich bei  $\mathfrak{P}_*$  den

Winkel  $\omega$  fest und läßt  $\alpha_1$  über alle Grenzen wachsen, so gewinnt man ein außergewöhnliches Polygon  $\mathfrak{P}_0$  mit der Seitenzahl  $n_0 = n/2$  und mit lauter (kongruenten) Ecken der 2. Ordnung und 2. Art (vgl. Fig. 10).  $\mathfrak{P}_0$  ist die Verallgemeinerung, die sich aus dem Begriff des beschränktartigen regulären Polygons ergibt, wenn man statt der Ecken 1. Ordnung auch Ecken 2. Ordnung zuläßt. Geht man bei der Abbildungsfunktion (29) zur Grenze über, so muß man gleichzeitig mit  $\alpha_1 \rightarrow \infty$  auch

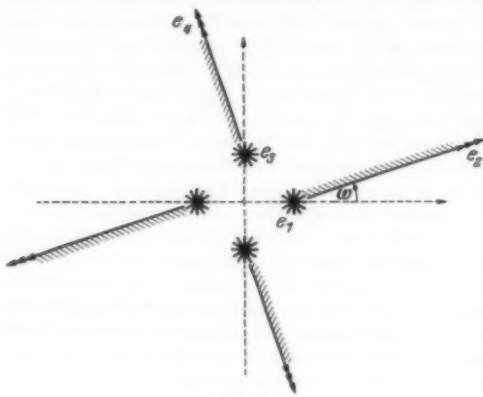


Fig. 10.

$E_1 = (e_1, e_2)$   
 $E_2 = (e_3, e_4)$

den Grenzübergang  $\vartheta \rightarrow \frac{2\pi}{n_0}$  durchführen. Dabei nimmt der Faktor

$$\left( \frac{\tau^{n_0} - 1}{\tau^{n_0} - e^{i n_0 \vartheta}} \right)^{\alpha_1 - 1}$$

des Integranden dann und nur dann einen nicht konstanten Grenzwert an, wenn  $\lim \alpha_1 \cdot (2\pi - n_0 \vartheta) = \gamma > 0$ . Dann ergibt sich aus (29) als Abbildungsfunktion von  $\mathfrak{P}_0$

$$(33) \quad z = F_0(\xi) \equiv C \cdot \int_0^{\xi} (\tau^{n_0} - 1)^{-\frac{2}{n_0}} \cdot e^{\frac{i\gamma}{1-\tau^{n_0}}} d\tau.$$

<sup>30</sup> RINGLEB führt statt (31) eine unzulässige Normierung des Integranden ein und kommt daher zu falschen Folgerungen aus Formel (32). So ist z. B. in [1], S. 34, Satz 9, der einen Spezialfall von (32) behandelt, die Größe  $\omega$  (in [1]  $\tau$  genannt) eine monoton wachsende (nicht, wie RINGLEB meint, eine monoton fallende) Funktion von  $\vartheta$ .

Aus (33) ersieht man insbesondere folgendes: Nähert man sich dem singulären Randpunkt  $\xi = 1$  auf einer beliebigen Kurve, welche in der oberen Hälfte des Einheitskreises oder auf  $0 < \xi < 1$  verläuft, so nimmt  $F_0(\xi)$  den endlichen Grenzwert  $e_1$  an. Den unendlichen Grenzwert gewinnt man, wenn man sich dem Punkt  $\xi = 1$  von der unteren Hälfte des Einheitskreises her nähert auf einer Kurve, welche den Kreis  $\xi = 1$  berührt. Dazwischen liegen Wege ohne Grenzwert. Schreibt man vor, daß  $e_1 = 1$  ist, so gilt

$$(34) \quad \frac{1}{C} = \int_0^1 (\tau^{n_0} - 1) \frac{-\frac{2}{n_0} \cdot e^{\frac{i\gamma}{1-\tau^{n_0}}}}{d\tau} \quad \text{mit } 0 < \tau < 1,$$

und durch Grenzübergang in (32) erhält man

$$(35) \quad \omega = \frac{\gamma}{2} + \left(1 - \frac{2}{n_0}\right) \frac{\pi}{2} + \text{arc } C.$$

Aus (34) und (35) lassen sich die Konstanten  $\gamma$  und  $C$  von  $F_0(\xi)$  bestimmen. — Es existiert noch ein Polygon  $\mathfrak{P}_0$  mit Ecken 1. Art, welches von den gleichen Halbgeraden wie  $\mathfrak{P}_0$  berandet wird, jedoch vom andern Ufer dieser Halbgeraden. Für  $\mathfrak{P}_0$  gelten analoge Formeln mit  $\gamma < 0$ .

Zu den bisher beschriebenen Methoden der Konstantenbestimmung kommt nun als wichtiges Hilfsmittel das Gleichungssystem (3) von Satz 3 sowie verwandte Gleichungssysteme (siehe Satz 10), die in einfacher Weise aus dem CAUCHYSCHEN Residuensatz folgen werden. Wir betrachten zunächst das System (3). Sind für ein Polygon die Konstanten  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $p$  sowie die rationale Funktion  $R(\tau)$  bekannt, so läßt sich (3) stets nach den  $\lambda$  auflösen, da die Abbildungsfunktion notwendig die Gestalt (2) besitzt. Die Frage, ob es zu einer Funktion (2) mit willkürlich vorgegebenen  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $p$  und  $R(\tau)$  stets ein zugehöriges Polygon gibt, ist jedoch zu verneinen. Wir betrachten etwa den Fall  $n = 2$ ,  $p > 0$  und  $R(\tau) \equiv 0$ . Ist (3) in diesem Falle lösbar, so bildet (2) die obere  $\zeta$ -Halbebene auf ein gewöhnliches Zweieck ab. Nun zeigt aber eine elementargeometrische Überlegung, daß ein *nicht-reguläres gewöhnliches Zweieck* notwendig *beschränktartig* ist. Daher kann (3) für  $n = 2$ ,  $p > 0$ ,  $\alpha_1 \neq 2p$  (siehe Gleichung (1)) und  $R(\tau) \equiv 0$  keine Lösung besitzen (was im übrigen auch direkt aus dem System (3) folgt). Ebenso hat (3) für  $n = 1$ ,  $p > 0$  und  $R(\tau) \equiv 0$  keine Lösung, da die Halbebene das einzige gewöhnliche Eineck ist.

Schließlich ist noch von Interesse, daß der Spezialfall (25) von (3) ebenso wie (26) im Falle  $Q_1(\tau) = \tau$  keine Lösung hat. Denn addiert man etwa in (26) mit  $Q'_1(\tau) = 1$  die ersten  $p - 1$  Gleichungen, so erhält man einen Widerspruch zur  $p$ -ten Gleichung. Daraus läßt sich, wie hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, folgendes schließen:

*Satz 7: Besitzt eine im Kleinen schlichte meromorphe Funktion  $f(\zeta)$  genau 2 asymptotische Werte, so hat sie entweder überhaupt keinen Pol oder unendlich viele Pole.*

Aus den späteren Betrachtungen über unechte Polygone wird sich ergeben, daß  $f(\zeta)$  notwendig die Gestalt hat

$$f(\zeta) = \frac{c_1 e^{\gamma\zeta} + c_2}{c_3 e^{\gamma\zeta} + c_4}.$$

Allgemeinere Bedingungen für die Lösbarkeit von (3) sollen später behandelt werden, ebenso die Frage der Eindeutigkeit der Lösung. Dazu gehört vor allem die Frage, inwieweit sich bei einer meromorphen Funktion der Gestalt (24)

das Polygon  $Q_1(\tau)$  willkürlich vorschreiben läßt und ob dadurch  $Q_2(\tau)$  eindeutig bestimmt ist. Die Betrachtungen werden zeigen, daß bei einer im Kleinen schlichten meromorphen Funktion die Lage der Pole weitgehenden Einschränkungen unterworfen ist. Dies gilt auch, wenn man zu meromorphen Funktionen mit unendlich vielen Polen übergeht.

Im folgenden sollen nur einige Spezialfälle behandelt werden, in denen die eindeutige Auflösbarkeit von (3) leicht zu beweisen ist. Wir betrachten zunächst die regulären Polygone. Für sie gilt der folgende

*Satz 8: Es gibt nur die in § 2 beschriebenen regulären Polygone. Ein reguläres  $n$ -Eck bzw. ein echtes reguläres Punktpolygon mit  $2k$  Randpunkten besitzt daher  $nq$  bzw.  $kq$  oder  $nq+1$  bzw.  $kq+1$  Pole, wo  $q$  eine natürliche Zahl oder null ist. Das System (3) ist für reguläre Polygone eindeutig auflösbar. Die Abbildungsfunktion der gewöhnlichen regulären Polygone auf den Kreis  $|\xi| < 1$  läßt sich in der folgenden Gestalt schreiben:*

$$(36a) \quad z = C \cdot \int_0^{\xi} (\tau^n - 1)^{q-1} \cdot \prod_{v=1}^q (\tau^n + \varrho_{nv}^n)^{-2} (\tau^n + \varrho_{nv}^{-n})^{-2} d\tau, \quad \varrho_{nv} > 0$$

oder

$$(36b) \quad z = C \cdot \int_0^{\xi} (\tau^n - 1)^{q-1} \cdot \prod_{v=1}^q (\tau^n + r_{nv}^n)^{-2} (\tau^n + r_{nv}^{-n})^{-2} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad r_{nv} > 0.$$

Dabei ergibt sich der Winkel  $\alpha\pi$  aus

$$(37) \quad \alpha = 1 + 4q - \frac{2}{n} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 + 4q + \frac{2}{n}.$$

Im Falle  $q = 1$  folgt aus (3)

$$(38) \quad \varrho_{n1} = \sqrt{\frac{2n-1-\sqrt{3n^2-2n}}{n-1}} \quad \varrho_{21} = 0,414 \dots, \quad \varrho_{31} = 0,593 \dots$$

$$r_{n1} = \sqrt{\frac{2n+1-\sqrt{3n^2+2n}}{n+1}} \quad r_{21} = 0,577 \dots, \quad r_{31} = 0,679 \dots$$

Die echten regulären Punktpolygone werden durch folgende Funktionen auf das Endliche der  $\xi$ -Ebene abgebildet:

$$(39a) \quad z = C \cdot \int_0^{\xi} e^{a\tau^k} \cdot \prod_{v=1}^q (\tau^k - \varrho_{kv}^k)^{-2} d\tau \quad \varrho_{kv} > 0, \quad a > 0$$

oder

$$(39b) \quad z = C \cdot \int_{\xi_a}^{\xi} e^{a\tau^k} \prod_{v=1}^q (\tau^k - r_{kv}^k)^{-2} \frac{d\tau}{\tau^2} \quad r_{kv} > 0, \quad a > 0.$$

In den Fällen  $q = 1$  und  $q = 2$  folgt aus (3), wenn wir  $a = 1$  setzen (was sich stets durch eine Streckung der  $\xi$ -Ebene erreichen läßt):

$$\varrho_{k1} = \sqrt{\frac{k-1}{k}} \quad \text{für } q = 1$$

oder

$$r_{k1} = \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$



$$(40) \quad \varrho_{k1} = \sqrt[k]{\frac{2k-1}{k} - \sqrt{\frac{2k-1}{k}}} , \quad \varrho_{k2} = \sqrt[k]{\frac{2k-1}{k} + \sqrt{\frac{2k-1}{k}}} \\ \text{oder} \quad r_{k1} = \sqrt[k]{\frac{2k+1}{k} - \sqrt{\frac{2k+1}{k}}} , \quad r_{k2} = \sqrt[k]{\frac{2k+1}{k} + \sqrt{\frac{2k+1}{k}}} \quad \text{für } q = 2$$

*Beweis:* Wir betrachten vorerst die nicht ausgearteten regulären Polygone, wie sie in § 2 konstruiert wurden, und zeigen, daß ihre Abbildungsfunktion notwendig die Gestalt (36a) oder (36b) hat. Zunächst fassen wir für  $n \geq 3$  die aus den beschränkten regulären Polygonen gewonnenen ins Auge. Wir verlegen das Drehzentrum  $M$  in den Punkt  $z = 0$  und  $E_1$  auf die positive Halbachse. Nun betrachten wir die Halbgerade  $\text{arc } z = \pi/n$ , die wir uns über den Punkt  $\infty$  hinaus durch alle Blätter der RIEMANNschen Fläche bis zur Seitenmitte  $M_1$  von  $\overline{E_1 E_2}$  verlängert denken. Dann wird durch  $\overline{M E_1}$ ,  $\overline{E_1 M_1}$  und die verlängerte Halbgerade ein beschränktartiges Polygon  $\theta$  begrenzt. Es besitzt außer den 3 endlichen Ecken  $M, E_1, M_1$  noch  $q$  uneigentlich logarithmische Ecken  $U_v$ . Jetzt bilden wir  $\theta$  auf den Kreissektor  $|\xi| < 1, 0 < \text{arc } \xi$

$< \pi/n$  konform ab, so daß die Ecken  $M, E_1, M_1$  in die Punkte  $\xi = 0, 1, e^{\frac{\pi i}{n}}$  übergehen. Die Bilder von  $U_v$  liegen auf dem Radiusvektor  $0 < |\xi| < 1$ ,  $\text{arc } \xi = \pi/n$ ; wir bezeichnen sie mit  $\varrho_{nv} e^{\frac{\pi i}{n}}$ ,  $v = 1, 2, \dots, q$ . Indem man die Abbildungsfunktion nach dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip über den ganzen Kreis  $|\xi| < 1$  fortsetzt, sieht man, daß (2\*) notwendig die in (36a) angegebene spezielle Gestalt hat. In analoger Weise gewinnt man für die aus dem Äußeren der beschränkten regulären Polygone gewonnenen regulären  $n$ -Ecke die Abbildungsformel (36b). Ebenso werden die in § 2 konstruierten gewöhnlichen regulären Zweiecke durch (36a) oder (36b) abgebildet. Die Formel (37) für den Winkel folgt unmittelbar aus (1).

Wir nehmen nun an, es gäbe noch ein weiteres reguläres  $n$ -Eck  $\mathfrak{P}$  außer den bisher beschriebenen. Aus der Drehsymmetrie von  $\mathfrak{P}$  folgt, daß sich die Abbildungsfunktion  $F(\xi)$  auf den Kreis  $|\xi| < 1$  so normieren läßt, daß

$$F\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot \xi\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot F(\xi).$$

Ist also  $\eta \neq 0$  ein Pol von  $F(\xi)$  und  $\varepsilon$  ein Bild einer Ecke, so folgt, daß auch  $e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot \eta$  ein Pol von  $F(\xi)$  und  $e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot \varepsilon$  das Bild einer Ecke ist. Die Abbildungsfunktion hat daher notwendig die Gestalt (36a) oder (36b), wobei die  $\varrho_{nv}$  oder  $r_{nv}$  zunächst durch komplexe Größen  $\eta_{nv}$  zu ersetzen sind.  $\mathfrak{P}$  besitzt also lauter gleiche Winkel und nach (28\*) gleiche Seiten, und es gibt eines der bisherigen regulären Polygone  $\mathfrak{P}_s$ , das die gleiche Anzahl von Polen besitzt wie  $\mathfrak{P}$ . Dann hat aber  $\mathfrak{P}_s$  nach (37) dieselben Winkel wie  $\mathfrak{P}$ , ist also bis auf eine Ähnlichkeitstransformation in einem Randstreifen mit  $\mathfrak{P}$  kongruent (wobei die Kongruenz in richtiger Weise auf der RIEMANNschen Fläche zu verstehen ist). Man überlegt sich, daß infolgedessen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{P}_s$  überhaupt kongruent sein müsse, da beide unverzweigt sind. Es kann also kein weiteres reguläres  $n$ -Eck mehr geben.

Wir wollen noch in (36a) und (36b) die Konstantenbestimmung für  $q = 1$  explizit durchführen. Das System (3) reduziert sich auf eine Gleichung, die

sich folgendermaßen umformen läßt, wenn wir  $\varrho_{n1}^n = x$  bzw.  $r_{n1}^n = x$  setzen:

$$(n \cdot \alpha - 4n + 1)x^3 - (3n - 1)x^2 - (n \cdot \alpha - 2n + 1)x + (n - 1) = 0$$

bzw.

$$(n \cdot \alpha - 4n - 1)x^3 - (3n + 1)x^2 - (n \cdot \alpha - 2n - 1)x + (n + 1) = 0.$$

Daraus folgt durch Einsetzen von (37)

$$(n - 1)x^3 - (3n - 1)x^2 - (3n - 1)x + (n - 1) = 0$$

bzw.

$$(n + 1)x^3 - (3n + 1)x^2 - (3n + 1)x + (n + 1) = 0.$$

Letzteres sind reziproke Gleichungen. Die Lösung, welche  $< 1$  ist, liefert jeweils die in (38) angegebene Konstante. Für  $n \rightarrow \infty$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{n1} = 1$  und

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n1} = 1$ , wie zu erwarten war.

Die regulären Punktpolygone werden analog behandelt. Daß es nur die in § 2 konstruierten gibt, sieht man wieder, indem man in den Formeln (39a) bzw. (39b) statt  $\varrho_{kv}$  bzw.  $r_{kv}$  versuchsweise beliebige komplexe  $\eta_{kv}$  mit  $0 < |\eta_{kv}| < 1$  einsetzt. Man findet, daß dann das Bildgebiet der endlichen  $\xi$ -Ebene ein reguläres  $n$ -Eck enthält mit  $n = k$  und mit  $nq$  bzw.  $nq + 1$  Polen. An dieses  $n$ -Eck schließen sich dann Hälften RIEMANNscher Flächen von  $\log(z - E_v)$ . Es ergeben sich also keine neuen regulären Punktpolygone. Für  $q = 1$  folgen aus dem Spezialfall (25) von (3) unmittelbar die in (40) angegebenen Formeln. Im Falle  $q = 2$  werden wir auf das folgende Gleichungssystem geführt, wenn wir  $\varrho_{k1}^k = x$ ,  $\varrho_{k2}^k = y$ , bzw.  $r_{k1}^k = x$ ,  $r_{k2}^k = y$  setzen:

$$kx^2 - kxy - (3k - 1)x + (k - 1)y = 0$$

$$ky^2 - kxy - (3k - 1)y + (k - 1)x = 0$$

bzw.

$$kx^2 - kxy - (3k + 1)x + (k + 1)y = 0$$

$$ky^2 - kxy - (3k + 1)y + (k + 1)x = 0.$$

Daraus folgt, daß  $x$  und  $y$  Lösungen der einen quadratischen Gleichung sind:

$$k^2x^2 - 2k(2k - 1)x + (k - 1)(2k - 1) = 0$$

bzw.

$$k^2x^2 - 2k(2k + 1)x + (k + 1)(2k + 1) = 0.$$

Dies liefert die Formeln (40) für  $q = 2$ .

Die Aussage von Satz 8 über Punktpolygone wollen wir noch unabhängig von der Terminologie des § 2 formulieren:

*Satz 8a:  $z = F_k(\xi)$  sei eine im Kleinen schlichte meromorphe Funktion mit endlich vielen Polen, die einer Gleichung*

$$F\left(e^{\frac{2\pi i}{k}} \cdot \xi\right) = e^{\frac{2\pi i}{k}} \cdot F(\xi) \quad k = 2, 3, \dots$$

*genügt und die genau  $2k$  asymptotische Werte besitzt. Dann liegen alle Pole auf  $k$  Halbgeraden, die zum asymptotischen Wert  $\infty$  gehören.  $F_k(\xi)$  hat bis auf eine Drehung der  $\xi$ -Ebene die Gestalt (39a) oder (39b), und für die Pole gelten die Formeln (40).*

Für den speziellen Fall  $k = 2$  gilt der folgende

*Satz 8b: Ist  $z = F(\xi)$  eine im Kleinen schlichte meromorphe Funktion mit endlich vielen Polen, die genau 4 asymptotische Werte besitzt, so liegen sämtliche Pole auf einer Geraden, die in beiden Richtungen zum asymptotischen Wert  $\infty$  gehört.*

Man gewinnt Satz 8b durch die Überlegung, daß nach den Konstruktionen des § 2 ein echtes Punktpolygon mit 4 Randstücken notwendig regulär ist.

Aus Satz 8b folgt auch eine Aussage über die  $c$ -Stellen (vgl. S. 103): Nimmt eine im Kleinen schlichte meromorphe Funktion mit 4 asymptotischen Werten den Funktionswert  $c$  nur endlich oft an, so liegen sämtliche  $c$ -Stellen auf einer Geraden, auf der die Funktion in beiden Richtungen den asymptotischen Wert  $c$  besitzt.

Das System (3) ist außer für die regulären Polygone auch für beliebige gewöhnliche Dreiecke (mit willkürlich vorgegebenem  $p$ ) eindeutig nach den  $\lambda_i$  auflösbar. Dies folgt wieder in Analogie zu den regulären Polygonen daraus, daß zwei gewöhnliche Dreiecke mit gleichen Winkeln notwendig ähnliche Dreiecke sind. Für  $p = 1$  zeigt sich, daß (3) für beliebige echte Polygone nach  $\lambda_1$  eindeutig auflösbar ist. Das transformierte System (3\*) gewinnt bei gewöhnlichen Polygonen mit  $p = 1$  eine besonders anschauliche Bedeutung gemäß dem folgenden

*Satz 9: Bildet man das gewöhnliche Polygon  $\mathfrak{P}$  mit  $p = 1$  so auf den Kreis  $|\xi| < 1$  ab, daß der Pol von  $\mathfrak{P}$  in  $\xi = 0$  übergeht, so ist*

$$\sum_{v=1}^n (1 - \alpha_v) \varepsilon_v = 0^{21)}.$$

Das bedeutet folgendes: denkt man sich  $\varepsilon_v$  mit einer Masse belegt, die dem Außenwinkel von  $E_v$  gleich ist, so liegt der Schwerpunkt aller Massen stets im Kreismittelpunkt.

Nach Satz 9 lassen sich die  $\varepsilon_v$  berechnen, wenn  $\mathfrak{P}$  ein Dreieck oder ein symmetrisches Viereck ist. Diese Fälle habe ich bereits (in etwas speziellerer Formulierung) in meiner Arbeit [6], S. 263–265 behandelt. Für das Dreieck ergibt sich dabei die folgende bemerkenswerte Analogie zur elementaren Dreiecksgeometrie: Ist  $\mathfrak{P}$  in Satz 9 ein Dreieck und bezeichnen wir die  $E_v$  gegenüberliegende Seite mit  $L_v$ , ihre Bildlänge auf  $|\xi| = 1$  mit  $\Lambda_v$  und den Außenwinkel von  $E_v$  mit  $\chi_v$ , so gilt

a) Sinus-Satz:

$$\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 = \sin \Lambda_1 : \sin \Lambda_2 : \sin \Lambda_3$$

b) Cosinus-Satz:

$$\chi_3^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + 2 \chi_1 \chi_2 \cos \Lambda_3.$$

Außer dem allgemeinen Gleichungssystem (3) treten noch weitere analoge Gleichungen zwischen den Konstanten auf, falls das Polygon logarithmische Ecken besitzt. Sind  $s_\mu$  und  $s_{\mu+1}$  die zu einer logarithmischen Ecke  $E_\mu$  gehörigen Polygonseiten, so bezeichnen wir den Abstand zwischen den parallelen Geraden, auf welchen die Seiten  $s_\mu$  und  $s_{\mu+1}$  liegen, mit  $d_\mu$ . Dabei versehen wir  $d_\mu$  noch mit einem Vorzeichen; und zwar sei  $d_\mu$  positiv oder negativ, je nachdem  $s_{\mu+1}$  links oder rechts von  $s_\mu$  gelegen ist, wenn wir  $s_\mu$  von  $E_{\mu-1}$  nach  $E_\mu$  durchlaufen.

<sup>21)</sup> Siehe Anmerkung zu Satz 3, S. 95.

(Bei nullwinkligen logarithmischen Ecken ist  $d_\mu$  stets positiv.) Dann gilt der folgende

**Satz 10:**  $E_\mu$  sei eine logarithmische Ecke von  $\mathfrak{P}$  mit dem Winkel  $w_\mu = -m_\mu \pi$  und  $d_\mu$  sei der Abstand zwischen  $s_\mu$  und  $s_{\mu+1}$ . Denken wir uns dann  $\mathfrak{P}$  so gedreht, daß  $C > 0$  ist, dann besteht zwischen den Konstanten der Funktion (2) die Gleichung

$$(41) \quad \left[ \frac{d^{m_\mu}}{d\zeta^{m_\mu}} (\zeta - \kappa_\mu)^{m_\mu+1} f'(\zeta) \right]_{\zeta=\kappa_\mu} = \frac{m! d_\mu}{\pi} e^{i\pi \left( \sum_{v=\mu+1}^{n-1} \kappa_v + \mu + 1 - n \right)} \quad \text{für } \mu \neq n$$

$$\left[ \frac{d^{m_n}}{d\zeta^{m_n}} \zeta^{m_n-1} f' \left( -\frac{1}{\zeta} \right) \right]_{\zeta=0} = \frac{m! d_n}{\pi} (-1)^{m_n-1} \quad \text{für } \mu = n^{32)}.$$

Ist insbesondere  $E_n$  nullwinklig logarithmisch, so folgt aus (41)

$$(42) \quad C = \frac{d_n}{\pi}.$$

Von den Konstanten  $\kappa_v$  denken wir uns etwa  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  willkürlich vorgegeben. Hat dann ein gewöhnliches Polygon  $\mathfrak{P}$ , wo  $n \geq 3$  ist,  $n-2$  logarithmische Ecken  $E_\mu$  mit den Seiten-Abständen  $d_\mu$ , dann läßt sich das aus (3) und (41) zusammengesetzte System eindeutig nach den Konstanten  $C, \kappa_3, \kappa_4, \dots, \kappa_{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  auflösen. Besitzt ein gewöhnliches Polygon  $\mathfrak{P}$ , wo  $n \geq 4$  ist,  $n-3$  uneigentlich logarithmische Ecken  $E_\mu$  ( $d_\mu = 0$ ), dann läßt sich das zugehörige System  $\{(3), (41)\}$  eindeutig nach  $\kappa_3 \dots \kappa_{n-1}, \lambda_1 \dots \lambda_p$  auflösen.

**Beweis:** Ist  $E_\mu$  mit  $\mu \neq n$  eine logarithmische Ecke von  $\mathfrak{P}$  mit dem Winkel  $w_\mu = -m_\mu \cdot \pi$ , dann hat  $f'(\zeta)$  in der Umgebung von  $\zeta = \kappa_\mu$  die Entwicklung

$$f'(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_{v-m_\mu-1} (\zeta - \kappa_\mu)^{v-m_\mu-1}, \quad c_{-m_\mu-1} \neq 0.$$

Führt man nun einen positiven Umlauf um  $\zeta = \kappa_\mu$  durch, dann ändert sich  $f(\zeta)$  nach dem Residuensatz um  $2\pi i c_{-1}$ . Setzt man statt dessen  $f(\zeta)$  bei einem derartigen Umlauf, der an einer Stelle  $\zeta > \kappa_\mu$  beginnen und endigen möge, nach dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip fort, so sieht man, daß der neue Zweig von  $f(\zeta)$  die Strecke  $\kappa_\mu < \zeta < \kappa_{\mu+1}$  auf die Seite eines gespiegelten Polygons abbildet, die gegenüber der ursprünglichen Polygonseite um  $2d_\mu i \times \times \arccos f'(\zeta)$  mit  $\kappa_\mu < \zeta < \kappa_{\mu+1}$  verschoben ist. Daraus und aus (4), S. 96, ergibt sich die Gleichung (41) für  $\mu \neq n$ . Im Falle  $\mu = n$  ist eine Transformation  $\zeta_* = -1/\zeta$  durchzuführen.

Hat ein gewöhnliches Polygon  $n-2$  logarithmische Ecken, so überlegt man sich, daß es durch seine Winkel sowie durch die  $n-2$  Seitenabstände  $d_\mu$  seiner Gestalt und Größe nach eindeutig bestimmt ist. Daraus folgt die eindeutige Auflösbarkeit des Systems  $\{(3), (41)\}$  nach den Konstanten  $C, \kappa_3 \dots \kappa_{n-1}, \lambda_1 \dots \lambda_p$ . Von den Abständen  $d_\mu$  muß in diesem Falle mindestens einer von null verschieden sein, d. h. es muß mindestens eine Ecke eigentlich logarithmisch sein.

Besitzt ein gewöhnliches Polygon  $n-3$  uneigentlich logarithmische Ecken, so sieht man, daß es durch seine Winkel der Gestalt nach eindeutig bestimmt ist. Das System  $\{(3), (41)\}$  ist daher nach  $\kappa_3 \dots \kappa_{n-1}, \lambda_1 \dots \lambda_p$  eindeutig auflösbar. (Die Konstante  $C$  fällt aus (41) heraus.) — Damit ist Satz 10 bewiesen.

<sup>32)</sup> Als null-te Ableitung einer Funktion betrachten wir immer die Funktion selber.

Als Beispiel für ein gewöhnliches  $n$ -Eck mit  $n - 3$  uneigentlich logarithmischen Ecken betrachten wir die RIEMANNsche Fläche von  $\sqrt[n-3]{\frac{z-i}{z+i}}$ , soweit sie über der oberen  $z$ -Halbebene gelegen ist; aus ihr denken wir uns ein beschränktes Dreieck mit der Spitze in  $z = i$  und der Grundlinie auf der reellen Achse ausgeschnitten. Bei diesem Polygon ist durchweg  $m_\mu = 1$ . In ähnlicher Weise lassen sich Polygone mit beliebigem  $m_\mu$  konstruieren.

Eine besonders anschauliche Bedeutung hat (41) im Spezialfall des folgenden

**Satz 11:** Ist  $\mathfrak{P}$  ein gewöhnliches beschränktes Polygon und  $E_n$  eine uneigentlich logarithmische Ecke mit dem Winkel  $w_n = -\pi$ , so genügen die Konstanten von (2) der Gleichung

$$\kappa_\mu = \frac{\sum_{v=1}^{n-1} (1 - \alpha_v) \kappa_v}{\sum_{v=1}^{n-1} (1 - \alpha_v)}.$$

Denkt man sich also  $\kappa_v$  mit einer Masse belegt, die dem Außenwinkel von  $E_v$  gleich ist, so liegt jedes  $\kappa_\mu$  im Schwerpunkt aller übrigen  $\kappa_v$ .

Satz 11 folgt unmittelbar aus Satz 10 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in dem Spezialfall  $\sum_{v=1}^{n-1} (1 - \alpha_v) = 0$  ist (Fig. 11).

Unter den in Satz 10 genannten Polygonen mit  $n - 2$  logarithmischen Ecken bzw. mit  $n - 3$  uneigentlich logarithmischen Ecken befinden sich nur



Fig. 11.

wenige schlichte Typen. Sie sollen hier noch vollständig aufgezählt und die Konstantenbestimmung durchgeführt werden. Dabei werden nur einige trivialere Fälle übergangen (Dreiecke, sowie Schlitzpolygone, bei denen alle positiven Winkel  $= 2\pi$  sind). Der Beweis der Vollständigkeit, bei dem mehrere Fälle durchzuprobieren sind, kann dem Leser überlassen bleiben. Die Abbildung normieren wir bei den Vierecken stets so, daß  $\kappa_1 = 0$  und  $\kappa_2 = 1$  ist ( $\kappa_3 = \kappa > 1$ ). Bei den Fünfecken setzen wir  $\kappa_2 = -1$ ,  $\kappa_3 = 1$ ,  $\kappa_1 = -\kappa' < -1$ ,  $\kappa_4 = \kappa > 1$ . Bei den Beispielen 1, 2, 5 und 6 ist  $C = d_n/\pi$  wegen (42).

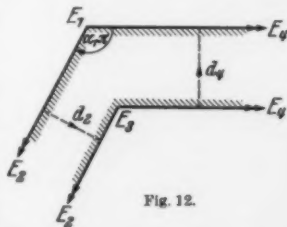


Fig. 12.

1. Viereck mit zwei gegenüberliegenden nullwinkligen Ecken  $E_2$  und  $E_4$  (Fig. 12):

$$\kappa = 1 + \left( \frac{d_2}{d_4} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

2. Viereck mit zwei aufeinanderfolgenden nullwinkligen Ecken  $E_3$  und  $E_4$  (Fig. 13):

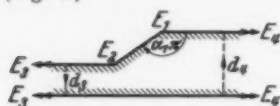


Fig. 13.

$$\kappa = \frac{\frac{1}{d_4^{1-\alpha_1}}}{\frac{1}{d_4^{1-\alpha_1}} - \frac{1}{d_3^{1-\alpha_1}}}.$$

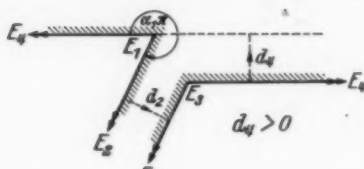


Fig. 14.

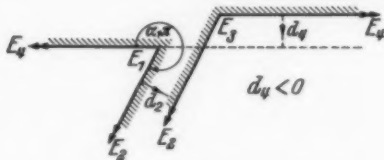


Fig. 14a.

3. Viereck mit zwei gegenüberliegenden logarithmischen Ecken  $E_2$  und  $E_4$  mit den Winkeln  $w_2 = 0$  und  $w_4 = -\pi$  (Figg. 14 und 14a).

$$d_4 \cdot (\kappa - 1)^{2-\alpha_1} = d_2 (1 + \alpha_1 \kappa - 2 \kappa)$$

$$C \pi \cdot (\kappa - 1)^{2-\alpha_1} = d_2.$$

4. Viereck mit zwei aufeinanderfolgenden logarithmischen Ecken  $E_3$  und  $E_4$  mit den Winkeln  $w_3 = 0$  und  $w_4 = -\pi$  (Fig. 15).

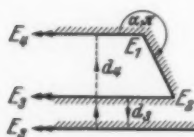


Fig. 15.

$$d_4 \cdot \kappa^{\alpha_1-1} (\kappa - 1)^{2-\alpha_1} = d_3 (\kappa + \alpha_1 - 2)$$

$$C \pi (\kappa + \alpha_1 - 2) = d_4.$$

5. Fünfeck mit drei aufeinanderfolgenden nullwinkligen Ecken  $E_4$ ,  $E_5$  und  $E_1$  (Figg. 16 und 16a).

$$d_1 = d_2 (\kappa' - 1)^{\alpha_2-1} (\kappa' + 1)^{2-\alpha_2} (\kappa + \kappa')^{-1}$$

$$d_4 = d_5 (\kappa + 1)^{\alpha_2-1} (\kappa - 1)^{2-\alpha_2} (\kappa + \kappa')^{-1}.$$

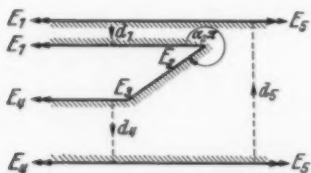


Fig. 16.

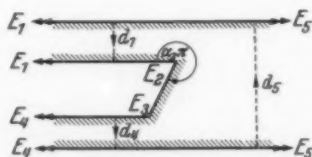


Fig. 16a.

Das Fünfeck ist schlicht, wenn  $1 < \alpha_2 < 2$ . In diesem Fall läßt sich für  $\kappa$  bzw.  $\kappa'$  eine untere Schranke angeben, welche von  $d_1$  bzw.  $d_4$  unabhängig ist:

$$\kappa > \frac{\frac{1}{d_5^{2-\alpha_1}} + \frac{1}{d_4^{2-\alpha_1}}}{\frac{1}{d_6^{2-\alpha_1}} - \frac{1}{d_4^{2-\alpha_1}}}$$

$$\kappa' > \frac{\frac{1}{d_5^{\alpha_1-1}} + \frac{1}{d_1^{\alpha_1-1}}}{\frac{1}{d_6^{\alpha_1-1}} - \frac{1}{d_1^{\alpha_1-1}}}.$$

6. Fünfeck mit drei nicht aufeinanderfolgenden nullwinkligen Ecken  $E_2$ ,  $E_3$  und  $E_6$  (Fig. 17 und 17a).

$$d_2 = \frac{d_1}{2} (\kappa' - 1)^{\alpha_1-1} (\kappa + 1)^{2-\alpha_1}$$

$$d_3 = \frac{d_1}{2} (\kappa' + 1)^{\alpha_1-1} (\kappa - 1)^{2-\alpha_1}.$$

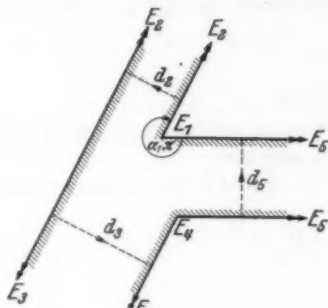


Fig. 17.

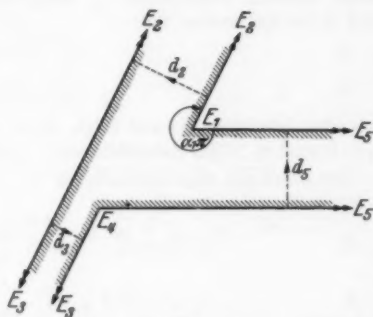


Fig. 17a.

Im schlichten Fall  $1 < \alpha_1 < 2$  läßt sich für  $\kappa$  bzw.  $\kappa'$  eine obere Schranke angeben, welche von  $d_2$  bzw.  $d_3$  unabhängig ist:

$$\kappa < 1 + \left( \frac{2d_2}{d_3} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_1}}$$

$$\kappa' < 1 + \left( \frac{2d_3}{d_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1-1}}.$$

7. Viereck mit einer uneigentlich logarithmischen Ecke  $E_4$  mit dem Winkel  $-\pi$  (Fig. 18):

$$\kappa = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2}.$$



Fig. 18.

Dieser Ausdruck bleibt unverändert, wenn man  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  durch  $2 - \alpha_1$  und  $2 - \alpha_2$  ersetzt.

Bildet man also die Komplementärmenge unseres Vierecks auf die untere Halbebene ab, so erhält man dasselbe  $\kappa$ , oder anders ausgedrückt:

Bilden wir das Viereck auf seine Komplementärmenge spiegelbildlich konform ab, so daß die Punkte  $E_1, E_2, E_3$  sich selbst entsprechen, dann wird notwendig auch der Punkt  $\infty$  auf sich selbst abgebildet.

8. Viereck mit einer uneigentlich logarithmischen Ecke  $E_4$  mit dem Winkel  $-2\pi$  (Fig. 19):

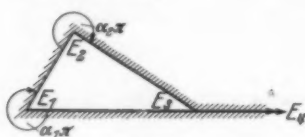


Fig. 19.

$$\kappa = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} \left( 1 + \sqrt{\frac{(\alpha_1 - 1)}{(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 3)}} \right).$$

Ist insbesondere das ausgeschnittene Dreieck  $E_1 E_2 E_3$  gleichseitig, so gilt

$$\kappa = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Die Vierecke unter den aufgeführten Polygonen werden für  $\kappa = 2$  zyklisch, d. h. sie lassen sich konform so auf sich selbst abbilden, daß sich ihre Ecken dabei zyklisch vertauschen<sup>23)</sup>. Beispielsweise erhält man für die Vierecke 2. und 3. im zyklischen Fall:

$$\begin{aligned} 2. \quad & d_4 = 2^{1-\alpha_1} \cdot d_3 \\ 3. \quad & d_4 = (2\alpha_1 - 3) d_2. \end{aligned}$$

Aus der letzteren Formel folgt, daß das Viereck der Fig. 14a mit  $d_2 > 0$ ,  $d_4 < 0$  und  $\alpha_1 > 3/2$  jedenfalls nicht zyklisch sein kann.

Die Fünfecke sind zyklisch für  $\kappa = \kappa' = 2 + \sqrt{5}$ . Für die Fünfecke 5. und 6. heißt das folgendes:

$$\begin{aligned} 5. \quad & d_1 d_4 = d_5^2 \quad \frac{d_1}{d_4} = \left[ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]^{2\alpha_1 - 3} \\ 6. \quad & d_2 d_3 = d_5^2 (2 + \sqrt{5}) \quad \frac{d_2}{d_3} = \left[ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]^{2\alpha_1 - 3}. \end{aligned}$$

Aus den Formeln ergibt sich, daß die Fünfecke der Figuren 16a bzw. 17a mit  $d_4 < d_1$  und  $\alpha_2 > 3/2$  bzw.  $d_3 < d_2$  und  $\alpha_1 > 3/2$  nicht zyklisch sind.

## § 5. Krümmungsverteilung bei konformer Abbildung.

Wir wollen schließlich noch Beispiele dafür bringen, daß es zuweilen möglich ist, Erkenntnisse über konforme Abbildung dadurch zu gewinnen, daß man Gebiete allgemeinerer Natur durch Polygone approximiert. Solche Beispiele sind bisher nur in geringer Zahl bekannt. Es zeigt sich jedoch, daß sich Polygone besonders gut zum Studium der Krümmungsverteilung bei konformer Abbildung eignen. Wir beweisen zunächst als Folgerung aus Satz 9 den nachstehenden

**Satz 12:** Die Funktion  $z = f(\zeta)$  möge das Äußere  $|\zeta| \geq r$  eines Kreises  $\mathfrak{K}$  konform und schlicht auf das Äußere einer einfach geschlossenen analytischen Kurve  $\mathfrak{Z}$  abbilden, so daß  $f(\infty) = \infty$ . Die Krümmung von  $\mathfrak{Z}$  im Punkte  $z = f(\zeta)$  (mit  $|\zeta| = r$ ) bezeichnen wir mit  $K(\zeta)$ . Dann gilt stets

$$\oint_{\mathfrak{K}} K(\zeta) \cdot |f'(\zeta)| \cdot \zeta |d\zeta| = 0.$$

<sup>23)</sup> Diese Vierecke lassen sich konform auf ein Quadrat abbilden, so daß die Ecken wieder den Ecken entsprechen.



Das heißt folgendes: denken wir uns die Peripherie von  $\mathfrak{R}$  so mit Masse belegt, daß die Dichte in jedem Punkt  $= K(\zeta) \cdot |f'(\zeta)|$  ist, so liegt der Massenschwerpunkt stets im Kreismittelpunkt.

Beweis: Bekanntlich ist (vgl. [13])

$$K(\zeta) = \frac{\Re \left( 1 + \zeta \cdot \frac{z''}{z'} \right)}{|\zeta \cdot z'|}.$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß die Funktion  $z = f(\zeta)$  das Äußere des Einheitskreises  $|\zeta| > 1$  auf ein gewöhnliches Polygon mit  $p = 1$  abbildet. Dann ist

$$z = f(\zeta) = C \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{v=1}^n (\tau - \varepsilon_v)^{\alpha_v - 1} \frac{d\tau}{\tau^2}.$$

Wir setzen nun  $\zeta = r \cdot e^{i\varphi}$  mit festem  $r > 1$  und  $\varepsilon_v = e^{i\psi_v}$ . Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \int_0^{2\pi} \zeta \cdot \Re \left( 1 + \zeta \cdot \frac{z''}{z'} \right) d\varphi \\ &= \sum_{v=1}^n (\alpha_v - 1) \cdot \int_0^{2\pi} \zeta \cdot \Re \frac{\zeta}{\zeta - \varepsilon_v} d\varphi \\ (43) \quad &= r \cdot \sum_{v=1}^n (\alpha_v - 1) \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \cdot \frac{r^2 - r \cos(\varphi - \psi_v)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi_v)} d\varphi \\ &= r \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \cdot \frac{r^2 - r \cos \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} d\varphi \cdot \sum_{v=1}^n (\alpha_v - 1) \cdot e^{i\psi_v} \\ &= 0, \end{aligned}$$

letzteres wegen Satz 9. Dasselbe gilt natürlich für jedes  $r > r'$ , wenn  $f(\zeta)$  das Äußere eines beliebigen Kreises  $|\zeta| \geq r'$  auf ein Polygon abbildet. Ist nun  $f(\zeta)$  eine beliebige Funktion, welche die Voraussetzungen von Satz 12 erfüllt, so gibt es stets einen Kreis  $|\zeta| = r' < r$ , der durch  $f(\zeta)$  auf eine analytische Kurve  $\mathfrak{Z}'$  abgebildet wird. Indem man  $\mathfrak{Z}'$  durch gewöhnliche Polygone approximiert, erhält man die allgemeine Aussage von Satz 12. Satz 9 läßt sich als Grenzfall von Satz 12 auffassen.

Bildet man das Innere von  $\mathfrak{R}$  auf das Innere von  $\mathfrak{Z}$  ab, so wird  $\mathfrak{S}$  dem Quadrat des Radius  $r$  proportional gemäß dem folgenden

Satz 13: Bildet die Funktion  $z = f(\zeta)$  das Innere  $|\zeta| \leq r$  eines Kreises  $\mathfrak{R}$  konform auf das Innere einer einfach geschlossenen analytischen Kurve  $\mathfrak{Z}$  ab, so ist

$$\mathfrak{S} = r^2 \pi \cdot \frac{f''(0)}{f'(0)}.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß die Funktion  $z = f(\zeta)$  das Innere des Einheitskreises  $|\zeta| < 1$  auf ein beschränktes gewöhnliches Polygon abbildet. Dann ist

$$z = f(\zeta) = C \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{v=1}^n (\tau - \varepsilon_v)^{\alpha_v - 1} d\tau.$$

Das Integral  $\mathfrak{S}$  läßt sich für  $r < 1$  in analoger Weise wie beim Beweis von Satz 12 in den Ausdruck (43) umformen und durch elementare Integrationsmethoden findet man

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \frac{r^2 - r \cos \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} d\varphi \\ = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{r^2 - r \cos \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} d\varphi = -r\pi \quad \text{für } r < 1.$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$\frac{f''(0)}{f'(0)} = - \sum_{\nu=1}^n (\alpha_\nu - 1) \bar{\varepsilon}_\nu,$$

so folgt unmittelbar Satz 13 für den Spezialfall der Polygonabbildung. Die allgemeine Aussage von Satz 13 ergibt sich wie bei Satz 12 durch Approximation einer analytischen Kurve durch gewöhnliche Polygone.

#### Literaturverzeichnis.

- [1] RINGLEB, FRIEDRICH: Über die konforme Abbildung von Polygonen, Diss. Weida i. Thür. 1926. — [2] BIEBERBACH, LUDWIG: Lehrbuch der Funktionentheorie, II, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1931. — [3] RUNGE, C., u. H. KÖNIG: Numerisches Rechnen, Berlin 1924. — [4] BURNSIDE, W.: On a problem of conformal representation, Proc. London Math. Soc. **24**, 187 (1893). — [5] PESCHL, E.: Zur Theorie der schlichten Funktionen, J. reine angew. Math. **176**, 61–94 (1937). — [6] UNKELBACH, H.: Abschätzung der Bildlänge von Randelementen bei konformer Abbildung auf den Einheitskreis. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. München 1936. — [7] CHRISTOFFEL, E. B.: Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Ann. di mat. (II) **1**, 89 bis 103 (1868.) Ges. Abhandlungen, Bd. I, S. 245–258. — [8] SCHWARZ, H. A.: Über einige Abbildungsaufgaben. J. reine angew. Math. **70**, 105–120 (1869). Gesammelte Werke II, S. 65. — [9] STUDY-BLASCHKE: Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft II: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, S. 72–94, Leipzig und Berlin 1913. — [10] KLUYVER, J. C.: Konforme Abbildungen, welche von der  $\zeta$ -Funktion vermittelt werden. Z. Math. Phys. **1895**, 132. — [11] SCHILLING, FR.: Beiträge zur geometrischen Theorie der SCHWARZschen  $s$ -Funktion, Math. Ann. **44**, 161–260 (1894). — [12] SCHÖNFLIES, A.: Über Kreisbogenpolygone (Erste Abhandlung), Math. Ann. **42**, 377–408 (1893). — [13] PESCHL, E.: Über die Krümmung von Niveaueurven bei der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete auf das Innere eines Kreises, Math. Ann. **106**, 574–594 (1932). — [14] NEVANLINNA, R.: Über RIEMANNsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. **58**, 295–373.

(Eingegangen am 23. Juni 1951.)

## Ideals of Meromorphic Functions of Several Complex Variables.

By

SIN HITOTUMATU and OSAMU KÔTA in Tokyo.

### Introduction.

Recently, Messrs. H. CARTAN [4], [5]<sup>1)</sup> and K. OKA [7], [8] have developed the theory of ideals of holomorphic functions of several complex variables as a generalization of the "Cousin problems", and shown the solvability of these problems in a domain of regularity (Regularitätsbereich). Their results are of the highest importance in the theory of analytic functions of several complex variables.

In the present paper, we shall consider the fractional ideals (gebrochene Ideale) of meromorphic functions in place of the integral ideals of holomorphic functions in the above theory. In most part of our theory, we may apply the method of multiplying the ideals with an integralizator, and reducing thus the problems to the known case of integral ideals. But in dealing with the inverse-ideals or the "first Cousin problem" (Theorem 5), we need more intensive considerations. After this, we shall apply the results to the "class-group of ideals". Our final result shows that the interest in considering the class-group of ideals is rather limited in case  $n \geq 2$ , unlike the case  $n = 1$  studied by O. F. G. SCHILLING [11]. But it may not be meaningless to investigate to what extent such method is effective.

Throughout this paper, we always consider the space of  $n$  complex variables  $z_1, \dots, z_n$ , and write merely  $z$  instead of  $z_1, \dots, z_n$  for simplicity's sake, and also  $a, b, c, \dots$  for the points of the space. Without special remarks,  $f, g, h, p, q, \dots$  mean the holomorphic functions;  $\varphi, \psi, \chi, \dots$  the meromorphic functions;  $\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \dots$  the ideals of holomorphic functions;  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$  the ideals of meromorphic functions, and  $U, V, W, X, Y, \dots$  the neighbourhoods or open sets. The domains we consider are always assumed to be finite and univalent. All the functions are assumed to be one-valued.

The authors express their hearty gratitude to Prof. H. BEHNKE for his valuable comments.

### Contents.

- § 1. Definitions and preliminary properties.
- § 2. The bundle (faisceau) of ideals.
- § 3. Main Theorems.
- § 4. On the class-group of ideals.

### § 1. Definitions and preliminary properties.

We denote by  $\mathfrak{O}_A$  the ring consisting of all functions holomorphic in a subset  $A$ , i. e., holomorphic in some neighbourhood of  $A$  of our  $z$ -space. Mainly after STEGEL [12], we shall use the following terminologies.

<sup>1)</sup> Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of this paper.

We say that  $f \in \mathfrak{D}_A$  divides  $g \in \mathfrak{D}_A$  and write  $f|g$ , if there exists a function  $h \in \mathfrak{D}_A$  such that  $f \cdot h = g$ . A function holomorphic and never vanishing in  $A$ , i. e., a factor of 1 is called a *unit* in  $A$ . A set of functions  $f_1, f_2, \dots \in \mathfrak{D}_A$  not all of which are zero, is called *coprime* in  $A$ , written  $(f_1, f_2, \dots) = 1$  or more exactly  $(f_1, f_2, \dots)_A = 1$ , if there is no common divisors other than the units in  $A$ .

A function  $\varphi(z)$  is said to be *meromorphic* in a domain  $D$ , if it satisfies the following conditions:

M1°.  $\varphi(z)$  is defined and holomorphic in  $D$  up to its singular variety  $E$ .  $E$  is closed and nowhere dense in  $D$ , and for every neighbourhood  $U$  of an arbitrary point  $a$  on  $E$ ,  $U - E$  is connected.

M2°. At every point  $a$  of  $D$ , there exist a neighbourhood  $U_a$  and two functions  $p_a, q_a$  holomorphic and coprime in  $U_a$  such that  $p_a = q_a \cdot \varphi$  in  $U_a - E$ .  $p_a$  and  $q_a$  are called the *local numerator* and *denominator* of  $\varphi(z)$  at a respectively. They are determined up to the units at  $a$ . The function  $q_a \cdot \varphi$  is prolongable holomorphically all over  $U_a$  including  $E$ .

If we have two functions  $p_a, q_a$  and a neighbourhood  $U_a$  at every point  $a$  of a domain  $D$ , such that  $p_a$  and  $q_a$  are holomorphic and coprime at every point in  $U_a$ , and that the function  $p_a q_b / q_a p_b$  is a unit in  $U_a \cap U_b$  unless  $U_a \cap U_b$  is empty, then such a system  $C: \{p_a = q_a / q_a; U_a\}$  is called *second Cousin distribution of meromorphic functions in  $D$* . If for such  $C$ , there exists a function  $\varphi$  meromorphic in  $D$  such that  $\varphi / q_a$  is a unit at  $a$  for every point  $a \in D$ , we say that  $\varphi$  is a *solution* of the given Cousin distribution  $C$ . If we have always the solution for any given second Cousin distribution  $C$  in  $D$ , we say that  $D$  is of the *Cousin-type*<sup>2)</sup>.

It is well-known that<sup>3)</sup>

**Lemma 1.1.** For a second Cousin distribution of meromorphic functions  $\{p_a/q_a; U_a\}$  in  $D$ , the systems  $\{p_a; U_a\}$  and  $\{q_a; U_a\}$  form second Cousin distributions of holomorphic functions in  $D$ .

Hence, for a function  $\varphi$  meromorphic in a domain of regularity  $D$ , we have a second Cousin distribution  $C$  consisting of its local denominators. Taking an arbitrary function  $g \not\equiv 0$  from the solution-ideal of  $C$ <sup>4)</sup>, we have  $h = g \cdot \varphi \in \mathfrak{D}_D$ , which implies the following:

**Lemma 1.2.** The family  $\mathfrak{R}_D$  consisting of all the meromorphic functions in a domain of regularity  $D$  form a field which may be considered as the quotient-field of the domain of integrity  $\mathfrak{D}_D$ .

It is well-known that if  $p, q$  are two distinguished polynomials (ausgezeichnete Pseudopolynome) of  $z_n$  in  $\mathfrak{D}_n$ ,  $q|p$  implies the existence of a distinguished polynomial  $h$  of  $z_n$  such that  $p = q \cdot h$ <sup>5)</sup>. From the Weierstrass' preparation theorem (Vorbereitungssatz)<sup>6)</sup> and this fact, we have easily the following:

**Lemma 1.3.** The ring  $\mathfrak{D}_D$  is integrally-closed (ganz abgeschlossen) for any domain  $D$ .

<sup>2)</sup> As for the Cousin problems, see for example, BEHNKE-THULLEN [2], Chap. V, and BEHNKE-STEIN [1].

<sup>3)</sup> See for example, SIEGEL [12], p. 16.

<sup>4)</sup> CARTAN, H. [5], Theorem 3ter, p. 60. See also Theorem I in the present paper.

<sup>5)</sup> OSGOOD, W. F. [9], "Satz 3", p. 101.

<sup>6)</sup> See W. F. OSGOOD [9], Chap. II, § 2; BOCHNER-MARTIN [3], Chap. IX, § 1; or SIEGEL [12], Chap. I.

From the theorem of unique factorization in  $\mathfrak{O}_a^?$ , we obtain the following two lemmas.

**Lemma 1.4.<sup>8)</sup>** *When a domain  $U$  is of Cousin type, a finite number of functions  $f_1, \dots, f_m$  are coprime in  $U$ , if and only if they are coprime at every point of  $U$ .*

**Lemma 1.5.<sup>9)</sup>** *If a finite number of functions  $f_1, \dots, f_m$  are coprime at a point  $a$ , there exists a neighbourhood  $U \ni a$  in which  $f_1, \dots, f_m$  are coprime.*

Next, we give some definitions concerning the ideal. For a while, we denote simply by  $\mathfrak{K}$  or  $\mathfrak{D}$  instead of  $\mathfrak{K}_D$  or  $\mathfrak{D}_D$  respectively.

Let  $\mathfrak{h}$  be a subset of  $\mathfrak{K}$ . If there exists a function  $\varphi \in \mathfrak{K}$ , ( $\varphi \neq 0$ ) such that

$$\varphi \cdot \mathfrak{h} = \{\varphi \cdot \psi \mid \psi \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{D},$$

$\varphi$  is called an *integralizer* of  $\mathfrak{h}$ . A subset  $\mathfrak{a} \neq \{0\}$  of  $\mathfrak{K}$  is called an *ideal* or more precisely an *ideal in  $\mathfrak{K}$  with respect to  $\mathfrak{D}$* , if  $\mathfrak{a}$  is a module over  $\mathfrak{D}$  with an integralizer.

The set of all the integralizers of a given ideal  $\mathfrak{a}$  forms with 0 an ideal which is called the *inverse-ideal* of  $\mathfrak{a}$ , written  $\mathfrak{a}^{-1}$ . Two ideals  $\mathfrak{a}$  and  $\mathfrak{b}$  satisfying  $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$  is called *quasi-equal* with each other. The quasi-equality is an equivalent relation, and the set of all ideals in  $\mathfrak{K}$  classified by this equivalence relation gives rise to ideal-classes. The *product* of two ideals  $\mathfrak{a}$  and  $\mathfrak{b}$  in  $\mathfrak{K}$  is defined as usual, viz.

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \left\{ \sum_{j=1}^m \varphi_j \cdot \psi_j \mid \varphi_j \in \mathfrak{a}, \psi_j \in \mathfrak{b}, m = 1, 2, \dots \right\}.$$

This multiplication of ideals induces in a well-known manner the multiplication of ideal-classes and the latter forms a group<sup>10)</sup> called the *class-group of ideals*.

If a subset  $\mathfrak{h}$  of  $\mathfrak{K}$  has an integralizer, the family

$$[\mathfrak{h}] = \left\{ \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j \mid c_j \in \mathfrak{D}, \varphi_j \in \mathfrak{h}, m = 1, 2, \dots \right\}$$

is an ideal in  $\mathfrak{K}$  which is called the *ideal generated by  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{K}$* . If for an ideal  $\mathfrak{a}$  there exists a finite number of functions  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  such that

$$[\varphi_1, \dots, \varphi_m] = \mathfrak{a},$$

we say that the ideal  $\mathfrak{a}$  has a finite basis  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ .

Especially for a subset  $X$  of  $D$ , and an ideal  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{K}_D$ , we can construct the *ideal generated by  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{K}_X$* . We shall denote it by  $(\mathfrak{a})_X$ . If  $X$  is reduced to a point  $a$ , we denote it by  $(\mathfrak{a})_a$  and call it the *ponctual ideal generated by  $\mathfrak{a}$  at  $a$* .

We shall say that an ideal is *locally-principal*, if it generates a principal ideal at every point  $a$  of  $D$ . Also, two ideals  $\mathfrak{a}$  and  $\mathfrak{b}$  generating the same ponctual ideal at every point of  $D$ , are said to be *locally-equivalent* with each other in  $D$ .

<sup>7)</sup> OSGOOD, W. F. [9], "Hauptsatz", p. 94. See also BOCHNER-MARTIN [3], Chap. IX, Theorem 3.

<sup>8)</sup> SIEGEL [12], Theorem 4, pp. 16—17.

<sup>9)</sup> For  $m = 2$ , see W. F. OSGOOD [9], p. 95 or SIEGEL [12], Theorem 3, pp. 9—10. For general  $m \geq 3$ , it can be proved by induction.

<sup>10)</sup> VAN DER WAERDEN [13] II, § 105, p. 94.

We obtain easily the following:

**Lemma 1.6.** *If  $a$  and  $b$  are ideals in  $\mathfrak{R}_D$ , and  $X \subset D$ , we have*

$$(a)_X \cdot (b)_X = (a \cdot b)_X$$

and

$$(a^{-1})_X \subset ((a)_X)^{-1} \text{ (= inverse-ideal of } (a)_X \text{ in } \mathfrak{R}_X).$$

Later we shall prove an important relation (Theorem 6)

$$(a^{-1})_a = ((a)_a)^{-1}.$$

From a result of H. CARTAN<sup>11)</sup>, follows

**Lemma 1.7.** *If two ideals  $a$  and  $b$  in  $\mathfrak{R}_D$  satisfy  $(a)_a = (b)_a$  at a point  $a \in D$ , then there exists a neighbourhood  $U$  of  $a$  in  $D$  such that  $(a)_U = (b)_U$ .*

From this and the ascending chain condition (Teilerkettensatz) which is valid in  $\mathfrak{O}_a$ <sup>12)</sup>, we have

**Lemma 1.8.** *For an ideal  $a$  in  $\mathfrak{R}_D$  and for a point  $a \in D$ , there exists a neighbourhood  $U$  of  $a$  such that  $(a)_U$  has a finite basis.*

**Lemma 1.9.** *The inverse-ideal of an ideal  $a$  in  $\mathfrak{R}_a$  is principal. More precisely, let  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  be a finite basis of  $a$  at  $a$ , which may be written in the form*

$$\varphi_j = p_j/q_j \quad (j = 1, \dots, m),$$

where  $p_j, q_j \in \mathfrak{O}_a$  and  $(p_j, q_j)_a = 1$ . We have the "greatest common divisor"  $p$  of the numerators  $p_1, \dots, p_m$ , and the "least common multiplier"  $q$  of the denominators  $q_1, \dots, q_m$ <sup>13)</sup>. Then we have  $a^{-1} = [q/p]$ .

Now we shall introduce the notion of *closed ideals*. For this purpose, we must first define the *uniform convergence* of a sequence of meromorphic functions in an ideal. To avoid the complication caused from the singularity of indeterminacy<sup>14)</sup>, we define the uniform convergence, as that of the sequence of holomorphic functions obtained by multiplying an integralizer to the original sequence. This definition does not depend upon the special choice of the integralizer, because of the following:

**Lemma 1.10.** *Let  $\{f_n\}$  be a sequence of holomorphic functions in a domain  $D$  and  $g \neq 0$  be a holomorphic function in  $D$ . If the sequence  $\{g \cdot f_n\}$  converges uniformly to a function  $h$  in every compact subset of  $D$ , the sequence  $\{f_n\}$  itself converges uniformly to a function  $f$  holomorphic in  $D$ , in every compact subset of  $D$  and we have  $h = g \cdot f$ .*

**Proof.** Let  $F$  be the point-set on which  $g$  vanishes. We may assume that  $F$  is not empty, for otherwise, this lemma is trivial. We can easily show by Weierstrass' preparation theorem<sup>15)</sup> and the maximum-modulus principle, that the sequence  $\{f_n\}$  is uniformly bounded in a neighbourhood of any point  $a$  on  $F$ , and *a fortiori*, in every compact subset of  $D$ . Hence by a theorem on the removable singularities<sup>16)</sup>, the function  $h/g = f$  is holomorphic all over  $D$  and by Stieltjes' theorem<sup>16)</sup>, the family  $\{f_n\}$  converges to  $f$  in every compact subset of  $D$ . Thus our statement is proved.

<sup>11)</sup> CARTAN, H. [4], Corollary 2 of Theorem  $\alpha$ , p. 194.

<sup>12)</sup> RÜCKERT [10]. See also BOCHNER-MARTIN [3], Chap. X.

<sup>13)</sup> VAN DER WAERDEN [13] I. § 19, "Aufgabe 7", p. 66.

<sup>14)</sup> I. e., ausgezeichnete Singularstelle 2. Art. We are indebted for this terminology to S. BOCHNER; Functions of several complex variables, Princeton Lecture (Mimeographed note, 1936).

<sup>15)</sup> OSGOOD, W. F. [9], "Satz 1", p. 191. Another proof is given in BOCHNER-MARTIN [3], Chap. VIII.

<sup>16)</sup> See for example, P. MONTEL: Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. Paris, p. 246 (1927).

If we denote the uniform convergence defined above by  $\varphi_r \Rightarrow \varphi$ , we see easily that  $\varphi_r \Rightarrow \varphi$  and  $\psi_r \Rightarrow \psi$  imply  $\varphi_r \pm \psi_r \Rightarrow \varphi \pm \psi$  and  $\varphi_r \cdot \psi_r \Rightarrow \varphi \cdot \psi$ .

Then, for an ideal  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{F}_D$ , the collection of all the functions  $\varphi$  which are represented as the uniform limits of functions  $\varphi_r$  in  $\mathfrak{a}$  viz.  $\varphi_r \Rightarrow \varphi$ , forms also an ideal in  $\mathfrak{F}_D$ , which is called the *closure* of  $\mathfrak{a}$ , written  $\bar{\mathfrak{a}}$ <sup>17)</sup>. If  $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$  we say that the ideal  $\mathfrak{a}$  is *closed*. Especially, we shall say that an ideal is *pseudo-principal* if it is closed and locally-principal.

From the definition, we have easily,

**Lemma 1.11.**  $\overline{\varphi \cdot \mathfrak{a}} = \varphi \cdot \bar{\mathfrak{a}}$ ;  $\overline{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{b}}$  and  $(\bar{\mathfrak{a}})^{-1} = \bar{\mathfrak{a}^{-1}} = \overline{(\mathfrak{a}^{-1})}$ , especially,  $\mathfrak{a}^{-1}$  is always closed.

## § 2. The bundle (faisceau) of ideals.

After H. CARTAN [5], we introduce the notion of the bundle of ideals.

Let there correspond an ideal  $\mathfrak{f}_X$  in  $\mathfrak{F}_X$  to every open subset  $X$  in  $D$ . If  $\mathfrak{f}$  satisfies the following conditions **B1**<sup>0</sup>, **B2**<sup>0</sup>,  $\mathfrak{f}$  is called a *bundle of ideals* in  $D$ .

**B1**<sup>0</sup>.  $X \subset Y$  implies  $(\mathfrak{f}_Y)_X \subset \mathfrak{f}_X$ .

**B2**<sup>0</sup>. For every point  $a \in D$ , there exist a neighbourhood  $U_a$  and a function  $g_a$  called the *local integralizator* at  $a$  which is holomorphic in  $U_a$ , and integralizes all the ideals  $\mathfrak{f}_X$ ,  $X$  being contained in  $U_a$ .

In our present case, the condition **B2**<sup>0</sup> is indispensable, as easily shown by an example, but if  $\mathfrak{f}$  satisfies the condition:

**B3**<sup>0</sup>. There exists a function  $g \not\equiv 0$  holomorphic or meromorphic in  $D$  such that  $g \cdot \mathfrak{f}_X \subset \mathfrak{O}_X$  for all  $X$ ,

the condition **B2**<sup>0</sup> is trivially satisfied. The function  $g$  in **B3**<sup>0</sup> is called a *uniform integralizator* of  $\mathfrak{f}$ . Of course there exists a bundle without uniform integralizator.

For a bundle  $\mathfrak{f}$  of ideals, the family,

$$\mathfrak{f}_a = \bigcup_X \{(\mathfrak{f}_X)_a; X \ni a\} = \bigcup_X \{(\mathfrak{f}_X)_a; U_a \supset X \ni a\},$$

is an ideal in  $\mathfrak{F}_a$ , which is called the *punctual ideal generated by  $\mathfrak{f}$  at  $a$* . By the ascending chain condition in  $\mathfrak{O}_a$ <sup>12)</sup>,

**Lemma 2.1.** For every point  $a \in D$ , there exists a neighbourhood  $X$  such that

$$\mathfrak{f}_a = (\mathfrak{f}_X)_a \text{ for all open sets } a \in Y \subset X.$$

Especially, if there exists a neighbourhood  $U \ni a$  which satisfies not only  $\mathfrak{f}_a = (\mathfrak{f}_U)_a$ , but also  $\mathfrak{f}_b = (\mathfrak{f}_U)_b$  for all points  $b \in U$ , we say that  $\mathfrak{f}$  is a *coherent bundle*.

Later we shall prove that a coherent bundle in a domain of regularity, has always a uniform integralizator (Theorem 7).

Let  $\mathfrak{a}$  be an ideal in  $K_D$ . Putting

$$\mathfrak{f}_X = ((\mathfrak{a})_X)^{-1} (= \text{the inverse-ideal of } (\mathfrak{a})_X \text{ in } \mathfrak{F}_X)$$

for every open subset  $X$  of  $D$ , this  $\mathfrak{f}$  defines by Lemma 1.6, a bundle of ideals in  $D$  with uniform integralizator. We call it the *inverse-bundle of ideal  $\mathfrak{a}$* .

**Lemma 2.2.** (Fundamental Lemma). The inverse-bundle  $\mathfrak{f}$  of an ideal  $\mathfrak{a}$  is coherent, and satisfies the relation

$$\mathfrak{f}_a = ((\mathfrak{a})_a)^{-1}$$

at every point  $a$ .

<sup>17)</sup> Compare with SCHILLING [11] or H. CARTAN [5].

**Proof.** (i) First we shall prove the last half. It is evident that for a neighbourhood  $X$  of  $a$ ,

$$\bar{f}_a = (\bar{f}_X)_a = ((a)_X)^{-1}_a \subset ((a)_a)^{-1}$$

by Lemma 1.6 and 2.1. On the other hand, let  $\varphi$  and  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  be the local basis of  $((a)_a)^{-1}$  and  $(a)_a$  respectively, (Lemma 1.8 and 1.9), we have a neighbourhood  $U$  of  $a$  in which

1°.  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  are holomorphic and  $[\varphi_1, \dots, \varphi_m]_U = (a)_U$ .

Therefore  $\varphi$  integralizes the ideal  $(a)_U$  and so we have  $\varphi \in ((a)_U)^{-1} = \bar{f}_U \subset \bar{f}_a$  which implies that  $\bar{f}_a \supset ((a)_a)^{-1}$ .

(ii) Next we can take a neighbourhood  $U$  of  $a$ , satisfying the followings in addition to the above 1°,

2°.  $U$  is chosen as a direct product of circles in order that  $U$  may be a domain of regularity and of Cousin type.

3°.  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  are coprime at every point  $b \in U$  (by Lemma 1.4 and 1.5).

4°.  $(\bar{f}_U)_a = \bar{f}_a$ ;  $[\varphi]_U = \bar{f}_U$  (by Lemma 1.7 and 2.1).

Then we have  $\varphi \in (\bar{f}_U)_b \subset \bar{f}_b$  for every point  $b \in U$ . But since  $\bar{f}_b$  itself is also principal from (i), denoting by  $\psi$  the base, we have  $\varphi = h \cdot \psi$  at  $b$  where  $h \in \mathfrak{D}_b$ . Here,  $h$  must be a unit at  $b$ , for otherwise,  $h$  divides the functions  $\varphi, \varphi_i$  at  $b$  contradicting the condition 3°. Thus we obtain

$$\bar{f}_b = [\psi]_b = [\varphi]_b = (\bar{f}_U)_b$$

which proves our assertion.

### § 3. Main Theorems.

Now we have the following Theorems which generalizes the results by H. CARTAN and K. OKA<sup>18)</sup>.

**Theorem 1.** Let  $\bar{f}$  be a coherent bundle of ideals in a domain of regularity  $D$ . Then there exists one and only one closed ideal  $a$  which generates the same punctual ideal generated by the given bundle  $\bar{f}$  at every point  $a$  of  $D$ , viz.

$$(a)_a = \bar{f}_a.$$

**Theorem 2.** Let  $a$  be a closed ideal in a domain of regularity  $D$  and  $\varphi \in \mathfrak{K}_D$ . If  $\varphi \in (a)_a$  for every point  $a \in D$ , we have  $\varphi \in a$ .

**Theorem 3.** An ideal  $a$  and its closure  $\bar{a}$  are locally-equivalent. Two ideals in a domain of regularity  $D$  are locally-equivalent if and only if their closures coincide with each other.

**Theorem 4.** A domain of regularity  $D$  is of Cousin type if and only if every pseudo-principal ideal in  $D$  is principal. Especially if  $n = 1$ , all closed ideals are principal<sup>19)</sup>.

**Theorem 5.** The first Cousin problem for ideal is always solvable in a domain of regularity, even in the meromorphic case. More precisely, let  $a$  be an ideal in  $\mathfrak{K}_D$  and suppose that there exist a function  $\psi_a$  and a neighbourhood  $U_a$  for every point  $a$  of  $D$  such that  $\psi_a$  is meromorphic in  $U_a$ , and  $\psi_a - \psi_b \in (a)_U$ ,

<sup>18)</sup> The correspondence of these Theorems with the former results in the case of integral ideals is as follows: Theorem 1 corresponds to H. CARTAN [5], Theorem 3 ter and K. OKA [7], [8] Problem E; Theorem 2 to H. CARTAN [5], Theorem 4 ter and K. OKA [7], [8] Problem C; Theorem 3 to H. CARTAN [4], Corollary 1 of Theorem  $\alpha$  and S. HITOTUMATU [6] II, Theorem 2; Theorem 4 to S. HITOTUMATU [6] II, Theorem 1; Theorem 5 to (for holomorphic  $\psi_a$ ) H. CARTAN [5], Theorem 9 ter and K. OKA [7], [8] Problem C<sub>1</sub>.

<sup>19)</sup> This last statement was given by SCHILLING [11], Lemma 3.



unless  $V = U_a \cap U_b$  is empty. Then there exists a function  $\psi$  meromorphic in  $D$  which is called the solution of  $\{\psi_a; U_a\}$  such that  $\psi - \psi_a \in (\mathfrak{I})_a$  for every point  $a \in D$ .

The Theorems 2, 3 and 4 are easily reduced to the known case of ideals in  $\mathfrak{O}_D$ , by multiplying an integralizer. For Theorem 1, the same holds, provided that  $\mathfrak{f}$  has a uniform integralizer. For the general case, we shall prove later. The uniqueness of  $\psi$  follows from Theorem 3.

**Proof of Theorem 5.** Multiplying an integralizer of  $\mathfrak{a}$ , we can reduce to the case for ideal  $\mathfrak{I}$  in  $\mathfrak{O}_D$ , but  $\psi_a$  may not be holomorphic. We have an increasing sequence of compact polyhedral domains  $P_r$  converging to  $D^{(20)}$ . Since the ideal  $\mathfrak{I}_r = (\mathfrak{I})_{P_r}$  generated by  $\mathfrak{I}$  in  $P_r$  has a finite basis<sup>(21)</sup> and then is closed<sup>(22)</sup>, we have functions  $\psi^{(r)}$  meromorphic in  $P_r$  such that  $\psi^{(r)} - \psi_a \in (\mathfrak{I})_a$  for all points  $a \in P_r$ <sup>(23)</sup>. From the fact  $\psi^{(r+1)} - \psi^{(r)} \in (\mathfrak{I})_a = (\mathfrak{I}_r)_a$  at every point  $a$  of  $P_r$ , we have  $\psi^{(r+1)} - \psi^{(r)} \in \mathfrak{I}_r$  by Theorem 2. Now we construct by induction, a sequence of functions  $\chi^{(r)}$  such that  $\chi^{(r)} - \psi^{(r)} \in \mathfrak{I}$ , and a fortiori  $\chi^{(r+1)} - \chi^{(r)} \in \mathfrak{I}_r$ , and that  $|\chi^{(r+1)} - \chi^{(r)}| \leq 1/2^r$  in  $P_r$ . First put  $\chi^{(1)} \equiv \psi^{(1)}$ . Then assume that  $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(r)}$  have already been determined. Since we have  $\psi^{(r+1)} - \chi^{(r)} \in \mathfrak{I}_r = (\mathfrak{I}_{r+1})_{P_r}$ , and since  $\mathfrak{I}_{r+1}$  has a finite basis  $f_1, \dots, f_m \in \mathfrak{O}_{P_{r+1}}$ <sup>(21)</sup>, we have

$$\psi^{(r+1)} - \chi^{(r)} = \sum_{j=1}^m c_j f_j \text{ where } c_j \in \mathfrak{O}_{P_r}.$$

By the famous Weil-Oka's approximation theorem<sup>(24)</sup>, we have functions  $b_j \in \mathfrak{O}_D$  such that

$$|c_j - b_j| \leq 1/2^r \cdot M \cdot m \text{ in } P_r,$$

where  $M = \text{Max}_{j=1, \dots, m} [\sup \{|f_j(z)|; z \in P_r\}]$ . Then the function  $\chi^{(r+1)} \equiv \psi^{(r+1)}$

$-\sum_{j=1}^m b_j f_j$  satisfies our conditions, because it is evident that  $\chi^{(r+1)} - \psi^{(r+1)} \in \mathfrak{I}_{r+1}$  and we have in  $P_r$ ,

$$|\chi^{(r+1)} - \chi^{(r)}| = \left| \sum_{j=1}^m (c_j - b_j) f_j \right| \leq 1/2^r.$$

Then the series

$$\chi^{(1)} + (\chi^{(2)} - \chi^{(1)}) + (\chi^{(3)} - \chi^{(2)}) + \dots + (\chi^{(r+1)} - \chi^{(r)}) + \dots$$

converges uniformly in every compact subset of  $D^{(25)}$ . Denoting by  $\psi$  the limit

<sup>(20)</sup> A polyhedral domain or "analytisches Polyeder" means a closed domain with the form  $\{z | |p_k(z)| \leq 1, k = 1, \dots, m\}$ , where  $p_k \in \mathfrak{O}_D$ . This fact is well-known as a necessary and sufficient condition in order that a domain  $D$  may be a domain of regularity. The necessity used here follows easily from the regular-convexity of a domain of regularity. See BEHNKE-THULLEN [2], Chap. VI or BOCHNER-MARTIN [3], Chap. V.

<sup>(21)</sup> CARTAN, H. [5], Corollary in § 26, p. 56.

<sup>(22)</sup> CARTAN, H. [5], Theorem 11, p. 62.

<sup>(23)</sup> One of the authors has remarked this previously (S. HITOTUMATU [6] I, Theorem 1a). To prove this, we cannot use a method analogous to H. CARTAN [5], Theorem 9 bis p. 56, where  $\psi_a$  are holomorphic, since we cannot extend a meromorphic function from a polyhedral domain to a polycylinder of higher dimensional space in general. But fortunately, the differences  $\psi_a - \psi_b$  are all holomorphic in our present case. Therefore we can prove it by using the method analogous to H. CARTAN [4], Chap. XII, Lemma A, which is named "Heftungssatz" by K. STEIN in his paper on Cousin problem.

<sup>(24)</sup> See for example, H. CARTAN [4], Chap. XII, Lemma C, p. 189.

<sup>(25)</sup> In this case, the integralizers of the partial sums depend upon the compact subdomain of  $D$ , but the Definition of the uniform convergence given in § 1 is also applicable.

of this sequence, this  $\psi$  is the very solution of our problem! Because, for every point  $a \in D$ , there exists a number  $r$  such that  $a \in P_r$ . Since

$$\psi - \psi^{(r)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\chi^{(\mu+r+1)} - \chi^{(r+\mu)}) + (\chi^{(r)} - \psi^{(r)})$$

converges uniformly in  $P_r$ , and since the ideal  $\mathfrak{I}_r$  is closed<sup>(22)</sup>, the function  $\psi - \psi^{(r)}$  belongs to  $\mathfrak{I}_r \subset (\mathfrak{I})_a$ . Also we have already  $\psi^{(r)} - \psi_a \in (\mathfrak{I})_a$ , hence  $\psi - \psi_a \in (\mathfrak{I})_a$  which proves our assertion.

Next, we shall show the following result announced above.

**Theorem 6.** *If  $D$  is a domain of regularity, we have*

$$(a^{-1})_a = ((a)_a)^{-1}$$

for every ideal  $a$  in  $\mathfrak{K}_D$  and for every point  $a$  of  $D$ .

**Proof.** Since  $(a^{-1})_a \subset ((a)_a)^{-1}$  is evident by Lemma 1.6, we have only to prove the inclusion of inverse direction. By Lemma 2.2, the inverse-bundle  $\mathfrak{f}$  of the ideal  $a$  is coherent and has a uniform integralizator. Hence we have an ideal  $\mathfrak{b}$  in  $\mathfrak{K}_D$  such that  $(\mathfrak{b})_a = \mathfrak{f}_a = ((a)_a)^{-1}$  for every point  $a \in D$ . We have  $\mathfrak{b} \subset a^{-1}$ , for if  $\psi$  and  $\varphi$  are arbitrary elements of  $\mathfrak{b}$  and of  $a$  respectively, we have

$$\varphi \cdot \psi \in (a)_a \cdot ((a)_a)^{-1} \subset \mathfrak{D}_a$$

at every point  $a$  of  $D$ , which implies  $\varphi \cdot \psi \in \mathfrak{D}_D$  and then  $\psi \in a^{-1}$ . Therefore we obtain  $((a)_a)^{-1} = \mathfrak{b}_a \subset (a^{-1})_a$  which proves our Theorem. Also we have  $\bar{\mathfrak{b}} = a^{-1}$  by Theorem 3.

Last we shall complete the proof of Theorem 1. For this purpose, we have only to prove the following.

**Theorem 7.** *Every coherent bundle  $\mathfrak{f}$  of ideals in a domain of regularity  $D$  has a uniform integralizator.*

**Proof.** At every point  $a$  of  $D$ , we have a neighbourhood  $U = U_a$  such that  $(\mathfrak{f}_U)_c = \mathfrak{f}_c$  for every point  $c \in U$ . Without loss of generality, we may assume that  $U$  is a domain of regularity and of Cousin type, by choosing it as the direct product of circles. We construct the inverse-bundle  $\mathfrak{g}$  of  $\mathfrak{f}_U$  in  $U$ . By Lemma 2.2 and 1.9,  $\mathfrak{g}_c = ((\mathfrak{f}_U)_c)^{-1} = (\mathfrak{f}_c)^{-1}$  is principal, and denoting by  $\varphi_c = h_c/g_c$  its base, where  $g_c, h_c \in \mathfrak{D}_c$  and  $(g_c, h_c)_c = 1$ , the system  $\{\varphi_c\}$ , and then by Lemma 1.1,  $\{g_c\}$  and  $\{h_c\}$  are second Cousin distributions in  $U$ . Hence there are the solutions  $q_a$  and  $p_a$  of  $\{g_c\}$  and  $\{h_c\}$  respectively.  $p_a$  and  $q_a$  are coprime at every point of  $U$ , and putting  $\psi_a \equiv p_a/q_a$ , we have

$$[p_a/q_a]_c = [\psi_a]_c = [\varphi_c]_c = (\mathfrak{f}_c)^{-1} \quad (c \in U),$$

which implies  $p_a \cdot \mathfrak{f}_c \subset \mathfrak{D}_c$ . Now for every point  $a \in D$ , we associate this function  $\psi_a$  with the neighbourhood  $U_a = U$ . Unless  $U_a \cap U_b$  is empty, we have  $[\psi_a]_c = (\mathfrak{f}_c)^{-1} = [\psi_b]_c$  for every point  $c \in U_a \cap U_b$ , which implies that  $\psi_a/\psi_b$  is a unit in  $U_a \cap U_b$ . Therefore the system  $\{\psi_a; U_a\}$ , and then by Lemma 1.1,  $\mathbb{C}: \{p_a; U_a\}$  are also a second Cousin distributions in  $D$ . Take a function  $f \equiv 0$  from the solution-ideal<sup>(4)</sup> of  $\mathbb{C}$ . This  $f$  is a uniform integralizator of  $\mathfrak{f}$ ! For otherwise, there must exist an open set  $X \subset D$ , a point  $a \in X$  and a function  $\varphi \in \mathfrak{f}_X \subset \mathfrak{f}_a$  such that  $f \cdot \varphi \notin \mathfrak{D}_a$  contradicting to the fact

$$f \in [p_a]_a = [q_a \cdot \psi_a]_a \subset [\psi_a]_a = (\mathfrak{f}_a)^{-1}.$$

Thus our Theorem is completely proved.

## § 4. On the class-group of ideals.

Throughout this last section, we always assume that the domain  $D$  is a domain of regularity.

From Theorem 6, we deduce easily the following facts:

1°. Two ideals  $a$  and  $b$  in  $\mathfrak{R}_D$  are quasi-equal if and only if  $(a)_a$  and  $(b)_a$  are quasi-equal in  $\mathfrak{R}_a$  for every point  $a$  of  $D$ .

2°. An ideal  $\mathfrak{I}$  in  $\mathfrak{O}_D$  with a finite basis  $f_1, \dots, f_m$  is quasi-equal to  $\mathfrak{O}_D$  if and only if  $f_1, \dots, f_m$  are coprime at every point of  $D$ .

3°.  $a^{-1}$  is always pseudo-principal.

4°. If  $a$  is locally-principal, we have  $\overline{a \cdot a^{-1}} = \mathfrak{O}_D$ .

5°. An ideal  $a$  is locally principal if and only if  $\bar{a} = (a^{-1})^{-1}$ . Especially an ideal  $a$  is pseudo-principal if and only if  $a = (a^{-1})^{-1}$ . Therefore, two pseudo-principal ideals are quasi-equal if and only if they coincide with each other.

These facts will be described as follows.

Let  $\mathbf{G}$  be the collection of all the pseudo-principal ideals in  $\mathfrak{R}_D$ . We define the  $\circ$ -multiplication of two ideals  $a, b \in \mathbf{G}$  as  $a \circ b = \overline{a \cdot b}$ . Furthermore, let  $\mathbf{K}$  be the multiplicative group consisting of all the elements of  $\mathfrak{R}_D$  except 0. We define two elements  $\varphi, \psi \in \mathbf{K}$  as equivalent, when the ratio  $\varphi/\psi$  is a unit in  $D$ , and then we obtain a group  $\mathbf{H}$  of equivalent classes of  $\mathbf{K}$ . For every element  $\Phi \in \mathbf{H}$ , we associate a principal ideal  $\mathfrak{p}_\Phi = [\varphi]$  with  $\varphi \in \Phi$ , which does not depend upon the special choice of  $\varphi$  from  $\Phi$ . Then we have:

**Theorem 8.** *The family  $\mathbf{G}$  forms an abelian group by the above  $\circ$ -multiplication whose neutral element is  $\mathfrak{O}_D$  and the inverse of  $a$  is  $a^{-1}$ . This group  $\mathbf{G}$  is isomorphic to the class group of ideals in  $\mathfrak{R}_D$ . The group  $\mathbf{H}$  is embedded into  $\mathbf{G}$  as a subgroup of  $\mathbf{G}$  by above correspondence  $\mathbf{G} \ni \mathfrak{p}_\Phi \leftrightarrow \Phi \in \mathbf{H}$ .  $\mathbf{H}$  coincides with  $\mathbf{G}$  if and only if  $D$  is of Cousin type<sup>26)</sup>.*

Now, for the analytic variety  $V$  in a domain of regularity  $D$  with local dimension  $(n-1)$ , there corresponds one and only one pseudo-principal ideal having  $V$  as its zero-manifold<sup>27)</sup>. Therefore  $\mathbf{G}$  corresponds in one-to-one manner to the collection of all the analytic varieties with complex dimension  $(n-1)$ .

In case  $n=1$ , SCHILLING proved that two closed ideals are quasi-equal if and only if they coincide with each other<sup>28)</sup>. The corresponding fact for  $n \geq 2$  does not hold true, unless these two ideals are pseudo-principal. This is easily shown by an example of two ideals  $a = [1]$  and  $b = [x, y]$  for the whole finite space of two complex variables  $x$  and  $y$ . Indeed, the quasi-equality is but a very rough classification, since it does not distinguish the analytic varieties whose dimensions are less than  $(n-2)$ . More decisively, we have:

**Theorem 9.** *A prime ideal  $\mathfrak{P}$  in  $\mathfrak{O}_D$  is either quasi-equal to  $\mathfrak{O}_D$  or pseudo-principal, and  $\mathfrak{P}$  satisfies these two conditions simultaneously if and only if  $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}_D$ .*

**Proof.** From  $(\mathfrak{P}^{-1})^{-1} \cdot (\mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$ , we have the fact that a prime ideal  $\mathfrak{P}$  is either quasi-equal to  $\mathfrak{O}_D$  or  $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}^{-1})^{-1}$ <sup>29)</sup>. Then, this Theorem follows from the above statement 5°.

<sup>26)</sup> This last statement is nothing but another formulation of Theorem 4.

<sup>27)</sup> CARTAN, H. [5]: Theorem 7 ter. Another proof is given in K. OKA [8].

<sup>28)</sup> SCHILLING [11], Theorem 1 ff., p. 950.

<sup>29)</sup> VAN DER WAERDEN [13] II, § 105, 19°, p. 96.

## Bibliography.

- [1] BEHNKE, H., and K. STEIN: Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polflächen. Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. **47**, 177—192 (1937). — [2] BEHNKE, H., and P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. Berlin **3**, 3 (1934). — [3] BOCHNER, S., and W. T. MARTIN: Several complex variables. Princeton Math. Ser. **10** (1948). — [4] CARTAN, H.: Idéaux des fonctions analytiques de  $n$  variables complexes. Ann. École Norm. Sup. (3) **61**, 149—197 (1944). — [5] CARTAN, H.: Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes. Bull. Soc. Math. France **78**, 29—64 (1950). — [6] HITOTUMATU, S.: Cousin problems for ideals and the domain of regularity. I. Kodai Math. Sem. Reports **3**, No. 1/2, 26—32 (1951); II. Proc. Japan Acad. **28**, No. 1, 25—28 (1952). — [7] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, VII. — Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. France **78**, 1—27 (1950). — [8] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, VIII. — Lemme fondamental. J. of Math. Soc. of Japan **3**, 204—214; 259—278 (1951). — [9] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, II I. 2<sup>nd</sup> ed. (1929), Leipzig and Berlin. — [10] RÜCKERT, W.: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Ann. **107**, 259—281 (1933). — [11] SCHILLING, O. F. G.: Ideal theory of open Riemann surface. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 945—963 (1946). — [12] SIEGEL, C. L.: Analytic functions of several complex variables. Princeton Lecture (Mimeographed note, 1949), Princeton. — [13] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra. I. 2<sup>nd</sup> ed. (1937); II. 2<sup>nd</sup> ed. (1940), Berlin.

(Eingegangen am 12. Oktober 1951.)

## Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von

HANS RICHTER in Freiburg i. Br.

### Teil I. Vergleichende Betrachtung bestehender Theorien.

#### § 1. Einleitung.

Jeder Versuch eines Neuaufbaues der Wahrscheinlichkeitstheorie ist gleichzeitig eine Auseinandersetzung mit den bereits vorhandenen Begründungen dieser Disziplin. Wenn wir diese Auseinandersetzung im vorliegenden Teil I dem eigentlichen Neuaufbau vorausschicken, der erst in den weiteren Teilen durchgeführt werden soll, so möge hierin das Eingeständnis der starken Beeinflussung unserer Theorie von den bereits vorhandenen und der Ausdruck des Willens gesehen werden, die letzteren mit der unsrigen zu vereinigen. Wir gehen dabei davon aus, daß jede Wahrscheinlichkeitstheorie die Frucht langer gedanklicher Arbeit ist, und daß man daher hoffen kann, Allgemeingültiges zu finden, wenn man das Gemeinsame der verschiedenen Theorien sucht und sich nicht in der vorzugsweisen Aufdeckung von „Fehlern“ erschöpft. Wir möchten die Meinung vertreten, daß man durch eine gründliche kritische, aber nicht polemische Verfolgung der in den verschiedenen Theorien teils ausgesprochenen und teils als selbstverständlich unterstellten Gedanken zu allgemein anzuerkennenden Grundsätzen kommen kann, die bei jedem Neuaufbau zu berücksichtigen sind. Derselbe ist dann sicher in verschiedener Weise, insbesondere nicht nur in der von uns vorzulegenden Form möglich.

#### § 2. Gemeinsamkeiten der bestehenden Theorien.

Von M. G. KENDALL wurde bereits darauf hingewiesen<sup>1)</sup>, daß die beiden heutigen durch die Namen MISES und JEFFREYS zu bezeichnenden Hauptrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie durchaus nicht so unversöhnlich miteinander sind, wie dies zunächst den Anschein hat. KENDALL zeigte, daß jede dieser beiden Richtungen Gedanken der anderen übernehmen muß, sobald man das Gesamtgebiet der direkten und indirekten Wahrscheinlichkeitstheorie ins Auge faßt. Wir wollen uns nun jedoch zunächst auf das Gebiet der direkten Wahrscheinlichkeitstheorie beschränken, worunter wir die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes (W.-Begriffes) und der beiden Hauptsätze — Additions- und Multiplikationssatz — verstehen.

Hier läßt sich nun sofort bemerken, daß man in jeder W.-Theorie die formelmäßige Niederschrift dieser beiden Sätze so deuten kann, daß die W. zu einer additiven Mengenfunktion in einem Mengenkörper (bzw. zu aufeinander bezogenen additiven Mengenfunktionen in einer Menge von durch gewisse Relationen verbundenen Mengenkörpern) wird. Jede W.-Theorie enthält damit auch einen maßtheoretischen Teil, der aber eigentlich nur als Axiomatik der W.-Rechnung erscheint, die aus gegebenen W.en andere abzuleiten gestattet.

<sup>1)</sup> KENDALL, M. G.: On the reconciliation of theories of probability. *Biometrika* **36**, 101—116 (1949).

Hinzu müssen dann noch Axiome treten, die diese rein abstrakten Mengenkörper mit der Erfahrungswelt in Beziehung setzen und damit die W. zu einem Ordnungsbegriff machen, mit dessen Hilfe ein Teil der Erfahrungswelt erfaßt werden soll. Diese Axiome erfüllen erst die maßtheoretische W.-Rechnung einerseits mit dem Inhalt, auf den sie zugunsten der formalen Strenge verzichtet hatte, und begründen andererseits die Anwendung gerade dieses Zweiges der reinen Mathematik bei der W.-Setzung. Erst damit wird die W.-Rechnung zur Theorie der W. In der Tat pflegen durchaus die Vertreter der rein maßtheoretischen Fundierung nachträglich derartige Beziehungspostulate zur Erfahrungswelt hinzuzufügen<sup>2)</sup>. Damit haben wir

*These I. Jede W.-Theorie enthält eine rein maßtheoretische Axiomatik (W.-Rechnung). Sie enthält außerdem Axiome, die die W. zum Ordnungsbegriff für die Erfahrungswelt machen (Theorie des W.-Begriffs).*

Das maßtheoretische Substrat der verschiedenen Ansätze unterscheidet sich im wesentlichen nur durch die verschiedene Allgemeinheit der zugrunde gelegten Mengenkörper. Dagegen liegen wesentliche Unterschiede in den verschiedenen Theorien des W.-Begriffs und in den hieraus fließenden Begründungen für die Einführung der additiven Mengenfunktionen. Zunächst ins Auge fallen hier die beiden folgenden Punkte: a) Verschiedenheit des mit W.en belegten Teiles der Erfahrungswelt; b) subjektiver oder objektiver Charakter der W.

Die Unterschiede beim erstgenannten Punkte erscheinen als fast unüberbrückbar, wird doch die W. in den verschiedenen Ansätzen zugeordnet:

- α) den Ergebnissen des Ablaufes von Naturgeschehen,
- β) den Ergebnissen sowie den hieraus gebildeten Ereignissen von Experimenten,
- γ) den aus einer unbegrenzt gedachten Wiederholung des Experimentes entstehenden Kollektiven,
- δ) den Voraussagen über das Ergebnis von Experimenten bis zu Aussagen verwandt erscheinender Natur (wie „Cäsar war in Großbritannien“),
- ε) allen Aussagen überhaupt.

Sehen wir zunächst von dem in b) genannten Unterschiede ab, so ist gemeinsam, daß die W. einerseits nur für diejenigen Ergebnisse Erkenntniswert hat, die als *noch nicht* eingetreten gelten, und andererseits für diejenigen Aussagen, die nicht bereits verifiziert oder falsifiziert sind. Für die Auffassungen α) und β) folgt hieraus, daß nicht nur der Naturvorgang oder das Experiment charakterisiert sein muß, sondern auch die Menge der Ergebnismöglichkeiten zu geben ist, um überhaupt mit W.en belegt werden zu können. Die Ergebnismöglichkeiten hängen aber von der Methode ab, mit der man sie feststellen will, die also prinzipiell mitgegeben sein muß, wenn sie auch meist als bekannt unterstellt und daher verschwiegen wird. Damit werden die Auffassungen α) und β) im folgenden Sinne identisch: Man muß eine Vorschrift haben, die den betrachteten Naturvorgang oder das Experiment charakterisiert und die bereits die Menge der Ergebnismöglichkeiten vorschreibt, die mit W.en belegt werden sollen. Wir wollen eine solche Vorschrift eine *Versuchsvorschrift H* nennen; sie kann genereller Natur sein (Vorschriften über den Aufbau eines Experimentes und die zu erfolgenden Ablesungen), sie kann die Verwendung spezieller Dinge vorschreiben, sie kann aber auch nur darin bestehen, die

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. A. KOLMOGOROFF: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erg. Math. Berlin 1933, S. 4.

Registrierung des Ergebnisses eines ablaufenden Vorganges vorzunehmen (z. B. die Anzahl der Gewitter in einem vorgegebenen Zeitraum zu zählen). Von  $H$  wohl zu unterscheiden ist ihre Realisierung  $\hat{H}$  in Raum und Zeit<sup>3)</sup>.  $\hat{H}$  hat nur ein Ergebnis; eine W.-Belegung wird sinnlos, bzw. trivial. Die eigentliche W.-Belegung bezieht sich daher auf das Ereignisfeld von  $H$ . Mit der Unterscheidung zwischen  $H$  und  $\hat{H}$  verliert auch der Unterschied zwischen  $\beta$ ) und  $\gamma$ ) seine Schärfe: In  $\gamma$ ) wird angenommen, daß  $H$  unendlich viele  $\hat{H}$  besitzt, bzw. werden nur solche  $H$  betrachtet, für die wenigstens gedanklich die Existenz unendlich vieler  $\hat{H}$  und damit die des Kollektivs vorausgesetzt werden darf, mit dessen Hilfe dann der W.-Begriff eingeführt wird. Durchaus werden auch hier die W.en zu einer Belegung des Ereignisfeldes von  $H$ . Jedem Ereignis  $E|H$ , das zur Versuchsvorschrift  $H$  gehört, läßt sich andererseits eindeutig die Aussage zuordnen, daß bei einer Realisierung  $\hat{H}$  gerade  $E|H$  eintreten wird. Damit erhalten auch diese Aussagen eine W.-Belegung. Dieselbe ist ursprünglich für die Auffassungen  $\delta$ ) und  $\varepsilon$ ); für die Auffassungen  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) hat sie die Bedeutung einer W., daß die Aussage sich als richtig erweisen wird. Doch ist dies auch gerade der Sinn der W.-Belegung in  $\delta$ ) und  $\varepsilon$ )<sup>4)</sup>. Wir fassen zusammen zu

*These II. Jede W.-Theorie führt u. a. zu einer Belegung der durch die Versuchsvorschriften  $H$  vorgegebenen Ereignisse  $E|H$  und damit zu einer Belegung der Aussagen, daß bei einer Realisierung  $\hat{H}$  das  $E|H$  eintreten wird. Die W. ist deutbar als Grad der Richtigkeit dieser Aussage.*

Die Tatsache, daß in den verschiedenen Auffassungen außerdem noch andere Elemente außer unseren  $E|H$  der Erfahrungs- oder der Aussagenwelt mit W.en belegt werden, ist nach der Erkennung dieses gemeinsamen Anwendungsfeldes von untergeordneter Bedeutung; denn man kann nunmehr jede W.-Theorie so auffassen, als ob sie zunächst nur für die  $E|H$  errichtet wird. Es ist dann eine weitere Frage, ob man den Anwendungsbereich widerspruchsfrei erweitern kann, wobei Kontroversen über die „richtige Erweiterung“ prinzipiell unfruchtbar sind.

Die zweitgenannte Frage nach dem objektiven oder subjektiven Charakter der W. ist noch nicht eindeutig gestellt. Teilweise meint man nämlich bei dieser Unterscheidung lediglich den Unterschied in der Anwendung auf Ereignisse oder auf Aussagen, was wir bei Beschränkung auf die  $E|H$  als unwesentlich bemerkten. Wir fassen daher den gemeinten Unterschied folgendermaßen schärfer:

$\alpha$ ) *Subjektivistischer Standpunkt:* Objektiv (im Sinne von allgemeinverbindlich) an der W.-Belegung der  $E|H$  ist nur die Struktur dieser Belegung und die Vorschrift zur Änderung der Belegungswerte; dagegen sind die numerischen Werte selbst abhängig vom Wissensstande (andere insbes. psychologische Einflüsse gelten meist von vornherein als ausgeschaltet).

$\beta$ ) *Objektivistischer Standpunkt:* Unter den denkbaren Belegungssystemen mit der in der W.-Rechnung festgelegten Struktur gibt es ein „absolutes

<sup>3)</sup> Auf der Vermischung der  $H$  mit den  $\hat{H}$  beruhen viele unfruchtbare Kontroversen.

<sup>4)</sup> Vgl. z. B. JEFFREYS, H.: *Theory of probability*. Oxford 1948, S. 18; denn die Worte „ $q$  ist wahr“ für eine mit W. zu belegende Aussage  $q$  kann nur so verstanden werden, daß  $q$  sich als wahr erweisen wird, setzt also die Verifizierbarkeit oder Falsifizierbarkeit von  $q$  voraus.



System“, das von der realen Welt gefordert wird; d. h. der numerische Wert der  $W$ . für jedes  $E/H$  ist wie eine physikalische Größe objektiv festgelegt.

Die Formulierung unter  $\beta$ ) weist bereits darauf hin, daß auch der Objektivist die  $W$ .-Theorie zunächst subjektivistisch aufbauen kann, indem er die  $W$ . als ursprünglichen Ordnungsbegriff des Erkennens ansieht und nach der Struktur bei einer Mathematisierung des Begriffes fragt. Formal braucht also das Postulat von der Existenz eines ausgezeichneten Systems erst nachträglich zu erscheinen. Die anderen — etwa vom Wissensstand abhängigen Belegungssysteme der gleichen Struktur werden dann zu subjektiven Surrogaten (Systemen von „Schätzwerten“) des unbekannten und zu findenden „wahren“ Systems. Da nun jedes Naturgeschehen mit jeder  $W$ .-Belegung, die keine Unmöglichkeit enthält, verträglich ist, muß auch der Objektivist in der Praxis von diesen Surrogaten Gebrauch machen. Das Postulat von der Existenz des absoluten Systems liefert aber eine einfache Möglichkeit, in der indirekten  $W$ .-Theorie sinnvoll von der „Verbesserung“ einer Surrogatbelegung zu reden<sup>5)</sup>.

Die in  $\alpha$ ) ausgesprochene Auffassung, daß die numerischen Werte der  $W$ . allein vom Wissensstande abhängen, bedeutet gegenüber der obigen Auffassung nur die Verlegung der absoluten  $W$ .en für eine reale Welt auf solche für einen idealisierten Erkenntnisprozeß, der bei Vorgabe eines jeden Wissensstandes ein bestimmtes Belegungssystem unter den strukturell zugelassenen auswählt und damit die numerischen Werte der  $W$ .en festlegt. Nun kennt aber der Subjektivist gar nicht diese als existent behauptete Funktion über der Menge aller Wissensstände mit Wertebereich aus der Menge aller möglichen Belegungssysteme. Er muß also ebenso wie der Objektivist die voll subjektiven Surrogate benutzen. Von dem hypothetischen, idealisierten Erkenntnisprozeß wird nur die als allgemeinverbindlich angesehene Methode übernommen, bei einer Wissensvermehrung infolge Beobachtung realen Geschehens die Belegung zu verbessern. Diese Verbesserung kann aber, ohne den subjektivistischen Rahmen zu sprengen, schlechterdings nur als Konvergenz gegen ein  $W$ .-System verstanden werden, das einem gedachten unendlichen Wissensstand entspricht. Dies ist aber offenbar nur eine andere Formulierung des absoluten Systems der Objektivist, von dem es sich nur durch das Fehlen des formalen Prozesses der Projektion auf eine gesetzte reale Welt unterscheidet<sup>6)</sup>. Wir fassen zusammen zu

*These III. Bei Beschränkung des Anwendungsgebietes des  $W$ .-Begriffes auf die  $E/H$  enthält jede  $W$ .-Theorie einen subjektivistischen Teil, der nur die Struktur der zugelassenen  $W$ .-Belegungen festlegt. Jedes Belegungssystem mit dieser Struktur ist ein Schätzsystem eines unbekannten wahren Systems, dessen numerische Festlegung mittels laufender Verbesserung des Schätzsystems Aufgabe der indirekten  $W$ .-Theorie ist.*

<sup>5)</sup> Oft (insbesondere nach Ableitung des BAYESSchen Theorems) sprechen Objektivist, auch von einer „Verbesserung“ für  $W$ .en des absoluten Systems. Dies ist aber ein Widerspruch in sich.

<sup>6)</sup> So spricht H. JEFFREYS mehrfach (z. B. S. 147) bedenkenlos von dem „wahren Wert“ des eine vorgegebene Gesamtheit von möglichen hypothetischen  $W$ .-Verteilungen charakterisierenden Parameters. Im einfachsten Falle des Münzenwurfes, wo die Hypothesen durch verschiedene  $W$ .-Werte  $p$  für das Werfen von Kopf charakterisiert werden, bedeutet dies offenbar die Annahme eines realen Wertes für  $p$ . Damit in Übereinstimmung ist seine Auffassung, daß von den konkurrierenden Aussagen über den Wert von  $p$  eine die wahre sei; eine Auffassung, die S. 24/25 zur Verständlichmachung des Multiplikationsatzes herangezogen wird.



### § 3. Unterschiede der Wahrscheinlichkeitstheorien.

Wir wollen nunmehr auf einige Unterschiede der bestehenden Begründungen eingehen. Dabei bleiben wir aber durchaus auf dem Boden der im vorigen Paragraphen gefundenen gemeinsamen Plattform: Wir interessieren uns nur für die direkte W.-Theorie; wir begnügen uns nicht mit der maßtheoretischen Axiomatisierung, sondern verlangen auch eine Theorie des W.-Begriffes; wir engen den Anwendungsbereich auf die  $E|H$  ein und sehen den strukturfestlegenden Teil der Theorie als den zunächst wesentlichen an. Um uns nicht in Einzelheiten zu verlieren, wollen wir wieder einige charakteristische Züge herausgreifen, wobei wir uns ebenfalls an M. G. KENDALL anschließen können, der empfahl<sup>7)</sup>, das Augenmerk auf die beiden folgenden Punkte zu richten:

a) Wird der W.-Begriff aus anderen bekannten Begriffen explizit definiert, oder wird er, bzw. ein äquivalenter Begriff, axiomatisch eingeführt?

b) Welche Überlegungen führen zum Multiplikationssatz?

Demgegenüber erscheint die zu b) analoge Frage

c) Welche Überlegungen führen zum Additionssatz?

von untergeordneter Bedeutung zu sein, da der Additionssatz als unmittelbar evident erscheint. Es erhebt sich aber der Verdacht, daß diese Evidenz nur durch die Gewöhnung infolge laufender Anwendung der W.-Rechnung ohne den Versuch einer Klarlegung des W.-Begriffes entstanden ist, ebenso wie dem Nichtalgebraiker die Gleichung  $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$  evident geworden ist, während der Algebraiker sie aus einfacheren Prämissen zu deduzieren für notwendig hält. Soll nämlich die W. eine Zahl sein, die den Grad der Sicherheit des Eintretens eines  $E|H$  in  $\hat{H}$  charakterisiert (bzw. den Grad der Richtigkeit der entsprechenden Aussage), so scheint zunächst nur als einleuchtend, daß die W. für  $(E_1 + E_2)|H$  bei disjunktiven  $E_i|H$  größer ist als die der  $E_i|H$ . Soll die Theorie weiter zu einem Kalkül führen, so wird man noch fordern müssen, daß sich die W. von  $(E_1 + E_2)|H$  in eindeutiger Weise aus denen der  $E_i|H$  berechnet. Aber es ist zunächst gar nicht klar, daß diese Rechenvorschrift gerade die Addition ist oder auf die Addition transformiert werden kann<sup>8)</sup>. Wir kommen damit zu

*These IV. Die Einführung des Additionssatzes als Axiom ist ein logischer Sprung, der durch die Gewöhnung nahegelegt wird, aber möglichst vermieden werden sollte.*

*These V. Jede W.-Theorie enthält Axiome, die die Berechenbarkeit der W. (bzw. der korrespondierenden Größe) der Summe von zwei disjunktiven Ereignissen aus denen der Einzelereignisse fordert.*

Dabei kann eine solche Forderung wie bei G. A. BARNARD und H. JEFFREYS axiomatisch eingeführt werden; sie kann wie bei der LAPLACESchen oder der MISSESchen Definition eine unmittelbare mathematische Folge sein; sie kann aber auch sehr verdeckt erscheinen, wie bei L. VIETORIS<sup>9)</sup>, wo sie für Laplace-

<sup>7)</sup> I. c., S. 109 und ausdrücklicher in einer Diskussionsbemerkung zu einer Theorie von G. A. BARNARD: Statistical inference. J. of Stat. Soc. B, Bd. XI, 2, 145 (1949).

<sup>8)</sup> Die diesbezüglichen Ausführungen bei JEFFREYS, S. 30, gehen bereits von einer additiven W.-Belegung aus und betrachten nur die eindeutigen Transformierten. Es fehlt der umgekehrte Nachweis, daß bei Verwendung einer anderen Vorschrift als der Addition mit einer ebenso anderen Formulierung des Multiplikationssatzes eine W.-Theorie entsteht, die auf eine solche mit der Additionsregel transformiert werden kann.

<sup>9)</sup> VIETORIS, L.: Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit. Mh. Math. 52, H. 1, S. 85 bis 85 (1948).

Spiele wie bei der klassischen Definition unmittelbare mathematische Folge ist und daher im wesentlichen im Axiom der existierenden Anordnung aller Ereignisse aller Spiele und dem nicht ausgesprochenen Axiom der Existenz von Laplace-Spielen liegt.

Die Frage b) wird uns zu einer noch wesentlich tiefer liegenden Erkenntnis führen. Wir wollen hierbei von der rein maßtheoretischen Begründung als derjenigen ausgehen, bei der die Einführung des Multiplikationssatzes als besonders einfach erscheint. Andererseits legen die Verfechter der maßtheoretischen Begründung nur nebensächlichen Wert auf die Verknüpfung ihres mathematischen Modells mit der Erfahrungswelt, so daß hier die Auffindung eines notwendigen Verknüpfungselementes am leichtesten ist.

Wir erinnern zunächst an die hier übliche Definition der „bedingten W.“ in einem besonders einfachen Falle<sup>10)</sup>:

Wird das Ereignisfeld aufgebaut aus der vollständigen Ereignisdisjunktion  $(x_v, y_\mu)$ ,  $v$  und  $\mu$  gleich 1 oder 2, so wird definiert:

$$(3.1) \quad p(x_v) = \sum_{\mu} p(x_v, y_\mu) \text{ und } p(y_\mu) = \sum_v p(x_v, y_\mu)$$

sind bzw. die W.en von  $x_v$  und  $y_\mu$ .

$$(3.2) \quad p_{x_v}(y_\mu) = p(x_v, y_\mu)/p(x_v)$$

ist die „bedingte W.“ von  $y_\mu$  unter der Bedingung  $x_v$ .

Aus (3.2) folgt unmittelbar

$$(3.3) \quad p(x_v, y_\mu) = p(x_v) \cdot p_{x_v}(y_\mu) \text{ (Multiplikationssatz).}$$

Gestellt sei nun die folgende Aufgabe: Es seien zwei Urnen  $U_1$  und  $U_2$  vorgelegt mit weißen ( $w$ ) und schwarzen ( $s$ ) Kugeln. Bei Ziehung einer Kugel aus  $U_v$  möge die W.  $p_{U_v}(w)$  existieren, daß man eine  $w$  Kugel erhält. Die Wahl der Urne geschehe durch Münzenwurf mit den komplementären W.en  $p(U_1)$  und  $p(U_2)$ . Welches ist die W.  $p(U_1, w)$ , daß man eine  $w$  Kugel von  $U_1$  erhält? Unter Berufung auf (3.3) antwortet man

$$p(U_1, w) = p(U_1) \cdot p_{U_1}(w).$$

Nun ist diese Antwort zwar unter Bedingungen zahlenmäßig richtig, die im allgemeinen als erfüllt angesehen werden können. Aber der zu dieser Antwort führende Schluß ist fehlerhaft. Wir haben ihn allerdings mit durch die im Beispiel benutzte Bezeichnungsweise nahegelegt. Um den Fehler zu erkennen, ist es zweckmäßig, W.en genauer zu bezeichnen, indem man mit angibt, auf welches Ereignisfeld sie sich beziehen. Nennen wir im Beispiel den Gesamtversuch  $G$ , den Münzenwurf  $W$  und das Ziehen aus der  $v$ -ten Urne  $V_v$ , ferner die entsprechenden Ereignisfelder  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{V}_v$ , so sind in der Aufgabe die W.en  $p(U_v|\mathcal{W})$  und  $p(w|\mathcal{V}_v)$  vorgegeben und  $p(U_1, w|\mathcal{G})$  gesucht. Die Gleichungen (3.1–3) heißen in unserem Falle in exakter Schreibweise:

$$(3.1a) \quad p(U_v|\mathcal{G}) = p(U_v, w|\mathcal{G}) + p(U_v, s|\mathcal{G})$$

$$(3.2a) \quad p_{U_v}(w|\mathcal{G}) = p(U_v, w|\mathcal{G})/p(U_v|\mathcal{G}),$$

und daher

$$(3.3a) \quad p(U_1, w|\mathcal{G}) = p_{U_1}(w|\mathcal{G}) \cdot p(U_1|\mathcal{G}).$$

<sup>10)</sup> Vgl. A. KOLMOGOROFF, S. 6.

Die gegebene Antwort heißt dagegen:

$$(3.4) \quad p(U_1, w|\mathcal{G}) = p(w|\mathfrak{B}_1) \cdot p(U_1|\mathfrak{B}).$$

Man hat also in der obigen Antwort noch stillschweigend vorausgesetzt, daß gilt:

$$(3.5a) \quad p(U_1|\mathfrak{B}) = p(U_1|\mathcal{G})$$

und

$$(3.5b) \quad p(w|\mathfrak{B}_1) = p_{U_1}(w|\mathcal{G}).$$

Die Gleichung (3.5a) in Verbindung mit der Definitionsgleichung (3.1a) bedeutet, daß  $p(U_1|\mathfrak{B})$  nicht geändert wird, wenn man nach erfolgter Registrierung von  $W$  noch einen weiteren durch  $W$  beeinflussten Versuch durchführt und dessen Ergebnis nicht beachtet. Dies ist zwar eine neue axiomatisch zu fassende Eigenschaft der  $W$ -Belegungen, kann aber als unmittelbar einleuchtend akzeptiert werden. Unangenehmer ist dagegen (3.5b). Wenn man nämlich voraussetzt, daß (3.5b) richtig ist, so bedeutet dies nach (3.2a), daß man voraussetzt, daß gilt:

$$p(w|\mathfrak{B}_1) = p(U_1, w|\mathcal{G})/p(U_1|\mathcal{G})$$

oder, da man (3.5a) als richtig unterstellte:

$$p(w|\mathfrak{B}_1) = p(U_1, w|\mathcal{G})/p(U_1|\mathfrak{B}).$$

Man muß also bereits *voraussetzen*, daß die Antwort (3.4) richtig ist. Man müßte also (3.4) als Axiom einführen<sup>11)</sup>. Dies ist aber im Rahmen des maßtheoretischen Aufbaus für Beispiele wie das unsrige unmöglich: Eine solche Theorie spricht ja nur von Ereignisfeldern als abstrakten Mengenkörpern und ihrer  $W$ -Belegung. (3.4) ist eine Relation zwischen den  $W$ -Belegungen von Mengenkörpern mit bestimmtem abstraktem Zusammenhang; es ist nämlich der Mengenkörper  $\mathcal{G}$  isomorph zu einem leicht definierbaren Unterkörper des direkten Produktes der Mengenkörper  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}_1$ , und mehr ist im Rahmen der Maßtheorie auch nicht formulierbar. Die Einführung von (3.4) könnte also in diesem Rahmen nur so erfolgen, daß bei Bestehen dieses Isomorphismus die Relation (3.4) verlangt wird. Nun kann man aber leicht Beispiele von zu Versuchsvorschriften gehörigen Mengenkörpern  $\mathcal{G}'$ ,  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{B}'_1$  bilden, die demselben Isomorphismus wie in unserem Falle genügen, für deren  $W$ -Belegungen aber (3.4) verletzt ist. Hieraus folgt, daß die Begründung von (3.4) außerhalb des maßtheoretischen Ansatzes zu suchen ist. Sie ist Ausdruck einer Eigenschaft nicht der *Mengenkörper*, sondern der *Versuche*  $W$  und  $V$ , im Gesamtversuch  $G$ : Wir fordern nämlich die Relation (3.4) genau in den Fällen, wo  $W$  und  $V$ , in  $G$  eine Verbindung eingehen, die bei physikalischen Versuchen der Vorstellung der physikalischen Abgeschlossenheit der Einzelversuche entspricht. Wir wollen daher diese Eigenschaft ebenfalls *physikalische Abgeschlossenheit*<sup>12)</sup> nennen auch dann, wenn die Versuche keine physikalischen sind, und stellen dazu fest: Die physikalische Abgeschlossenheit ist ein zunächst undefinierter, irreduzibler Begriff, der der jeder experimentellen Wissenschaft immanenten, jedoch stark *vorwissenschaftliche* Züge zeigenden Vorstellung entspricht, einen Versuch als von seiner Umwelt isoliert betrachten

<sup>11)</sup> (3.5a, b) lassen sich dann daraus ableiten.

<sup>12)</sup> Abgeschlossenheit ohne Adjektiv ist bereits in der Mathematik als Terminus verbraucht; die naheliegende Bezeichnung als reale Abgeschlossenheit ruft unnötige realistische Assoziationen hervor.

zu können, was beispielsweise in der Relativitätstheorie durch die Konstruktion der Zukunftskegel näher präzisiert und gestützt wird. Diese Vorstellung (bzw. eine dazu äquivalente) muß in einer Theorie der W. mit axiomatisiert werden, wobei diese Axiomatisierung notwendig implizit sein muß; d. h. von unserer vagen Vorstellung über das Wesen der physikalischen Abgeschlossenheit ausgehend werden gewisse Relationen gefordert, die ihr entsprechen und die sich nicht zu einer expliziten Definition auflösen lassen. Ohne Einführung der physikalischen Abgeschlossenheit wird (3.4) falsch (man könnte dann nicht einmal mehr die NEWTONSche Formel für die Binomialverteilung ableiten). Wir erhalten somit die besonders wichtige

*These VI. Der W.-Begriff läßt sich nur axiomatisieren, wenn simultan der Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit axiomatisiert wird.*

In diesem Satze haben wir nun ein außerordentlich scharfes Kriterium im Sinne von M. G. KENDALL vor uns: Eine W.-Theorie, in der der Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit oder ein äquivalenter fehlt, kann weder eine ausreichende Begründung des Multiplikationssatzes liefern, noch den axiomatisch eingeführten Multiplikationssatz anwenden, ohne irgendwo eine Erklärung schuldig zu bleiben. So wird z. B. bei H. JEFFREYS der Multiplikationssatz durch eine Analogiebetrachtung eingeführt. Die obige Münzen-Urnen-Aufgabe ist damit aber ebensowenig lösbar wie im maßtheoretischen Fall. Unsere Gleichung (3.4) würde nämlich in der Schreibweise der JEFFREYSSchen Theorie lauten

$$P(qr|p) = P(q|p) \cdot P(r|qp).$$

Dabei bedeuten  $p$  unser Wissen von der Durchführung des Gesamtversuches  $G$ ,  $q$  das Erscheinen der Urne I und  $r$  das Erscheinen der Farbe weiß;  $qp$  ist das Wissen über  $G$  zusätzlich dem Wissen, daß Urne I erscheint. Völlig offen dabei bleibt aber, warum  $P(q|p)$  numerisch gleich sein soll zur W. für das Erscheinen von Urne I beim Wissen vom Münzenwurf allein, und erst recht offen ist die Gleichsetzung von  $P(r|qp)$  mit der W., daß weiß erscheint bei alleiniger Kenntnis über das Ziehen aus Urne I. Diese Gleichsetzungen können nur akzeptiert werden unter der stillschweigenden Voraussetzung der Erfüllung dessen, was wir physikalische Abgeschlossenheit nannten, und erfahren nur durch diese ihre Begründung.

Interessant erscheint es, in diesem Zusammenhang die bereits zitierte Theorie von L. VIETORIS zu betrachten, die ohne einen solchen Begriff wie den der physikalischen Abgeschlossenheit auszukommen scheint. Im Gegenteil wird der Begriff der Verbindung  $A \sqsubset B$  zweier Spiele  $A$  und  $B$  aus dem Bestehen von Homomorphismen der zugehörigen Mengenkörper erklärt. Da nun aber aus diesen Homomorphismen gar nichts über die W.-Belegung für  $A \sqsubset B$  sich ergeben darf, kann die für die Theorie wesentliche Gleichung (0,13)  $a_A = (a \sqsubset B)_{A \sqsubset B}$  in Anbetracht von Axiom III gar nicht eine Folge des Verbindungsbegriffes sein; dies ist um so unmöglicher, als die Erklärung des Zeichens „ $\equiv$ “ in (0,12) voraussetzt, daß zwei in der Beziehung „ $\equiv$ “ stehende Ereignisse einem gemeinsamen Spiel angehören. In der Tat wird bei der Ableitung von (0,13) stillschweigend das Spiel  $A$  mit einem aus  $A \sqsubset B$  durch Unterkörperbildung von Mengenkörpern definierbaren abgeleiteten Spiel identifiziert. Die Zulässigkeit dieser Identifizierung ist ein neues Axiom<sup>13)</sup> über die Struktur der in der Theorie zugelassenen Spielverbindungen; d. h. es gilt

<sup>13)</sup> Wegen (0,12) darf aber dieses Axiom nicht in der Gestalt (0,13) geschrieben werden, sondern benötigt die Einführung eines weiteren Äquivalenzzeichens.

nicht für alle Verbindungen, sondern nur für bestimmte, insbesondere für diejenigen, die für die Ausgangsspiele  $A$  und  $B$  die physikalische Abgeschlossenheit wahren. Desgleichen treffen die Axiome IV und V nochmals eine Auswahl unter den bis dahin zugelassenen Spielverbindungen in Richtung auf den Typ der Verbindung mit Wahrung der physikalischen Abgeschlossenheit, für die sie also eine weitere implizite Definition darstellen.

Dagegen darf bemerkt werden, daß unser Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit in der Mises'schen Theorie sehr wohl als „unabhängige Verbindbarkeit“ nicht nur enthalten<sup>14)</sup> ist, sondern ausdrücklich ein wesentliches Element der Theorie darstellt.

Es erscheint als nützlich, in diesem Zusammenhang auf den Unterschied einiger Begriffe hinzuweisen, die gern verwechselt und mit dem gemeinsamen Namen der Unabhängigkeit belegt werden. Hat man eine bestimmte Versuchsvorschrift  $H$  und den zugehörigen Mengenkörper  $\mathfrak{H}$  mit  $W$ -Belegung, so kann man innerhalb von  $\mathfrak{H}$  bedingte  $W$ -en und hieraus die Unabhängigkeit von zwei Ereignissen  $E_1$  und  $E_2$  aus einem  $\mathfrak{H}$  rein formal definieren. Man kann dann zu jedem  $E$ , die durch  $E$ , und sein Komplement definierte Unterkörperbildung in  $\mathfrak{H}$  durchführen und die so entstehenden  $\mathfrak{H}$ , als Mengenkörper zu Versuchsvorschriften  $H$ , auffassen, die aus  $H$  durch einen Vergrößerungsprozeß<sup>15)</sup> hervorgehen. Diese  $H$ , sind dann aber nicht als physikalisch abgeschlossen gegeneinander anzusehen, selbst dann, wenn die  $E$ , im definierten Sinne in  $\mathfrak{H}$  unabhängig waren. Man muß also wohl unterscheiden zwischen der Unabhängigkeit von Ereignissen aus einem  $\mathfrak{H}$  und der Vorstellung der Unabhängigkeit von Versuchen, die wir eben physikalische Abgeschlossenheit nannten, um die Möglichkeit einer solchen Konfusion zu vermeiden. Sie ist jedoch durchaus identisch mit dem, was G. A. BARNARD<sup>16)</sup> die „absolute Unabhängigkeit“ nennt. Sobald unsere Vorstellung im Rahmen der Axiomatik durch mathematische Formeln umschrieben wird, ist sie durch einen wissenschaftlichen Begriff ersetzt, der durch das Bestehen gewisser Relationen implizit definiert ist. Eine Relation der genannten Art ist unsere Gleichung (3.4). Dabei erscheint als das Wesentliche an dieser Gleichung vor allem die folgende Aussage über das Wesen der physikalischen Abgeschlossenheit:

*These VII. Werden zwei Versuchsvorschriften unter Wahrung der individuellen physikalischen Abgeschlossenheit zu einer neuen vereinigt, bei der die Summen der Ereignispaare als Ereignisse gelten, so ist die  $W$ . eines Ereignispaars in der neuen Vorschrift eindeutig berechenbar aus den  $W$ -en seiner Komponenten in den Ausgangsvorschriften.*

Dieser einen Zusammenhang zwischen den Begriffen der  $W$ . und der physikalischen Abgeschlossenheit stiftende Satz scheint bereits unserer vorwissenschaftlichen Vorstellung von diesen Begriffen zu entsprechen und wäre insoweit elementar genug, um als Axiom formuliert zu werden. Er kann jedoch durchaus durch andere Aussagen ersetzt werden, die ebenso elementar erscheinen, so daß die Axiomenauswahl zum Teil willkürlich ist. Insbesondere

<sup>14)</sup> v. MISES, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Neudruck New York 1945, S. 94.

<sup>15)</sup> Näheres siehe Teil II.

<sup>16)</sup> Siehe S. 119. Leider spricht BARNARD nicht aus, daß nicht zwei beliebige Experimente unter Wahrung der „absoluten Unabhängigkeit“ zu einem Doppexperiment verbunden werden können, sondern daß dies eine Eigenschaft ist, von der wir nur eine in der Axiomatik zu präzisierende Vorstellung haben, und deren Bestehen im konkreten Falle stets eine zusätzliche Hypothese ist.

kann man die in unserem Satze enthaltene Gleichheitsforderung ersetzen durch die Forderung der Erfüllung eines unendlichen Systems von Ungleichheiten und von zusätzlichen Gleichheiten nur für besonders einfache Fälle. Das letztere Verfahren wird in denjenigen Theorien angewendet, die auf den rein logisch gemeinten „Eher-Begriff“ zurückgehen (z. B. G. A. BARNARD und L. VIETORIS); es hat jedoch den Nachteil, entweder die Existenz einer dichten W.-Skala (die Laplace-Spiele bei L. VIETORIS<sup>17)</sup> oder die unendliche Wiederholbarkeit eines jeden Versuches (Folge von Axiom 7 bei G. A. BARNARD<sup>18)</sup> voraussetzen zu müssen.

So interessant es wäre, die Beziehungen der bestehenden Theorien zum Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit noch weiter zu verfolgen, so läge dies doch nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit, die den Wert auf die Feststellung der grundsätzlichen Gemeinsamkeiten der bestehenden Ansätze und nicht auf ihre Kritik legt. Wir wenden uns daher nunmehr zur Frage a). Ohne die in der Literatur in genügender Ausführlichkeit vorhandenen Begründungen zu wiederholen, können wir hier feststellen, daß die modernen W.-Theoretiker ziemlich einhellig die Meinung vertreten, daß die W. selbst oder ein äquivalenter Begriff als grundlegend neu anzusehen ist, daß man ihn also nicht explizit, sondern nur implizit definieren kann. In der Tat *hat ein Geschehen nach W. in einer rein deterministischen Welt keinen Platz*; es ist daher prinzipiell unmöglich, den W.-Begriff allein aus Begriffen abzuleiten, die auch in einer streng deterministischen Welt Gültigkeit hätten<sup>19)</sup>. Sobald man dies akzeptiert, fällt aber auch der naheliegende Verdacht zusammen, daß bereits die Einführung des Begriffs der physikalischen Abgeschlossenheit als neuen Begriffes genügen würde<sup>20)</sup>; denn der Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit ist bereits in der klassischen Physik enthalten und in einer streng deterministischen Relativitätstheorie überdies in Spezialfällen definierbar. Unsere These VI haben wir also präziser so zu verstehen, daß in einer W.-Axiomatik die beiden Begriffe der W. und der physikalischen Abgeschlossenheit simultan *implizit* zu definieren sind.

Die Axiome derjenigen W.-Theorien, die eine explizite Definition der W. geben wollen, brauchen deshalb nicht unbedingt als falsch angesehen zu werden, sondern man muß sie als implizite Definitionen umdeuten. So ist die klassische LAPLACESCHE W.-Definition deutbar als eine spezielle Strukturaussage der W.-Belegung und als solche richtig. Allerdings ist sie im Sinne von L. VIETORIS<sup>21)</sup> bereits ein „zu schweres Rätsel“. Will man die LAPLACESCHE Definition etwa als eine explizite auffassen, ohne einen partiellen Zirkel zu begehen, so muß man die Gleichmöglichkeit z. B. durch physikalische

<sup>17)</sup> Für die Verbindungen von Laplace-Spielen fordert VIETORIS folgerichtig axiomatisch diejenigen Gleichheiten, die in der klassischen W.-Theorie als selbstverständlich angesehen und nicht ausgesprochen werden.

<sup>18)</sup> Die unvermeidbaren Gleichheiten werden bei BARNARD verdeckt durch die Definition der Addition von Äquivalenzklassen eingeführt.

<sup>19)</sup> Strenge Deterministen müssen daher wie H. POINCARÉ folgerichtig die W. als Ausdruck unseres Nichtwissens ansehen. Die darin liegende Emanzipation des erkennenden Geistes und des für diesen gültigen W.-Begriffes von der deterministischen Welt bedeutet aber bereits die behauptete Begriffsneusetzung und führt zwangsläufig zu einer subjektivistischen W.-Theorie.

<sup>20)</sup> Diese Meinung könnte man aus der in Fußnote 7) zitierten Diskussionsbemerkung von M. G. KENDALL entnehmen.

<sup>21)</sup> Siehe S. 55.



Gleichheit ersetzen. Dieselbe darf aber keine Ununterscheidbarkeit sein<sup>22)</sup>, sondern ist als Quasi-Gleichheit im Rahmen vorgegebener und verifizierbarer Toleranzen aufzufassen. Jede Verifikation setzt aber selbst die Durchführung einer Versuchsvorschrift voraus, so daß man prinzipiell die Quasi-Gleichheit nur nach W. behaupten und daher auch nur eine solche einführen darf. Damit führt notwendig auch dieser Ausweg auf eine implizite Definition der W., und zwar zu einem „sehr schweren Rätsel“. Entsprechendes gilt für die Häufigkeitsdefinition, bei der die Präzisierung eines Limesbegriffes außerhalb des rein-mathematischen (der aber mit der unbeschränkten Regellosigkeitsforderung unverträglich ist), sowie die Präzisierung des Begriffs der unveränderten Wiederholbarkeit notwendig zu einer außerordentlich komplizierten impliziten Definition der W. führen, was näher auszuführen wir uns im Rahmen dieser Arbeit versagen dürfen.

#### § 4. Grundsätze eines Neuaufbaues.

Aus dem Vergleich der bestehenden Theorien haben wir gewisse Grundsätze gefunden, die wir bei einem Neuaufbau der W.-Theorie zu berücksichtigen haben. Unsere Theorie wird die Aufgabe haben, zwei vorwissenschaftliche Ordnungsbegriffe simultan durch Mathematisierung zu wissenschaftlichen Begriffen zu erheben. Der eine dieser Begriffe ist die physikalische Abgeschlossenheit, die als elementare bereits in der deterministischen Wissenschaft vorhandene Vorstellung betrachtet werden darf. Der andere Begriff soll zur W. als einer Belegung des endlichen Ereignisfeldes  $\mathfrak{E}$  einer Versuchsvorschrift  $H$  mit reellen Zahlen führen; ihr entspricht vorwissenschaftlich das graduell gestufte „Erwartungsgefühl“, das wir bezüglich des Eintretens eines Ereignisses bei einer in der Zukunft liegenden oder bekannt werdenden Realisierung  $\hat{H}$  der Versuchsvorschrift haben<sup>23)</sup>. Die zur Mathematisierung führende Axiomatik betrifft zunächst nur die Struktur der W.-Belegung und ist insoweit subjektivistisch. In ihr ist insbesondere zu setzen, daß

a) der Struktur jedes einzelnen Ereignisfeldes durch die Forderung der Existenz einer Rechenregel genügt wird, die die Belegung der Summe disjunkter Ereignisse innerhalb eines  $\mathfrak{E}$  aus denen der Einzelereignisse zu berechnen gestattet (vorläufiger „Additionssatz“);

b) eine entsprechende Rechenregel bezüglich der Verbindung zweier  $H$  unter Wahrung der physikalischen Abgeschlossenheit existiert (vorläufiger „Multiplikationssatz“).

Hieraus ergibt sich dann die weitere Frage nach der Äquivalenz einer solchen W.-Belegung mit einer Belegung der gewöhnlichen Art, wo Additions- und Multiplikationssatz im eigentlichen Sinne gelten für eine Menge von als W.en auftretenden Zahlen, die dicht im Intervall von Null bis Eins liegen. Weiter tritt auf die Frage nach einem absoluten Belegungssystem und die Frage nach der Ausdehnung des Anwendungsfeldes, insbesondere auf bedingte W.en und auf Rückschluß-W.en der indirekten W.-Theorie. Dieses Programm soll in den weiteren Teilen dieser Arbeit verfolgt werden.

<sup>22)</sup> Ein derartiges Vorgehen führt in der Tat in der Quantenmechanik zu Schwierigkeiten.

<sup>23)</sup> Die Mathematisierung des Erwartungsgefühls zum W.-Begriff unter Abstreifung individueller Einflüsse ist damit in gewissem Sinne analog der Mathematisierung des Wärmegefühls zum Temperaturbegriff.

## Zum Metrisierbarkeitsbegriff von K. WAGNER.

Von

F. A. BEHREND in Melbourne.

K. WAGNER<sup>1)</sup> führte den folgenden Metrisierbarkeitsbegriff ein:  $M = \{0, a, b, c, \dots\}$  sei eine geordnete Menge mit erstem Element 0, genüge also den Gesetzen

$$(1) \quad a \geq 0,$$

(2) für je zwei  $a, b$  gilt genau eine der Relationen

$$a < b, a = b, a > b,$$

(3) aus  $a < b, b < c$  folgt  $a < c$ .

$M$  heißt *in sich metrisierbar*, wenn es eine eindeutige Funktion  $c = \alpha(a, b)$  gibt, welche für jedes feste  $a$  die  $b \geq a$  ähnlich auf die  $c \geq 0$  abbildet, also

(4)  $\alpha(a, b)$  eindeutig, definiert für  $b \geq a$ ,

(5)  $\alpha(a, a) = 0$ ,

(6) aus  $\alpha(a, b) < \alpha(a, b')$  folgt  $b < b'$ ,

(7) für beliebige  $a, b$  hat die Gleichung  $a = \alpha(b, x)$  eine Lösung.

$M$  mit  $\alpha(a, b)$  heißt eine *Metrik*. Eine Menge  $X$  heißt durch  $M$  metrisiert, wenn jeder Strecke  $x_1 x_2$  von  $X$  ein Abstand  $\varrho(x_1, x_2) = \alpha(a, b)$  zugeordnet ist. Für die Gültigkeit der Dreiecksungleichung leitet K. WAGNER zwei Bedingungen her:

(8) Additivität der Metrik: aus  $\alpha(a, b) = \alpha(a', b')$ ,

$$\alpha(b, c) = \alpha(b', c') \text{ folgt } \alpha(a, c) = \alpha(a', c'),$$

(9) Kommutativität der Metrik: aus  $\alpha(a, b) = \alpha(b', c')$ ,

$$\alpha(b, c) = \alpha(a, b') \text{ folgt } c = c'.$$

Eine Metrik mit (8) und (9) heißt einfach.

Im folgenden wird kurz gezeigt, daß der obige Metrisierbarkeitsbegriff besser auf eine in naheliegender Weise in  $M$  definierte Addition zu gründen ist; in dieser Form werden die Untersuchungen von K. WAGNER wesentlich vereinfacht und seine Resultate zum Teil verschärft, zum Teil auf bekannte Ergebnisse zurückgeführt. Z. B. ergibt sich leicht, daß (8) eine Folge von (9) ist. Der Satz, daß jede einfache archimedische Metrik eine Teilmetrik der reellen Zahlen ist, erweist sich als gleichwertig mit dem bekannten Satz, daß eine archimedisch geordnete ABELSche Gruppe eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist<sup>2)</sup>. Es wird sich aber zeigen, daß im

<sup>1)</sup> Charakterisierung wohlgeordneter Mengen und der Zahlengeraden mit Hilfe eines allgemeinen Metrisierbarkeitsbegriffes. Math. Ann. 120, 502—513 (1949).

<sup>2)</sup> HÖLDER: Ber. sächs. Akad. Wiss., Leipzig. Math.-phys. Kl. 53, 13—14 (1901); R. BAER: J. reine u. angew. Math. 160, 212—218 (1929); H. CARTAN: Bull. Sci. Math. (2), 63, 201—205 (1939).



archimedischen Fall die Kommutativität (9) nicht vorausgesetzt werden muß, da sie aus der Additivität (8) folgt. Dieses Resultat ist auch unabhängig von der obigen Fragestellung interessant; es stellt eine Verallgemeinerung des Satzes dar, daß eine archimedisch geordnete Gruppe kommutativ ist<sup>3)</sup>: die rechtsseitige Subtraktion und das rechtsseitige Monotonitätsgesetz brauchen nicht vorausgesetzt zu werden (Sätze 1 und 2).

1. Ist  $\lambda(c)$  eine ähnliche Abbildung von  $M$  auf sich selbst, so ist mit  $\alpha(ab)$  auch  $\beta(ab) = \lambda(\alpha(ab))$  eine Metrik, die in jeder Hinsicht mit  $\alpha(ab)$  gleichwertig ist: jede der Eigenschaften (4)–(9) gilt dann und nur dann für  $\alpha(ab)$ , wenn sie für  $\beta(ab)$  gilt. Definiert man  $d = \lambda(c)$  als die durch  $\alpha(0d) = c$  vermittelte Abbildung der  $c \geq 0$  auf die  $d \geq 0$ , so hat  $\beta(ab) = \lambda(\alpha(ab))$  noch die Eigenschaft

$$(5^*) \quad \beta(0a) = a.$$

2.  $\beta(ab)$  genüge den Bedingungen (4), (5), (5\*), (6), (7). Die wegen (6) eindeutige Lösung von (7)  $a = \beta(bx)$  heiße  $a + b$ .

(4')  $a + b$  ist eindeutig, definiert für alle  $a, b$ .

Aus (5), (5\*), (6) folgt

$$(5') \quad 0 + a = a,$$

$$(5^{*'}) \quad a + 0 = a,$$

$$(6') \quad \text{aus } a < a' \text{ folgt } a + b < a' + b.$$

Aus (4) folgt

(7') die Gleichung  $x + a = b$  hat eine Lösung für  $b \geq a$ , nämlich  $x = \beta(ab)$ .

Ist umgekehrt in  $M$  eine (4'), (5'), (5\*), (6'), (7') genügende Addition erklärt, so liefert die wegen (6') eindeutige Lösung  $b - a$  von (7') eine Metrik  $\beta(ab)$  im obigen Sinne.

3. Die Additivität von  $\beta(ab)$  ist gleichbedeutend mit der Assoziativität der zugehörigen Addition; d. h. (8) ist gleichwertig mit

$$(8') \quad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Ist nämlich  $\beta(ab)$  additiv, so gilt für beliebige  $a, b, c$ :

$$\beta(c, b + c) = b = \beta(0, b),$$

$$\beta(b + c, a + (b + c)) = a = \beta(b, a + b),$$

also nach (8)

$$\beta(c, a + (b + c)) = \beta(0, a + b),$$

$$(a + (b + c)) - c = a + b,$$

d. h. (8'). Umgekehrt folgt aus (8'):  $c - a = (c - b) + (b - a)$ , unter den Bedingungen von (8) also  $c - a = c' - a'$ , d. h. die Additivität von  $\beta(ab) = b - a$ .

4a. Die Kommutativität (9) von  $\beta(ab)$  ist gleichwertig mit

$$(9') \quad a + (b + c) = b + (a + c).$$

Ist nämlich (9) erfüllt, so gilt für beliebige  $a, b, c$

$$\beta(c, b + c) = b = \beta(a + c, b + (a + c)),$$

$$\beta(b + c, a + (b + c)) = a = \beta(c, a + c),$$

s. HÖLDER, a. a. O. <sup>2)</sup>.

also (9'). Gilt umgekehrt (9'), so lauten die Voraussetzungen von (9)

$$b - a = c' - b', \quad c - b = b' - a,$$

also folgt

$$\begin{aligned} c &= (b' - a) + b = (b' - a) + ((b - a) + a) \\ &= (b - a) + ((b' - a) + a) = (b - a) + b' = c'. \end{aligned}$$

4b. Aus der Kommutativität (9) von  $\beta(ab)$  folgen das kommutative und das assoziative Gesetz der Addition (also die Additivität von  $\beta(ab)$ ). Denn setzt man in (9')  $c = 0$ , so wird wegen (5\*)

$$(10') \quad a + b = b + a$$

und daher

$$a + (b + c) = a + (c + b) = c + (a + b) = (a + b) + c.$$

Umgekehrt folgt (9'), d. h. (9) aus (8') und (10').

Die einfachen Metriken sind also bereits durch (9) ohne (8) charakterisiert; sie bestehen aus den nicht-negativen Elementen einer geordneten ABELSchen Gruppe. Die von K. WAGNER gegebene Darstellung als direktes Produkt von Metriken ist eine Folge bekannter Resultate<sup>3)</sup>.

#### 5. Wohlgeordnete Metriken.

Der Fall eines wohlgeordneten  $M$  läßt sich jetzt genauer charakterisieren als bei K. WAGNER<sup>4)</sup>.  $M$  kann als die Menge der Ordnungszahlen kleiner als  $\mu$  angenommen werden; die Existenz einer Metrisierungsfunktion  $\alpha(ab)$  für  $M$  besagt dann die Existenz einer Addition, welche (4')—(7') erfüllt. Da es höchstens eine ähnliche Abbildung jedes oberen Abschnittes von  $M$  auf  $M$  selbst gibt, gibt es höchstens eine solche Addition, die dann mit der üblichen Addition der Ordnungszahlen übereinstimmen muß (wobei die Anordnung der Summanden in der hier benutzten Schreibweise umzukehren ist). Die metrisierbaren  $M$  sind also dadurch charakterisiert, daß sie bezüglich der Addition der Ordnungszahlen abgeschlossen sind. Dies trifft genau für die  $\mu$  von der Form  $\omega^r$  zu, wo  $r$  eine beliebige Ordnungszahl ist. Denn ist  $r$  die kleinste Ordnungszahl, für die  $\omega^r$  alle Elemente von  $M$  übertrifft, und ist  $\gamma < \omega^r$ , so ist

$$\gamma = \omega^{r_1} n_1 + \omega^{r_2} n_2 + \dots + \omega^{r_k} n_k, \quad r > r_1 > r_2 > \dots > r_k$$

( $n_1, n_2, \dots, n_k$  natürliche Zahlen), und da  $\omega^{r_1}, \omega^{r_2}, \dots, \omega^{r_k}$  zu  $M$  gehören, gehört wegen der Abgeschlossenheit der Addition auch  $\gamma$  zu  $M$ . Umgekehrt ist die Menge aller  $\gamma < \omega^r$  für jedes  $r$  bezüglich der Addition abgeschlossen, da mit  $\gamma$  und  $\gamma'$  auch  $\gamma + \gamma'$  kleiner als  $\omega^r$  ist. Die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0) liefert offenbar die einzige einfache Metrik dieser Art.

#### 6. Der archimedische Fall.

Man definiere für jedes natürliche  $n$   $na$  durch:  $0 \cdot a = 0$ ,  $(1 + n)a = a + na$ . Die Ordnung von  $M$  ist *archimedisch*, wenn

$$(11) \quad \text{aus } na \leq b \text{ für jedes } n \text{ folgt } a = 0.$$

Wir zeigen nun, daß jede additive archimedische Metrik einfach ist. Zum Beweis unterscheide man zwei Fälle.

<sup>3)</sup> BIRKHOFF, G.: Lattice-ordered groups. Ann. of Math. 43, 298—331 (1942).

<sup>4)</sup> a. a. O., § 1.

6a.  $M$  besitzt kein kleinstes positives Element:

(12a) Zu jedem  $a > 0$  gibt es ein  $b$  mit  $0 < b < a$ .

Satz 1. Genügt  $M$  den Gesetzen (1), (2), (3), (4'), (5'), (6'), (7'), (8'), (11), (12a), so ist  $M$  kommutativ und besteht daher aus den nicht-negativen Elementen einer archimedisch (und dicht) geordneten ABELschen Gruppe.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten; die benutzten Gesetze werden jeweils rechts angegeben.

(I) Aus  $a < b$ ,  $x + a = b$  folgt  $x > 0$ .

Beweis:  $0 + a = a < b = x + a$ , also  $0 \neq x$ . (5'), (1).

(II) Aus  $p > 0$  folgt  $a < a + p$ .

Beweis: Aus  $a \geq a + p$  folgt

$a \geq a + p \geq (a + p) + p \geq ((a + p) + p) + p \geq \dots \geq a + np$  (6'), (3), (8')  
 $\geq 0 + np = np$  für alle  $n$ , also  $p = 0$ . (1), (6'), (5'), (11)

Also gilt (II) wegen (2).

(III) Aus  $b < b'$  folgt  $a + b < a + b'$  (rechtsseitige Monotonität).

Beweis:  $x + b = b'$ ,  $x > 0$ , (7'), (I)

$a + b' = a + (x + b) = (a + x) + b > a + b$ . (8'), (II), (6')

(IV) Aus  $q + a \leq b \leq a + p$  für alle  $p > 0$

folgt  $q + b \leq a + p$  für alle  $p > 0$ .

Beweis: Für jedes  $p > 0$  gibt es  $p_1$  mit

$0 < p_1 < p$ ; (12a)

$p_2 + p_1 = p$ ,  $p_2 > 0$ ; (7'), (I)

$q + b \leq q + (a + p_1) = (q + a) + p_1$  (III), (8')

$\leq b + p_1 \leq (a + p_2) + p_1$  (6')

$= a + (p_2 + p_1) = a + p$ . (8')

(V) Aus  $q + a \leq b \leq a + p$  für alle  $p > 0$  folgt  $q = 0$ .

Beweis: Wendet man (IV)  $n$  mal an, indem man  $b$  nacheinander durch  $q + b$ ,  $2q + b$ , ...,  $(n-1)q + b$  ersetzt, so erhält man

$nq + b \leq a + p$  für alle  $p > 0$  und alle  $n$ .

Wenn  $b > 0$ , so ist  $nq < nq + b \leq a + p$  für alle  $n$  wegen (II), also  $q = 0$  wegen (11); für  $b = 0$  ist  $q + a = 0$ , also  $q = 0$ .

(VI) Wenn  $a < b$ , so gibt es  $p > 0$  mit  $a + p < b$ . (Dies Gesetz dient als Ersatz für die rechtsseitige Subtraktion.)

Beweis: Wäre  $b \leq a + p$  für alle  $p > 0$ , so wäre

$q + a = b \leq a + p$  für alle  $p > 0$ , (7')

also  $q = 0$ , (V)

d. h.  $a = b$ . (5')

Definition<sup>5)</sup>: Ist  $f(x)$  eine für  $x > 0$  definierte Funktion mit Werten in  $M$ , so sei

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

wenn es zu jedem  $q > a$  ein  $p(q)$  gibt, so daß

$a < f(x) < q$  für  $0 < x < p(q)$ .

Es ist klar, daß  $f(x)$  höchstens einen Limes haben kann.

(VII) Aus  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = b$  folgt  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = a + b$ .

Beweis: Sei  $q > a + b$ ; dann gibt es

$p > 0$  mit  $(a + b) + p < q$ ; (VI)

<sup>5)</sup> Der Beweis folgt hier dem Vorbild von H. CARTAN, a. a. O.<sup>2)</sup>.

$$b < b + p; \quad (\text{II})$$

$$r_1 + b = b + p, \quad r_1 > 0; \quad (7'), (\text{I})$$

$$q > (a + b) + p = a + (b + p) = a + (r_1 + b); \quad (8')$$

also gibt es

$$r_2 > 0 \text{ mit } (a + (r_1 + b)) + r_2 < q. \quad (\text{VI})$$

Nach Voraussetzung ist

$$a < f(x) < a + r_1 = q_1 \text{ für } 0 < x < p(q_1), \quad (\text{II})$$

$$b < g(x) < b + r_2 = q_2 \text{ für } 0 < x < p(q_2), \quad (\text{II})$$

also

$$a + b < f(x) + g(x) < (a + r_1) + (b + r_2) \quad (6'), (\text{III})$$

$$= (a + (r_1 + b)) + r_2 < q \quad (8')$$

für

$$0 < x < \min(p(q_1), p(q_2)).$$

(VIII). Für jedes  $a$  und jedes  $x > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $k = k(a, x)$ , so daß  $(k - 1)x \leq a < kx$ .

*Beweis:* klar wegen (11).

$$(\text{IX}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} k(a, x)x = a.$$

*Beweis:* Sei  $q > a$ ,

$$p + a = q, \quad p > 0, \quad (7'), (\text{I})$$

dann ist für  $0 < x < p = p(q)$

$$a < k(a, x)x = x + (k(a, x) - 1)x \leq x + a < p + a = q. \quad (\text{III}), (6')$$

$$(\text{X}) \quad a + b = b + a.$$

$$\text{Beweis: } a + b = \lim_{x \rightarrow 0} k(a, x)x + \lim_{x \rightarrow 0} k(b, x)x \quad (\text{IX})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (k(a, x) + k(b, x))x \quad (\text{VII}), (8')$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (k(b, x) + k(a, x))x = b + a. \quad (\text{VII}), (\text{IX})$$

6b.  $M$  besitzt ein kleinstes positives Element  $e$ :

$$(12b) \quad \text{Aus } a > 0 \text{ folgt } a \geq e > 0.$$

In diesem Fall braucht auch das assoziative Gesetz nicht vorausgesetzt zu werden:

Satz 2. Genügt  $M$  den Gesetzen (1), (2), (3), (4'), (5'), (6'), (7'), (11), (12b), so ist  $M$  dem additiven System der nicht-negativen ganzen Zahlen isomorph.

*Beweis:*  $e + a$  ist der unmittelbare Nachfolger von  $a$ ; denn ist  $a < b \leq e + a$ ,  $x + a = b$ ,  $x > 0$  (7'), (I),  $x \geq e$  (12b), so ist  $b = x + a \geq e + a$ , d. h.  $b = e + a$ .  $M$  beginnt also

$$0 < e < 2e < \dots < ne < \dots$$

Durch Induktion folgt nun  $ne + me = (n + m)e$ ; für  $n = 0$  folgt dies aus (5'); ist die Relation für  $n < k$  bewiesen, so wird  $ke + me > (k - 1)e + me = (k - 1 + m)e$ , also  $ke + me \geq (k + m)e$ . Nach (7') hat die Gleichung  $x + me = (k + m)e$  eine Lösung;  $x > ke$  ist unmöglich wegen  $x + me > ke + me \geq (k + m)e$ ; ebenso ist  $x < ke$  unmöglich, da dann  $x = ne$ ,  $n < k$  sein mußte und  $x + me = ne + me = (n + m)e < (k + m)e$ . Also ist  $x = ke$ , d. h.  $ke + me = (k + m)e$ . Die Abbildung  $ne \leftrightarrow n$  ist also isomorph. Wegen (11) kann  $M$  außer den  $ne$  keine weiteren Elemente enthalten.

(Eingegangen am 13. September 1951.)

## Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. I.

### Über die Änderung der Monodromiegruppe parameterabhängiger analytischer Mannigfaltigkeiten.

Von

WALTER THIMM in Bonn.

Abbildungen durch meromorphe Funktionen von mehreren komplexen Variablen sind bisher wenig untersucht worden. Es treten hier besondere Schwierigkeiten auf, die durch den Begriff des Unbestimmtheitspunktes bezeichnet werden. Obgleich die Verhältnisse ähnlich liegen wie bei rationalen Abbildungen, gibt es doch bei meromorphen Abbildungen Fragestellungen und Ergebnisse besonderer Art. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß unter gewissen Voraussetzungen aus der funktionalen Abhängigkeit meromorpher Funktionen ihre algebraische Abhängigkeit folgt. Es wird gezeigt: Wenn die  $k$  funktional unabhängigen meromorphen Funktionen  $t_1, t_2, \dots, t_k$  gewisse Voraussetzungen erfüllen, muß jede von ihnen funktional abhängige meromorphe Funktion von ihnen sogar algebraisch abhängen. Dieses Ergebnis ist im Hauptsatz II (Nr. 7.5, Teil II dieser Arbeit) formuliert. Der Beweis beruht auf der Untersuchung der durch  $t_1, t_2, \dots, t_k$  bestimmten ausgearteten meromorphen Abbildung  $A_k$ . Eine solche Abbildung bildet analytische Mannigfaltigkeiten — sog. Fasern — auf Punkte ab. Da diese analytischen Mannigfaltigkeiten von Parametern, nämlich den Koordinaten des Bildpunktes, abhängen, ist die Untersuchung der folgenden Frage zur Begründung des Faserbegriffes wichtig: Unter welchen Bedingungen bleibt die Irreduzibilität einer analytischen Mannigfaltigkeit in einem Punkte erhalten, wenn Parameter, von denen diese Mannigfaltigkeit abhängt, verändert werden? Wie man leicht sieht, ist diese Aufgabe mit dem folgenden Problem verknüpft: Wie ändert sich die Monodromiegruppe einer algebroiden Funktion in einem Punkte bei Parameterspezialisierung? Diesem Problem ist der I. Teil der Arbeit gewidmet. Im Mittelpunkt steht der Begriff der Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich hier um analytische Mannigfaltigkeiten, die von Parametern abhängen und bestimmte, rekursiv erklärte Bedingungen erfüllen. Eine solche Schar  $M(t)$  besitzt in einem zugeordneten Bereich  $X$  topologische Eigenschaften, die sich auf die Deformation von Kurven in der Komplementärmenge  $X - M(t)$  beziehen. Eine von dem Parametersystem  $t$  abhängige analytische Mannigfaltigkeit  $M(t)$  ist im allgemeinen nicht für alle  $t$  eine Schar. Diejenigen Parameterpunkte, in denen  $M(t)$  keine Schar ist, werden „Ausnahmepunkte“ genannt. Es werden Sätze über die Verteilung der Ausnahmepunkte bewiesen. Mittels des Begriffes der Schar gelangen wir zu Ergebnissen über die Konstanz der Monodromiegruppe einer algebroiden Funktion in einem Punkte bei Parameterspezialisierungen. Diese Sätze bilden die Grundlage zur Definition der Fasermannigfaltigkeiten der ausgearteten meromorphen Abbildung  $A_k$ , die zunächst für allgemeine Punkte des Bildraumes und dann für die Punkte einer analytischen Ebene des Bildraumes

vorgenommen wird. Wir fassen die Fasermannigfaltigkeiten der Punkte analytischer Ebenen, die ein Büschel durch einen „regulären“ Punkt bilden, zu einer Fasergesamtheit zusammen. Diese Fasergesamtheit ist abgeschlossen in dem folgenden Sinne: Jede meromorphe Funktion, die auf den Fasermannigfaltigkeiten der Fasergesamtheit „endlich mehrdeutig“ ist (vgl. Teil II, Definition II, Nr. 2.3), hängt algebraisch von  $t_1, t_2, \dots, t_k$  ab (Hauptsatz I, Teil II, Nr. 6.2). Aus diesem Satze folgt der anfangs erwähnte Hauptsatz II. Ein Beispiel zeigt, daß die Voraussetzungen dieses Satzes über die Abbildung  $A_k$  im allgemeinen nicht entbehrlich sind. Offen bleibt die Frage nach der Beziehung zwischen den funktional abhängigen meromorphen Funktionen in dem Falle, in dem diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

## § 1. Die Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten.

### 1.1. Bezeichnungen.

a) Eine offene und zusammenhängende Punktmenge eines topologischen Raumes heiße „Gebiet“. Ein „Bereich“ sei die abgeschlossene Hülle eines Gebietes. Das topologische Produkt eines Gebietes und eines Bereiches heiße auch Bereich.

b) Das topologische Produkt der Mengen  $A$  und  $B$  werde mit  $\{A, B\}$  bezeichnet.

c)  $R_n$  sei der Raum mit  $n$  (endlichen) komplexen Koordinaten. Für das System  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  werde die Abkürzung  $(x)_n$  eingeführt. 0 sei der Koordinatenursprung des  $R_n$ .

d)  $(y)_n = A(x)_n$  sei eine nicht ausgeartete lineare Koordinatentransformation im  $R_n$ . Der Punkt  $P$  des  $R_n$  besitze die  $(y)$ -Koordinaten:  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Unter der Projektion des Punktes  $P$  in den  $(y)_{n-1}$ -Raum verstehen wir den Punkt mit den Koordinaten  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Ist  $M$  eine Punktmenge des  $R_n$ , so sei die Projektion von  $M$  in den  $(y)_{n-1}$ -Raum die Vereinigungsmenge der Projektionen der Punkte von  $M$ .

e) Unter einem Zylinderbereich im  $R_n$  verstehen wir den durch die Ungleichungen:

$$|x_r| \leq X_r \quad (X_r > 0), \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

bestimmten Bereich.

$(y)_n = A(x)_n$  sei eine nicht ausgeartete lineare Koordinatentransformation des  $R_n$ .  $Y$  sei ein Zylinderbereich im  $(y)_n$ -Raum. Führt die inverse Transformation  $A^{-1} Y$  in den Bereich  $X$  über, so heiße  $X$  ein  $Z$ -Bereich. Jeder Zylinder- und jeder  $Z$ -Bereich enthält den Punkt 0.

f) Außer dem Raum  $R_n$  wird ein Parameterraum  $T$  eingeführt, dessen Punkte mit  $t$  bezeichnet werden. Wenn  $t$  ein System von  $k$  komplexen Parametern ist und der Hinweis auf die Dimension wesentlich ist, werde das Symbol  $(t)_k$  gebraucht.

*Definition I.*  $T$  sei ein Gebiet des Parameterraumes.  $M(t)$  sei die Vereinigungsmenge der Lösungen des Systems von Gleichungen:

$$(1) \quad F_j((x)_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, h.$$

Bezüglich der Eigenschaften der Funktionen  $F_j$  unterscheiden wir zwei Fälle:

*Fall A.* Es gebe eine Umgebung  $U$  des Punktes 0, derart, daß die Funktionen  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , in  $\{U, T\}$  stetig in  $(x)_n$  und  $t$  sind. Bei jeder Spezialisierung  $t = t'$  aus  $T$  seien die  $F_j((x)_n, t')$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , analytisch in  $U$ .

Dann werde  $M(t)$  „stetige Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten in  $\{U, T\}$ “ genannt.

Fall B. Der Buchstabe  $t$  stehe für ein System von  $k$  komplexen Parametern.  $U$  sei eine Umgebung des Punktes 0. Die Funktionen  $F_j, j = 1, 2, \dots, h$ , seien analytisch in den  $n + k$  Variablen  $(x)_n, (t)_k$  im Gebiet  $\{U, T\}$ . Dann werde  $M(t)$  „reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten in  $\{U, T\}$ “ genannt.

## 1.2.

Im Vordergrund des Interesses stehen spezielle Gesamtheiten, die als Scharen bezeichnet werden. Ihre Definition geschehe rekursiv nach der Dimension  $n$  des Raumes. Wir betrachten die in Definition I angegebenen Fälle A und B gleichzeitig:

Definition II.  $T$  sei ein Gebiet oder Bereich des Parameterraumes;  $U$  sei eine Umgebung des Punktes 0 im  $R_n$ .  $M(t)$  sei im Fall A eine stetige, im Fall B eine reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten in  $\{U, T\}$ .

a)  $n = 1$ .

Es gebe einen Kreisbereich  $X \subset U$ , derart, daß für  $t \in T$  die zu  $X$  gehörenden Punkte von  $M(t)$  der Gleichung:

$$p(x_1/t) = 0$$

genügen. Im Fall A sei  $p$  ein Polynom in  $x_1$ , dessen Koeffizienten stetig in  $t$  sind, wenn  $t$  in  $T$  variiert. Im Fall B seien die Koeffizienten von  $p$  analytisch in  $T$ . Für  $t \in T$  besitze  $p$  in  $X$  lauter verschiedene Wurzeln, jedoch keine Wurzel auf dem Rande von  $X$ . Die Anzahl der Wurzeln von  $p$  in  $X$  ist konstant und kann auch 0 sein. Dann werde  $M(t)$  im Fall A stetige, im Fall B reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten für  $\{X, T\}$  genannt.

b) Scharen von analytischen Mannigfaltigkeiten für Dimensionen  $\leq n - 1$  seien definiert. Es gebe einen Z-Bereich  $X \subset U$  mit den folgenden Eigenschaften:  $(y)_n = A(x)_n$  sei die nicht ausgeartete lineare Transformation, die den Z-Bereich  $X$  in den Zylinderbereich  $Y$  überführt, vgl. 1.1e).  $Y$  sei topologisches Produkt des Kreises  $K$ :

$$|y_n| \leq Y_n \quad (Y_n > 0)$$

und des Zylinderbereiches  $Y'$ , der die Projektion von  $X$  in den  $(y)_{n-1}$ -Raum bildet.

Es gebe im  $(y)_{n-1}$ -Raum im Fall A eine stetige, im Fall B eine reguläre Schar analytischer Mannigfaltigkeiten  $m(t)$  für  $\{Y', T\}$ , welche die folgende Bedingung erfüllt:

Für Parameter  $t \in T$  genüge jeder Punkt von  $M(t)$ , der in  $X$  liegt und dessen Projektion in den  $(y)_{n-1}$ -Raum nicht zu  $m(t)$  gehört, der Gleichung:

$$p(y_n/y_1, \dots, y_{n-1}, t) = 0.$$

Dabei sei  $p$  ein Polynom von  $y_n$  mit der folgenden Koeffizienteneigenschaft:

Im Fall A:  $E_1$ . Der höchste Koeffizient sei 1; die übrigen Koeffizienten seien stetig in  $\{Y', T\}$ . Bei jeder Spezialisierung  $t = t'$  seien sie analytisch in  $Y'$ .

Im Fall B:  $E_2$ . Der höchste Koeffizient sei 1; die übrigen Koeffizienten seien analytisch in  $\{Y', T\}$ .

Wenn  $t$  aus  $T$  ist und der Punkt  $(y)_{n-1}$  in  $Y' - m(t)$  liegt, besitze  $p$  im Innern des Kreises  $K$  lauter verschiedene Wurzeln, deren Anzahl konstant ist, und keine Wurzel auf dem Rande von  $K$ . Die erwähnte Wurzelanzahl kann auch 0 sein.



Genügt  $M(t)$  den angegebenen Voraussetzungen, so heiße  $M(t)$  im Fall  $A$  „stetige“, im Fall  $B$  „reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten für  $\{X, T\}$ “.

## § 2. Topologische Sätze über Scharen von analytischen Mannigfaltigkeiten.

### 2.1.

**Satz 1.**  $X$  sei ein  $Z$ -Bereich im  $R_n$  (vgl. 1.1.e).  $T$  sei das Einheitsintervall  $0 \leq t \leq 1$ .

$M(t)$  sei eine stetige Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten für  $\{X, T\}$  (vgl. Definition II).

$P(t)$  und  $Q(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , seien Punkte, die im Innern von  $X$  liegen, ihre Lage stetig mit  $t$  ändern und nicht zu  $M(t)$  gehören.

$C_0$  sei eine Kurve, die im Innern von  $X$  verläuft und die analytische Mannigfaltigkeit  $M(0)$  nicht schneidet.  $P(0)$  sei Anfangspunkt von  $C_0$ , und  $Q(0)$  sei Endpunkt von  $C_0$ .

Dann gibt es für jeden Wert von  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , eine Kurve  $C(t)$  mit dem Anfangspunkt  $P(t)$  und dem Endpunkt  $Q(t)$ , die im Innern von  $X$  liegt und die punktfremd zu  $M(t)$  ist. Ferner ist  $C(0) = C_0$ . Die Kurve  $C(0)$  läßt sich über die Zwischenmengen  $C(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , auf  $C(1)$  deformieren.

**Beweis.** Im Sinne des Induktionsbeweises nehmen wir an, der Satz sei für Raumdimensionen  $\leq n-1$  bewiesen ( $n \geq 2$ ), woraus wir seine Richtigkeit für  $n$  folgern werden. Der Fall  $n=1$  werde zum Schluß untersucht. Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, wird eine Projektion des Raumes  $R_n$  in den  $(y)_{n-1}$ -Raum vorgenommen. Vorher sind  $C_0$ ,  $P(t)$ ,  $Q(t)$  so abzuändern, daß ihre Projektionen und die Schar  $m(t)$  (vgl. Definition II), die Voraussetzungen des Satzes im Falle der Dimension  $n-1$  erfüllen.

### 2.2.

**Aufgabe 1.**  $C_0$  ist in  $X - M(0)$  auf eine Kurve  $C'_0$  zu deformieren, deren Projektion  $c'_0$  [in den  $(y)_{n-1}$ -Raum]<sup>1)</sup> punktfremd zur analytischen Mannigfaltigkeit  $m(0)$  und zum Rande von  $Y'$  ist.

**Lösung.** Da  $C_0$  punktfremd zu  $M(0)$  und zum Rande von  $X$  ist, kann  $C_0$  in  $X - M(0)$  auf einen geradlinigen Streckenzug  $\bar{C}_0$  deformiert werden, der wie  $C_0$  in  $P(0)$  beginnt und in  $Q(0)$  endet. Die Projektion von  $\bar{C}_0$  ist ein Streckenzug  $\bar{c}_0$ , der mit der analytischen Mannigfaltigkeit  $m(0)$  nur endlich viele Punkte und eventuell auch noch ganze Teilstrecken gemeinsam hat.

**Teilergebnis 1.** Es gibt in beliebiger Umgebung des Streckenzuges  $\bar{c}_0$  einen Streckenzug  $c'_0$ , der  $m(0)$  nicht schneidet und auf den sich  $\bar{c}_0$  so deformieren läßt, daß auch die Zwischenmengen in beliebiger Umgebung von  $\bar{c}_0$  liegen.

Der Beweis benutzt folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz.** Es sei  $m$  eine höchstens  $2k-2$  dimensionale reelle analytische Mannigfaltigkeit in dem Teilbereich  $B$  des reellen  $2k$ -dimensionalen Raumes  $R_{2k}$ .  $g$  sei eine Gerade, die durch  $B$  hindurchgeht, und  $P$  sei ein beliebiger Punkt von  $g \cap B$ . Dann gibt es eine (2-dimensionale) Ebene, die  $g$  enthält, und eine Umgebung  $U$  von  $P$ , derart, daß  $E$  und  $m$  in  $U$  außerhalb  $g$  nur endlich viele Schnittpunkte haben.

<sup>1)</sup> Den eingeklammerten Zusatz lassen wir in der Folge weg.



*Beweis des Hilfssatzes.* Wenn  $P$  nicht auf  $m$  liegt, gibt es eine Umgebung von  $P$ , die punktfremd zu  $m$  ist. Dann ist der Hilfssatz richtig. Es liege also  $P$  auf  $m$ . Die analytische Mannigfaltigkeit  $m$  genüge in der Umgebung von  $P$  den reellen analytischen Gleichungen

$$(1) \quad f_1(x_1, \dots, x_{2k}) = 0, \quad f_2(x_1, \dots, x_{2k}) = 0.$$

Wir führen in  $R_{2k}$  solche Koordinaten ein, daß  $g$  die Gerade

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2k-1} = 0$$

und  $P$  der Nullpunkt ist.  $E_{2k-2}$  sei die lineare Mannigfaltigkeit mit den Gleichungen:  $x_1 = 1, x_{2k} = 1$ ; sie schneidet  $g$  nicht. Durch den Punkt 1,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}, 1$  der  $E_{2k-2}$  und die Gerade  $g$  werde die Ebene gelegt; ihre Punkte haben folgende Koordinaten:

$$x_1 = \lambda, x_2 = \lambda \lambda_1, \dots, x_{2k-1} = \lambda \lambda_{2k-2}, x_{2k} = \lambda + \mu.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in  $f_1$  und  $f_2$  ein, so erhalten wir die Gleichungen von  $m$  in den Koordinaten  $\lambda, \mu, \lambda_1, \dots, \lambda_{2k-2}$ .

$$(2) \quad \varphi_1(\lambda, \mu; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}) = 0, \quad \varphi_2(\lambda, \mu; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}) = 0.$$

Da die Hyperebene  $x_1 = x_{2k}$  nicht auf  $m$  liegt, dürfen wir voraussetzen, daß für  $\mu = 0$   $\varphi_1$  und  $\varphi_2 \not\equiv 0$  sind. Dann gibt es eine Spezialisierung mit reellen Zahlen:  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{2k-2}^0$ , derart, daß die Funktionen:

$$\varphi_1(\lambda, 0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_{2k-2}^0) \text{ und } \varphi_2(\lambda, 0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_{2k-2}^0)$$

nicht identisch in  $\lambda$  verschwinden. Im Punkte  $\lambda = \mu = 0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{2k-2}^0$  wird auf  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz bei Auszeichnung der Variablen  $\lambda$  angewandt. Die Lösungen von (2) genügen Gleichungen:

$$(3) \quad \Phi_1(\lambda/\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}) = 0, \quad \Phi_2(\lambda/\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}) = 0,$$

wobei  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ausgezeichnete Pseudopolynome von  $\lambda$  mit reellen Koeffizienten sind (vgl. OSGOOD, Lb., S. 91). Der größte gemeinsame Teiler von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ :  $\delta(\lambda/\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2})$  hat reelle Koeffizienten, die rationale Funktionen der Koeffizienten von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  sind. Aus  $\delta$  werde durch rationale Rechenoperationen das Polynom  $\delta^*$  gewonnen, dessen Koeffizienten auch zum Körper der Koeffizienten von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  gehören, dessen Diskriminante jedoch nicht identisch verschwindet.  $\delta^*$  hat dann und nur dann den Faktor  $\lambda$ , wenn  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  für  $\lambda = 0$  identisch null sind, d. h. wenn  $g$  zu  $m$  gehört. Kürzen wir, falls möglich, durch  $\lambda$ , so bleibe ein Polynom  $\delta'$  übrig. Bei allgemeinen reellen  $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}$  besitzt  $\delta'$  keine reellen Wurzeln, da andernfalls eine reelle  $(2k-1)$ -dimensionale analytische Mannigfaltigkeit in  $m$  liegen würde, was den Voraussetzungen widerspricht. Nur zu solchen reellen  $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2}$  gehören reelle Wurzeln von  $\delta'$ , für welche die (reelle) Diskriminante  $\Delta(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2})$  verschwindet. Setzen wir  $\Phi'_1 = \Phi_1/\delta$  und  $\Phi'_2 = \Phi_2/\delta$ , so ist die (reelle) Resultante  $\varrho(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-2})$  von  $\Phi'_1$  und  $\Phi'_2$  nicht identisch null. Wir wählen reelle  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{2k-2}$  so, daß  $\varrho(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_{2k-2}) \not\equiv 0$  und  $\Delta(\mu, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{2k-2}) \equiv 0$  sind. Durch diese Koordinaten wird eine Ebene bestimmt, deren Schnittpunkte mit  $m$  in einer Umgebung von  $P$ , die außerhalb  $g$  liegen, einem der Gleichungspaare:

$$\Phi_1(\lambda/\mu; \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{2k-2}) = 0, \quad \varrho(\mu, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{2k-2}) = 0$$

bzw.  $\Phi_1(\lambda/\mu; \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{2k-2}) = 0, \quad \Delta(\mu, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{2k-2}) = 0$  genügen. Daraus folgt der Hilfssatz.

Es sei  $s$  eine Teilstrecke des Streckenzuges  $\bar{c}_0$ . Wegen des Hilfssatzes dürfen wir für  $s$  die folgende Eigenschaft voraussetzen: Es gibt eine Ebene  $E$  durch  $s$  und eine Umgebung  $U(s)$  von  $s$  in dieser Ebene, derart, daß  $U(s)$  nur endlich viele Punkte von  $m(0)$  enthält, die außerhalb  $s$  liegen. Man kann jetzt leicht in der Ebene  $E$  einen Streckenzug  $s'$  finden, der in beliebiger Umgebung von  $s$  liegt, der  $m(0)$  nicht schneidet und auf den  $s$  so deformiert werden kann, daß auch die Zwischenmengen in beliebiger Umgebung von  $s$  liegen. Daraus folgt das Teilergebnis 1.

Zur Lösung der Aufgabe 1 werde die Deformation der Kurve  $\bar{C}_0$  nach der folgenden Vorschrift bestimmt:  $P$  sei ein beliebiger Punkt von  $\bar{C}_0$ .

1. Die  $y_n$ -Koordinate von  $P$  bleibe ungeändert.

2. Die Koordinaten  $(y)_{n-1}$  von  $P$  sind entsprechend der Deformation von  $\bar{c}_0$  auf  $c'_0$  abzuändern.

Durch diese Deformation werde  $\bar{C}_0$  in die Kurve  $C'_0$  überführt.  $C'_0$  und die Zwischenmengen der Deformation von  $\bar{C}_0$  auf  $C'_0$  liegen in beliebiger Nähe von  $C'_0$ , wenn  $c'_0$  hinreichend nahe an  $\bar{c}_0$  gewählt wird. Insbesondere können wir so erreichen, daß sie alle zu  $M(0)$  und zum Rande von  $X$  punktfremd sind. Damit ist Aufgabe 1 gelöst.

### 2.3.

**Teilergebnis 2.** Das Minimum der Abstände der Punkte  $P(t)$  und  $Q(t)$  von  $M(t)$  und vom Rande des Bereiches  $X$  ist für  $0 \leq t \leq 1$  eine Zahl  $a > 0$ .

Für  $0 \leq t \leq 1$  werde dem Punkt  $P(t)$  der Punkt  $P'(t)$  und dem Punkte  $Q(t)$  der Punkt  $Q'(t)$  so zugeordnet, daß die Abstände von  $P(t)$  und  $P'(t)$  bzw. von  $Q(t)$  und  $Q'(t)$  kleiner als  $a$  sind. Die Punkte  $P'(t)$  und  $Q'(t)$  seien für  $0 \leq t \leq 1$  stetig in  $t$ . Ist Satz 1 bei Vorgabe von  $P'(t)$  und  $Q'(t)$  richtig, so gilt er auch mit  $P(t)$  und  $Q(t)$ .

**Beweis.** Nach der Voraussetzung gibt es eine Kurve  $C'(t)$ , die  $P'(t)$  und  $Q'(t)$  verbindet, die punktfremd zu  $M(t)$  ist und aus  $C'_0$  durch Deformation entsteht. Verlängern wir die Kurve  $C'(t)$  um die geradlinigen Verbindungsstrecken von  $P'(t)$  und  $P(t)$  und von  $Q'(t)$  und  $Q(t)$ , so erhalten wir eine Kurve  $C(t)$ , die allen Anforderungen genügt.

**Aufgabe 2.** Die in der Formulierung des Teilergebnisses 2 erklärten Punkte  $P'(t)$  und  $Q'(t)$  sind so zu wählen, daß ihre Projektionen nicht auf  $m(t)$  und dem Rande des Bereiches  $Y'$  liegen.

**Lösung.** Die durch die Aufgabe 2 geforderte Konstruktion werde nur für die Punkte  $P'(t)$  durchgeführt, da sie für die Punkte  $Q'(t)$  analog verläuft.

Es sei  $t_0$  eine beliebige Stelle des Einheitsintervalles. Wir wählen einen Punkt  $P'(t_0)$  aus, der die folgenden Bedingungen erfüllt: 1. Der Abstand von  $P'(t_0)$  und  $P(t_0)$  sei kleiner als  $a/4$ . 2. Die Projektion von  $P'(t_0)$  gehöre nicht zu  $m(t_0)$  und zum Rande von  $Y'$ . Weil  $P(t)$  stetig ist und weil die Menge  $m(t)$  in  $\{Y', T\}$  abgeschlossen ist, gibt es eine Zahl  $\delta(t_0) > 0$ , derart, daß die Bedingungen 1. und 2. auch noch gelten, wenn  $P(t_0)$  durch  $P(t)$  und  $m(t_0)$  durch  $m(t)$  ersetzt werden, solange  $|t - t_0| < \delta(t_0)$  ist. Der Stelle  $t_0$  des Einheitsintervalles werde das Intervall  $|t - t_0| \leq 1/2 \delta(t_0)$  zugeordnet. Das Einheitsintervall wird nach dem Überdeckungssatz von HEINE-BOREL von endlich vielen dieser Intervalle überdeckt. Die überdeckenden Intervalle  $\Delta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) werden so bestimmt, daß sie bis auf die Endpunkte fremd sind.  $t_k$  sei der Mittelpunkt von  $\Delta_k$ , und  $T_k$  sei der Teilpunkt, der  $\Delta_k$  von  $\Delta_{k+1}$  trennt. Der Abstand von  $P'(t_k)$  und  $P'(t_{k+1})$  ist kleiner als  $a/2$ . Die Verbindungsstrecke

von  $P'(t_k)$  und  $P'(t_{k+1})$  sei  $S_k$ . Wenn die Projektion  $s_k$  von  $S_k$  die Mannigfaltigkeit  $m(T_k)$  schneidet, werde wie beim Beweise des Teilergebnisses 1 verfahren. Es gibt einen Streckenzug  $S'_k$ , der  $P'(t_k)$  und  $P'(t_{k+1})$  verbindet, der in beliebiger Umgebung von  $S_k$  verläuft und dessen Projektion  $s'_k m(T_k)$  vermeidet. Ist  $t$  eine beliebige Stelle aus einem der Intervalle  $\Delta_k$  oder  $\Delta_{k+1}$ , so ist der Abstand des Punktes  $P(t)$  von  $P'(t_k)$  und von  $P'(t_{k+1})$  kleiner als  $a$ . Also ist auch die Entfernung des ganzen Streckenzuges  $S'_k$  vom Punkte  $P(t)$  kleiner als  $a$ , wenn nur  $S_k$  hinreichend nahe an  $S_k$  gewählt wird. Da  $s'_k$  punktfremd zu  $m(T_k)$  ist, gibt es eine Zahl  $\varrho_k > 0$ , derart, daß  $s'_k$  auch für  $|t - T_k| \leq \varrho_k$  mit den Mannigfaltigkeiten  $m(t)$  leere Durchschnitte hat. Wir grenzen um  $T_k$  ein Intervall  $\Sigma_k: |t - T_k| \leq \sigma_k \leq \varrho_k$  ab, das die Punkte  $t_k$  und  $t_{k+1}$  nicht enthält, und bilden  $\Sigma_k$  stetig auf den Streckenzug  $S'_k$  ab. Der Bildpunkt eines Punktes  $t$  aus  $\Sigma_k$  werde als Punkt  $P'(t)$  definiert. Diese Konstruktion werde für jeden Teilpunkt  $T_k$  durchgeführt. In den Punkten von  $\Delta_k$  außerhalb der Intervalle  $\Sigma_{k-1}$  und  $\Sigma_k$  werde  $P'(t) = P'(t_k)$  gesetzt. Die Funktion  $P'(t)$  löst die Aufgabe 2.

#### 2.4.

Nach der Lösung der Aufgaben 1 und 2 genügt es, Satz 1 für die Ausgangskurve  $C'_0(t)$ , die Anfangspunkte  $P'(t)$  und die Endpunkte  $Q'(t)$  zu beweisen, was einen Induktionsschluß ermöglicht. Die Induktionsvoraussetzung liefert das Ergebnis:

Die Kurve  $c'_0$  wird über die Zwischenkurven  $c'(t)$  auf die Kurve  $c'(1)$  deformiert.  $c'(t)$  liegt in  $Y' - m(t)$  und verbindet die Punkte  $p'(t)$  und  $q'(t)$ , welche die Projektionen von  $P'(t)$  bzw.  $Q'(t)$  sind. Diese Deformation werde durch die folgenden Formeln beschrieben:

$$(1) \quad y_i = \Phi_i(t, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dabei sind  $\tau$  der Kurvenparameter,  $0 \leq \tau \leq 1$ , und  $t$  der Parameter der Deformation  $0 \leq t \leq 1$ . Die Kurve  $C'(t)$  werde so bestimmt, daß ihre Projektion  $c'(t)$  ist. Diese Bedingung bedeutet, daß die Deformation für die  $n-1$  ersten Koordinaten von  $C'(t)$  durch die Formeln (1) bereits bestimmt ist. Es bleibt die folgende Aufgabe übrig:

*Aufgabe 3.* Es ist eine in  $t$  und  $\tau$  für  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , stetige Funktion  $y_n = \Phi_n(t, \tau)$  zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften hat:

1.  $\Phi_n(0, \tau)$  sei gleich der  $y_n$ -Koordinate der Punkte der Kurve  $C'_0$ , deren Parameter  $\tau$  ist.
2.  $\Phi_n(t, 0)$  sei gleich der  $y_n$ -Koordinate des Punktes  $P'(t)$ .
3.  $\Phi_n(t, 1)$  sei gleich der  $y_n$ -Koordinate des Punktes  $Q'(t)$ .
4. Für alle  $t$  und  $\tau$  sei  $\Phi_n(t, \tau)$  von den in  $K$  liegenden Nullstellen des Polynoms:  $p(y_n/\Phi_1(t, \tau), \dots, \Phi_{n-1}(t, \tau), t)$  verschieden.
5. Es bestehe die Ungleichung:  $|\Phi_n(t, \tau)| < Y_n$ . Zur Erklärung der verwendeten Bezeichnungen vgl. Definition II.

*Lösung.* Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf den reellen 3-dimensionalen Raum  $R_3$  mit den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ , und zwar seien:  $\xi = \tau$ ,  $\eta + i\zeta = y_n$ . Im  $R_3$  bestehe die Punktmenge  $A(t)$ : a) aus dem Mantel des Zylinders  $Z$ :  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\eta^2 + \zeta^2 \leq Y_n^2$ . b) aus den Nullstellen des Polynoms  $p(y_n/\Phi_1(t, \tau), \dots, \Phi_{n-1}(t, \tau), t)$  für  $0 \leq \tau = \xi \leq 1$ . Da die Kurve  $c'(t)$  ganz in  $Y' - m(t)$  liegt, besitzt das Polynom  $p$  für jeden Wert von  $\tau = \xi$  gleichviele, etwa  $r$ , verschiedene Wurzeln, die stetig von  $\xi$  abhängen und im Innern

des Kreises  $K$  liegen. Der zweite Bestandteil von  $A(t)$  setzt sich daher aus  $r$  vollkommen getrennt verlaufenden Kurven zusammen. Die Gleichung  $y_n = \eta + i\zeta = \Phi_n(0, \tau) = \Phi_n(0, \xi)$  bestimmt eine Kurve  $\gamma(0)$ , die im Zylinder  $Z$  liegt und einen Punkt  $p(0)$  des Randkreises  $\xi = 0$  von  $Z$  mit einem Punkte  $q(0)$  des Randkreises  $\xi = 1$  von  $Z$  verbindet. Ferner ist  $\gamma(0)$  punktfremd zu  $A(0)$ .  $\Phi_n(t, 0)$  ergibt für jeden Wert von  $t$  einen Punkt  $p(t)$  auf dem Randkreise  $\xi = 0$  und  $\Phi_n(t, 1)$  einen Punkt  $q(t)$  auf dem Randkreise  $\xi = 1$ . Die Aufgabe 3 kann daher auch folgendermaßen geometrisch formuliert werden:

**Aufgabe 3a.** Gegeben seien der Zylinder  $Z$  und in diesem Zylinder die oben beschriebene Punktmenge  $A(t)$ . Ferner sei  $\gamma(0)$  eine Kurve, die zu  $Z$  gehört und  $A(0)$  nicht schneidet. Außerdem seien die Punkte  $p(t)$  und  $q(t)$  gegeben, die auf den Randkreisen  $\xi = 0$  bzw.  $\xi = 1$  des Zylinders liegen und ihre Lage stetig mit  $t$  ändern. Die Kurve  $\gamma(0)$  verbinde  $p(0)$  mit  $q(0)$ . Es sind Kurven  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit folgenden Eigenschaften zu finden:

1.  $\gamma(t)$  verbinde  $p(t)$  mit  $q(t)$ .
2.  $\gamma(t)$  ist punktfremd zu  $A(t)$ .
3.  $\gamma(t)$  liegt im Zylinder  $Z$ .
4.  $\gamma(0)$  ist über die Zwischenmengen  $\gamma(t)$  auf  $\gamma(1)$  deformierbar.

Die Lösung der Aufgabe 3a läßt sich mit den Methoden VAN KAMPENS angeben [vgl. E. R. VAN KAMPEN: On the fundamental group of an algebraic curve. Amer. J. Math. 55 (1933)]. Vgl. hierzu die Arbeit des Verf.: Untersuchungen über Deformationen, Math. Ann. 125, 19 (1952), Nr. 3. 8., ferner Nr. 2.1. und Satz 1.

## 2.5.

Es fehlt noch die Untersuchung des Induktionsanfanges  $n = 1$ . In geometrischer Formulierung lautet jetzt die Aufgabe: Im Kreise  $K$  bestehe die Punktmenge  $A(t)$ : 1. aus dem Kreisumfang, 2. aus  $r$  verschiedenen Punkten, die im Innern von  $K$  liegen und ihre Lage stetig mit  $t$  ändern.  $c(0)$  sei eine Kurve im Innern von  $K$ , die punktfremd zu  $A(0)$  ist.  $P(t)$  und  $Q(t)$  seien Punkte in  $K$ , die nicht zu  $A(t)$  gehören und stetig in  $t$  sind.  $c(0)$  verbinde  $P(0)$  mit  $Q(0)$ . Es ist eine Kurve  $c(t)$  zu finden, die 1.  $P(t)$  und  $Q(t)$  verbindet, 2. punktfremd zu  $A(t)$  ist, 3. in  $K$  liegt. 4. Es gebe eine Deformation von  $c(0)$  mit den Zwischenmengen  $c(t)$ . Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich in derselben Weise wie bei der allgemeineren Aufgabe 3a finden.

## 2.6.

**Satz 2.**  $t$  bezeichne ein System von  $k$  komplexen Parametern.  $T$  sei das Zylindergebiet:

$$|t_i| < T_i (T_i > 0), i = 1, 2, \dots, k.$$

$X$  sei ein  $Z$ -Bereich (vgl. 1.1. e).  $M(t)$  sei eine reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten für  $\{X, T\}$  (vgl. Definition II).  $C$  sei eine Kurve, die im Innern von  $\{X, T\}$  liegt, die punktfremd zu  $M(t)$  ist und deren Endpunkte zu  $\{X, t_0\}$  gehören. Hierbei sei  $t_0$  ein beliebiger Punkt aus  $T$ . Dann gibt es eine Kurve  $\Gamma$ , die im Innern von  $\{X, t_0\}$  liegt, mit folgender Eigenschaft:  $C$  kann im Innern von  $\{X, T\}$  unter Festhaltung der Endpunkte so auf  $\Gamma$  deformiert werden, daß die Zwischenmengen dieser Deformation zu  $M(t)$  punktfremd sind.

**Beweis.** Der Beweis dieses Satzes wird mit denselben Methoden wie der des Satzes 1 geführt. An die Stelle der beim Beweise von Satz 1 zur Vorbe-

reitung des Induktionsschlusses verwendeten Projektion des Bereiches  $X$  in den Bereich  $Y'$  tritt jetzt die Projektion von  $\{X, T\}$  in  $\{Y', T\}$ . Der Induktionsanfang werde mit  $n = 0$  gemacht. Für  $n = 0$  lautet die Behauptung:  $C$  sei eine Kurve in  $T$ , deren Endpunkte in den Punkt  $t_0$  fallen.  $C$  kann in  $T$  unter Festhaltung der Endpunkte auf den Punkt  $t_0$  deformiert werden. Diese Behauptung ist richtig, weil  $T$  als Zylindergebiet einfach zusammenhängend ist.

### § 3. Funktionentheoretische Sätze über reguläre Scharen von analytischen Mannigfaltigkeiten.

#### 3.1.

*Definition III.*  $t$  bezeichne ein System von  $k$  komplexen Parametern.  $T$  sei ein Gebiet des Parameterraumes.  $U$  sei eine Umgebung des Punktes 0.  $M(t)$  sei eine reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten in  $\{U, T\}$  (vgl. Definition I).  $t = t_0$  sei ein Punkt von  $T$ .

a) Wenn es einen  $Z$ -Bereich  $X \subset U$  und eine Umgebung von  $t_0: T_0 \subset T$  gibt, derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten für  $\{X, T_0\}$  ist, heiße  $M(t)$  eine reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten im Punkte  $t_0$ .

b) Diejenigen Punkte des Gebietes  $T$ , in denen  $M(t)$  keine reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten ist, nennen wir „Ausnahmepunkte für  $M(t)$ “.

#### 3.2.

*Hilfssatz 1.*  $M(t)$  sei eine reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten im Punkte  $t_0$ .  $U_0$  sei eine beliebig vorgegebene Umgebung des Punktes 0. Dann gibt es einen  $Z$ -Bereich  $X_0$ , der zu  $U_0$  gehört, und eine Umgebung  $T_0$  von  $t_0$ , derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten für  $\{X_0, T_0\}$  ist.

*Beweis.* Wir verwenden vollständige Induktion nach  $n$ . Für Raumdimensionen  $\leq n - 1$  sei der Hilfssatz richtig. Nach Definition III gibt es einen  $Z$ -Bereich  $X'$  und eine Umgebung  $T'$  von  $t_0$ , derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar für  $\{X', T'\}$  ist. Sie bestimme nach Definition II die reguläre Schar  $m(t)$  im  $(y)_{n-1}$ -Raum und die Gleichung  $p(y_n/(y)_{n-1}, t) = 0$ . Dann gibt es eine Umgebung des Punktes  $y_n = 0$ , in der das Polynom  $p$  für  $\{(y)_{n-1} = (0)_{n-1}, t_0\}$  keine andere Wurzel als eventuell  $y_n = 0$  hat. Wir bestimmen einen Zylinderbereich  $Y_1$  und eine Umgebung  $T_1$  von  $t_0$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $T_1$  liege in  $T'$ .
2. Die zu  $A$  (vgl. Definition II) inverse lineare Transformation  $A^{-1}$  bilde  $Y_1$  auf den  $Z$ -Bereich  $X_1$  ab.  $X_1$  sei Teilbereich von  $U_0$  und gehöre auch zu  $X'$ .
3. Ist  $Y_1$  topologisches Produkt des Kreises  $K$  der  $y_n$ -Ebene und des im  $(y)_{n-1}$ -Raum gelegenen Zylinderbereiches  $Y'_1: Y_1 = \{Y'_1, K\}$ , so sei  $p$  für  $\{(y)_{n-1}, t\}$  aus  $\{Y'_1, T_1\}$  auf dem Rande des Kreises  $K \neq 0$ .

Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die im Punkte  $t_0$  reguläre Schar  $m(t)$  des  $(y)_{n-1}$ -Raumes an und geben den Bereich  $Y'_1$  vor. Darach gibt es einen Zylinderbereich  $Y'_0$  in  $Y'_1$  und eine Umgebung  $T_0$  in  $T_1$ , derart, daß  $m(t)$  eine reguläre Schar für  $\{Y'_0, T_0\}$  ist. Das topologische Produkt von  $Y'_0$  und  $K$  sei der Zylinderbereich  $Y_0$ , der durch die lineare Transformation  $A^{-1}$  auf den  $Z$ -Bereich  $X_0$  abgebildet werde.  $M(t)$  ist reguläre Schar für

$\{X_0, T_0\}$ . Da  $X_0$  in  $U_0$  liegt, ist der Induktionsbeweis fertig. Im Falle  $n = 1$  bleiben die obigen Überlegungen gültig und ergeben die Bestimmung von  $T_0$ .

### 3.3.

**Satz 3.** Es bezeichne  $t$  einen einzigen komplexen Parameter und  $T$  einen beschränkten Bereich der  $t$ -Ebene.  $U$  sei eine Umgebung des Punktes 0.  $M(t)$  sei eine reguläre Gesamtheit analytischer Mannigfaltigkeiten in  $\{U, T\}$  (vgl. Definition I). Der Bereich  $T$  enthält höchstens endlich viele Ausnahmepunkte (vgl. Definition III).

*Beweis.* Aus dem folgenden Ergebnis folgt Satz 3: Es sei  $t_0$  ein beliebiger Punkt aus  $T$ . Dann gibt es eine Umgebung von  $t_0$ , in der — eventuell außer  $t_0$  — kein Ausnahmepunkt liegt. Für den folgenden Beweis nehmen wir  $t_0 = 0$  an.

a) Der Beweis geschieht durch vollständige Induktion nach der Raumdimension  $n$ . Gemäß Definition I werde  $M(t)$  durch das System von analytischen Gleichungen:

$$(1) \quad F_j((x)_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, h,$$

bestimmt. Die Funktionen  $F_j$  seien analytisch in  $\{U, T\}$ . Wenn eine Funktion  $F_j$  für  $t = 0$  identisch verschwindet, so ist sie durch eine Potenz von  $t$  teilbar. Dann gehen wir von den Funktionen  $F_j$  zu Linearkombinationen:

$$F'_j = \sum_{\mu=1}^h \alpha_{j\mu} F_{\mu}, \quad j = 1, 2, \dots, h, \quad \text{Det. } |\alpha_{j\mu}| \neq 0,$$

über, die so bestimmt werden, daß die Funktionen  $F'_j$  durch die gleiche (größte) Potenz  $t^\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) teilbar sind. Falls  $\alpha > 0$  ist, ist  $t = 0$  Ausnahmepunkt für  $M(t)$ .

b) Auf die Funktionen  $G_j = \frac{1}{t^\alpha} F'_j$  wenden wir im Punkte  $\{0, t = 0\}$

— eventuell nach einer linearen Transformation der Variablen  $(x)_n$ , durch die also  $t$  nicht berührt wird — den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz an:

$$(2) \quad (y)_n = A(x)_n, \quad G_j = P_j(y_n/(y)_{n-1}, t) \cdot E_j((y)_n, t), \quad j = 1, 2, \dots, h.$$

Das System (1) besitzt — außer  $t = 0$  — in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes  $\{0, t = 0\}$  dieselbe Lösungsmannigfaltigkeit wie das System von abgebroiden Gleichungen:

$$(3) \quad P_j(y_n/(y)_{n-1}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, h.$$

Der größte gemeinsame Teiler der Polynome  $P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , sei das Polynom  $d(y_n/(y)_{n-1}, t)$ .  $d = 1$  tritt ein, wenn die Polynome  $P_j$  teilerfremd sind. Es seien:  $P_j = d H_j$ . Wir dürfen annehmen, daß die Diskriminante von  $d$  nicht identisch verschwindet, andernfalls werde aus  $d$  mit algebraischen Mitteln zunächst ein Polynom mit dieser Eigenschaft berechnet. Die Diskriminante von  $d$  sei  $D((y)_{n-1}, t)$ .

c) Alle Punkte von  $M(t)$  — außer eventuell Punkten mit  $t = 0$  — in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes  $\{0, t = 0\}$  erfüllen entweder die Gleichung  $d = 0$  oder das System:

$$(4) \quad H_j(y_n/(y)_{n-1}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, h.$$

Die erwähnte Umgebung enthalte das topologische Produkt des  $Z$ -Bereiches  $X'$  und der Umgebung  $T'$  von  $t = 0$ .  $X'$  werde durch die lineare Transformation  $A$ , [vgl. (2)], auf den Zylinderbereich  $Y$  abgebildet, der topologisches Produkt

des in der  $y_n$ -Ebene gelegenen Kreises  $K$  und des im  $(y)_{n-1}$ -Raum gelegenen Zylinderbereiches  $Y'$  sei.  $Y'$  und  $T'$  werden so klein gewählt, daß für  $\{(y)_{n-1}, t\}$  aus  $\{Y', T'\}$  die Wurzeln des Polynoms  $d$  im Innern des Kreises  $K$  liegen. Im Falle  $d = 1$  entfällt diese Bedingung.

d) Bilden wir das Resultantensystem der Polynome  $H_j$  bezüglich  $y_n$ , so gewinnen wir ein System von Funktionen  $K_j((y)_{n-1}, t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, h_1$ , die nicht alle identisch verschwinden. Aus ihnen bilden wir das Gleichungssystem:

$$(5) \quad Q_j((y)_{n-1}, t) = K_j((y)_{n-1}, t) \cdot D((y)_{n-1}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, h_1.$$

Die Gleichungen (5) bestimmen eine reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten in  $\{Y', T'\}$ , die  $m(t)$  heiße.

e) Auf  $m(t)$  werde die Induktionsvoraussetzung angewandt. Es gibt um den Punkt  $t = 0$  eine Umgebung  $T_0$  in der — eventuell außer  $t = 0$  — kein Ausnahmepunkt für  $m(t)$  liegt. Wir zeigen: Ist  $t'$  kein Ausnahmepunkt für  $m(t)$  und liegt  $t'$  in  $T'$ , so ist auch  $M(t)$  reguläre Schar in  $t'$ .

Auf Grund von Hilfssatz 1 gibt es im  $(y)_{n-1}$ -Raum einen Zylinderbereich  $Y'_0$ , der in  $Y'$  liegt, und eine Umgebung  $T'_0$  von  $t'$ , derart, daß  $m(t)$  reguläre Schar für  $\{Y'_0, T'_0\}$  ist. Wir setzen  $Y_0 = \{Y'_0, K\}$ . Die lineare Transformation  $A^{-1}$  bilde  $Y_0$  auf den  $Z$ -Bereich  $X_0$  ab.  $T_0$  sei der Durchschnitt von  $T'_0$  und  $T'$ . Dann ist  $M(t)$  reguläre Schar für  $\{X_0, T_0\}$ .

Es genügt, die Definition II durchzulesen, um die Richtigkeit dieser Feststellung einzusehen. Lediglich auf den folgenden Punkt werde besonders hingewiesen: Für  $\{(y)_{n-1}, t\}$  aus  $\{Y'_0 - m(t), T_0\}$  besitzt das Polynom  $d$  lauter verschiedene Wurzeln, weil die analytische Mannigfaltigkeit  $D = 0$  zu  $m(t)$  gehört, wie Formel (5) zeigt. Diese Wurzeln liegen im Kreise  $K$ , weil  $\{Y'_0, T_0\}$  Teilbereich von  $\{Y', T'\}$  ist.

f) Zur Vollendung des Induktionsbeweises muß Satz 3 noch im Falle  $n = 1$  erhärtet werden. Jetzt ist  $M(t)$  die Lösungsgesamtheit des Systems:  $F_j(x_1, t) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ . Wenn für  $t = 0$  alle Funktionen  $F_j$  identisch verschwinden, ist  $t = 0$  Ausnahmepunkt für  $M(t)$ . Durch das beschriebene Eliminationsverfahren gelangen wir zu einer algebroiden Gleichung  $d(x_1/t) = 0$  und zu einem System  $Q_j(t) = 0$ . Ausnahmepunkte sind — eventuell außer  $t = 0$  — die Lösungen dieses Systems, die eine Menge von diskreten Punkten bilden.

### 3.4.

Als nächstes Problem ist zu untersuchen, welche Eigenschaften die Menge der Ausnahmepunkte der regulären Gesamtheiten von analytischen Mannigfaltigkeiten, die von mehreren komplexen Parametern abhängen, besitzt. Dazu wird die folgende Definition gebraucht:

*Definition IV.* Der Buchstabe  $t$  bezeichne den Punkt des topologischen Raumes  $T$ .  $T_0$  sei ein Gebiet von  $T$ .

Ein Satz enthalte eine Aussage, die sich auf die Punkte von  $T_0$  bezieht, d. h. die Aussage treffe für bestimmte Punkte aus  $T_0$  zu und für andere nicht. Wir führen die folgenden Ausdrucksweisen ein:

a) Die Aussage gilt für den allgemeinen Punkt von  $T_0$ , wenn folgende Feststellung richtig ist:  $t = t'$  sei ein beliebiger Punkt von  $T_0$ , und  $U(t')$  eine beliebige Umgebung von  $t'$ . Dann gebe es in  $U(t')$  einen Punkt  $t_0$  und zu  $t_0$  eine Umgebung  $U(t_0)$ , die zu  $T_0$  gehört, derart, daß die Aussage für alle  $t$  aus  $U(t_0)$  richtig ist.



b) Die Aussage gelte für den allgemeinen Punkt von  $T_0$ , vgl. a). Der Punkt  $t_0$  sei bezüglich der Aussage ein allgemeiner Punkt von  $T_0$ , wenn es eine Umgebung von  $t_0$   $U(t_0)$  gibt, derart, daß die Aussage für alle  $t$  aus  $U(t_0)$  richtig ist.

### 3.5.

**Satz 4.** Es bezeichne  $t$  ein System von  $k$  komplexen Parametern und  $T$  ein Gebiet des Parameterraumes.  $U$  sei eine Umgebung von 0.  $M(t)$  sei eine reguläre Gesamtheit analytischer Mannigfaltigkeiten in  $\{U, T\}$  (vgl. Definition I). Der allgemeine Punkt von  $T$  ist kein Ausnahmepunkt für  $M(t)$ .

**Beweis.** Der Beweis des Satzes geschieht mit der Methode des Beweises von Satz 3. Die reguläre Gesamtheit  $M(t)$  werde durch das Gleichungssystem:  $F_j((x)_n, t) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , gegeben.  $t = t'$  sei ein beliebiger Punkt aus  $T$ , und  $U(t')$  sei eine vorgegebene Umgebung von  $t'$ . Wenn eine Funktion  $F_j$  für  $t = t'$  identisch verschwindet, wählen wir in  $U(t')$  einen Punkt  $\bar{t}$  aus, in dem keine Funktion  $F_j$  identisch 0 ist. Dann werde auf die Funktionen  $F_j$  im Punkte  $\{0, \bar{t}\}$  — eventuell nach einer linearen Transformation der Variablen  $(x)_n$ , welche die Parameter  $t$  nicht berührt — der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz angewandt. Wir erhalten die Formeln (2) (vgl. Nr. 3.4.) und aus ihnen wie dort die Formeln (3), (4), (5). Die Induktionsvoraussetzung liefert jetzt das folgende Ergebnis: In beliebiger Umgebung von  $\bar{t}$ , also auch in  $U(t')$  gibt es einen Punkt  $t_0$  und eine Umgebung  $U(t_0)$  von  $t_0$ , derart, daß die reguläre Gesamtheit  $m(t)$  [vgl. Formel (5)], keine Ausnahmepunkte in  $U(t_0)$  hat. Der weitere Beweis ist wie im Abschnitt e) des Beweises von Satz 3. Lediglich über den Induktionsanfang ist noch folgendes zu bemerken: Hier bleibt das analytische Gleichungssystem  $Q_j(t) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, h_1$ , zurück. Die Richtigkeit von Satz 4 ist nun eine Folge davon, daß der allgemeine Punkt einer Umgebung von  $t'$  keine Lösung dieses Gleichungssystems ist.

## § 4. Die Diskriminantenfolge.

### 4.1.

Wir untersuchen einen Spezialfall der im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffe genauer.

$t$  bezeichne ein System von  $k$  komplexen Parametern. Die Funktion  $D((x)_n, t)$  sei analytisch im Punkte  $\{0, t_0\}$ . Unter gewissen Voraussetzungen kann, ausgehend von  $D$ , eine Folge von Funktionen konstruiert werden, die Diskriminantenfolge genannt werde.

Wir setzen  $D_0 = D((x)_n, t)$ , nehmen an, daß  $D_\nu$  ( $\nu \geq 0$ ) bereits konstruiert sei, und geben die Vorschrift für  $D_{\nu+1}$  an. Nach einer linearen Transformation der Variablen  $(x)_n$ ,  $(y)_n = A(x)_n$ , hänge  $D_\nu$  nur von den Variablen  $y_1, y_2, \dots, y_{n-\nu}$ , und  $t$  ab und sei analytisch im Punkte  $\{(y)_{n-\nu} = (0)_{n-\nu}, t_0\}$ .

a) Falls  $D_\nu((y)_{n-\nu}, t)$  für  $t = t_0$  identisch verschwindet, gebe es eine Funktion  $\varphi_\nu(t)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\varphi_\nu(t)$  sei analytisch im Punkte  $t_0$ .      2.  $\varphi_\nu(t_0) = 0$ .

3.  $D'_\nu((y)_{n-\nu}, t) = \frac{1}{\varphi_\nu(t)} D_\nu((y)_{n-\nu}, t)$  sei analytisch im Punkte  $\{(y)_{n-\nu} = (0)_{n-\nu}, t_0\}$ .

4.  $D'_\nu((y)_{n-\nu}, t)$  sei nicht identisch null für  $t = t_0$ .



b) Falls  $D_r((y)_{n-r}, t_0) \neq 0$  ist, werde  $\varphi_r(t) = 1$  gesetzt.

Auf die Funktion  $D'_r$  wenden wir im Punkte  $\{(y)_{n-r} = (0)_{n-r}, t_0\}$  den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz an. Die eventuell erforderliche Koordinatentransformation kann so gewählt werden, daß sie nur die Variablen  $(y)_{n-r}$  und nicht die Parameter  $t$  berührt; sie sei schon eingeschlossen in die Transformation  $(y)_n = A(x)_n$ , so daß sich die Einführung neuer Bezeichnungen für die Variablen erübrigt. Die Nullstellen von  $D'_r$  in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes  $\{(y)_{n-r} = (0)_{n-r}, t_0\}$  genügen der algebroiden Gleichung

$$G_r(y_{n-r}/(y)_{n-r-1}, t) = 0.$$

Nachdem das Polynom  $G_r$  von mehrfachen Faktoren befreit wurde, werde seine Diskriminante  $D_{r+1}((y)_{n-r-1}, t)$  berechnet.  $D_{r+1}$  ist sodann die Ausgangsfunktion für den nächsten Schritt. Die Folge der Pseudopolynome:

$$\varphi_r(t) \cdot G_r(y_{n-r}/(y)_{n-r-1}, t) = \Delta_r(y_{n-r}/(y)_{n-r-1}, t)$$

werde Diskriminantenfolge genannt.

#### 4.2.

Die Diskriminantenfolge bricht spätestens mit  $r = n$  ab.  $\Delta_n$  ist eine im Punkte  $t_0$  analytische Funktion von  $t$ . Die Diskriminantenfolge kann schon für  $l < n$  zu Ende sein, und zwar aus zwei Gründen:

1.  $D_l$  verschwindet identisch für  $t = t_0$ . Es gibt jedoch keine Funktion  $\varphi_l(t)$  mit den Eigenschaften 1. bis 4.
2.  $D_l \neq 0$  für  $\{(y)_{n-l} = (0)_{n-l}, t_0\}$ .

Wenn der erste Fall nicht eintritt, werde die Ausdrucksweise gebraucht: Die Diskriminantenfolge von  $D((x)_n, t)$  läßt sich im Punkte  $t_0$  herstellen.

#### 4.3.

Die Beweismethode der Sätze 3 und 4 führt in dem Spezialfall der durch  $D = 0$  bestimmten regulären Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten zur Diskriminantenfolge. Hieraus ergibt sich:

*Hilfssatz 2.* Es bezeichne  $t$  ein System von  $k$  komplexen Parametern und  $T$  ein Gebiet des Parameterraumes.  $U$  sei eine Umgebung von 0. Die Funktion  $D_0 = D((x)_n, t)$  sei analytisch in  $\{U, T\}$ . Die durch die Gleichung  $D = 0$  bestimmte Gesamtheit analytischer Mannigfaltigkeiten werde mit  $M(t)$  bezeichnet.

a) Die Diskriminantenfolge von  $D_0$  läßt sich im allgemeinen Punkte von  $T$  herstellen.

b) Falls die Anzahl der Parameter  $k = 1$  ist, läßt sich die Diskriminantenfolge in jedem Punkte von  $T$  herstellen.

c) Die Diskriminantenfolge lasse sich im Punkte  $t_0$  herstellen. Dann gibt es eine Umgebung  $U(t_0)$  von  $t_0$ , derart, daß in jedem Ausnahmepunkte von  $M(t)$  in  $U(t_0)$  eine Funktion der Diskriminantenfolge identisch verschwindet. Es sei  $\{X^*, T^*\}$  eine solche kleine Umgebung von  $\{0, t_0\}$ , in der 1. alle Funktionen der Diskriminantenfolge analytisch sind, 2. die bei der Anwendung des WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatzes zur Berechnung der Diskriminantenfolge auftretenden Einheitsfunktionen analytisch sind und nicht verschwinden. Dann hat  $U(t_0) = T^*$  die verlangte Eigenschaft.

#### 4.4.

*Satz 5.*  $t$  bezeichne ein System von  $k$  komplexen Parametern. Die Funktion  $D_0 = D((x)_n, t)$  sei analytisch im Punkte  $\{0, t_0\}$ . Die durch die Gleichung

$D = 0$  bestimmte reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten werde mit  $M(t)$  bezeichnet. Es lasse sich im Punkte  $t_0$  die Diskriminantenfolge der Funktion  $D_0$  herstellen (vgl. 4.1. und 4.2.), deren Funktionen

$$(1) \quad \Delta_r(y_{n-r}/(y)_{n-r-1}, t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, l, \quad (y)_n = A(x)_n,$$

seien. Im Punkte  $t = t'$  einer hinreichend kleinen Umgebung von  $t_0$  (nämlich aus  $U(t_0)$ , vgl. Hilfssatz 2 c)) verschwinde keine Funktion der Folge  $\Delta_r$  identisch. Durch Einsetzen von  $(y)_{n-r-1} = (0)_{n-r-1}$  in das Polynom  $\Delta_r$  entstehe das Polynom:

$$\Delta_r(y_{n-r}/(0)_{n-r-1}, t) = \Delta'_r(y_{n-r}/t).$$

Es seien:

$$(2) \quad \Delta'_r(y_{n-r}/t) = y_{n-r}^{\alpha_r} \Delta''_r(y_{n-r}/t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, l.$$

Dabei bedeute  $\Delta''_r$  ein Polynom von  $y_{n-r}$ , das im Punkte  $\{y_{n-r} = 0, t'\}$  nicht verschwindet.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine Umgebung  $T$  von  $t'$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $U$  eine beliebig vorgegebene Umgebung des Punktes  $0$ , so gibt es einen  $Z$ -Bereich  $X$ , der zu  $U$  gehört, derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar für  $\{X, T\}$  ist.

*Bemerkung.* Die über das Ergebnis von Hilfssatz 1 hinausgehende Aussage liegt darin, daß  $T$  unabhängig von der vorgeschriebenen Umgebung  $U$  ist.

*Beweis.* Der Beweis verwendet vollständige Induktion nach der Raumdimension  $n$ .

a) Der Induktionsanfang werde mit  $n = 0$  gemacht. Dann besteht die Diskriminantenfolge aus einer in  $t_0$  analytischen Funktion  $\Delta(t)$ , die nach den Voraussetzungen des Satzes in  $t' \neq 0$  ist. Die Aussage des Satzes reduziert sich auf die Feststellung, daß es eine Umgebung von  $t'$  gibt, in der  $\Delta(t)$  nicht verschwindet.

b) Der Satz sei für Dimensionen  $\leq n - 1$  bewiesen. Es sei  $\{X^*, T^*\}$  die im Hilfssatz 2 c) erwähnte Umgebung des Punktes  $\{0, t_0\}$ . Es sei:

$$\pi((y)_n, t) = \prod_{v=0}^l \Delta''_v(y_{n-v}/t).$$

Wie vorausgesetzt wird, ist die Funktion  $\pi((y)_n, t)$  im Punkte  $\{(y)_n = (0)_n, t'\}$  von 0 verschieden. Wir bestimmen eine Umgebung dieses Punktes:  $\{X_1, T_1\}$ , die in  $\{X^*, T^*\}$  liegt, und in deren abgeschlossener Hülle  $\pi$  nirgends verschwindet. Wir zeigen, daß die Umgebung  $T_1$  von  $t'$  die in Satz 5 verlangten Eigenschaften hat.

c) Im Durchschnitt von  $X_1$  mit der vorgegebenen Umgebung  $U$  von 0 liege ein  $Z$ -Bereich, der durch die lineare Transformation  $A$  auf den Zylinderbereich  $Y_1$  abgebildet werde.  $Y_1$  sei topologisches Produkt des in der  $y_n$ -Ebene liegenden Kreises  $K$  und des im  $(y)_{n-1}$ -Raum gelegenen Zylinderbereiches  $Y'_1$ . Aus (2) folgt:

$$\Delta'_0(y_n/t) = y_n^{\alpha_0} \cdot \Delta''_0(y_n/t).$$

Es werde zunächst  $\alpha_n > 0$  vorausgesetzt. Weil  $\Delta''_0(y_n/t)$  im Bereich  $\{K, T_1\}$  nicht verschwindet (vgl. b), besitzt  $\Delta_0$  für  $(y)_{n-1} = (0)_{n-1}$  und beliebiges  $t$  aus  $T_1$  in  $K$  die einzige Nullstelle  $y_n = 0$ .  $\Delta_0$  ist also für  $\{(y)_{n-1} = (0)_{n-1}, T_1\}$  auf dem Rande von  $K \neq 0$ . Daher gibt es eine Umgebung des Punktes  $(y)_{n-1} = (0)_{n-1}$ ,  $Y'_0 \subset Y'_1$ , derart, daß  $\Delta_0$  auch für  $\{(y)_{n-1}, t\}$  aus  $\{Y'_0, T_1\}$  auf dem Rande von  $K$  nicht verschwindet.

d) Die Gleichung  $\Delta_1(y_{n-1}/(y)_{n-2}, t) = 0$  bestimmt die reguläre Gesamtheit  $m(t)$ , auf welche die Induktionsvoraussetzung angewandt werde. Man beachte, daß das in b) angegebene Verfahren zur Bestimmung von  $T$  im Falle von  $m(t)$  ein Gebiet ergibt, das jedenfalls  $T_1$  enthält. Wir geben die Umgebung  $Y'_0$  des Punktes  $(y)_{n-1} = (0)_{n-1}$  vor. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es einen Zylinderbereich  $Y'$ , der in  $Y'_0$  liegt, derart, daß  $m(t)$  eine reguläre Schar für  $\{Y', T_1\}$  ist.

e) Das topologische Produkt von  $Y'$  und  $K$  sei der Zylinderbereich  $Y$ , der durch die lineare Transformation  $A^{-1}$  auf den  $Z$ -Bereich  $X$  abgebildet werde. Dann ist  $M(t)$  reguläre Schar für  $\{X, T_1\}$ . Da  $X$  Teilbereich der vorgeschriebenen Umgebung  $U$  ist, ist der Induktionsbeweis bis auf den vorhin ausgeschlossenen Fall  $\alpha_n = 0$  vollständig. Im Falle  $\alpha_n = 0$  ist  $\Delta_0 \neq 0$  auf  $\{0, T_1\}$ . Es gibt dann einen Bereich  $X$ , der zum Durchschnitt von  $X_1$  mit der vorgegebenen Umgebung  $U$  von 0 gehört, derart, daß  $\Delta_0 \neq 0$  ist für alle  $\{(x)_n, t\}$  aus  $\{X, T_1\}$ . Dann ist  $M(t)$  reguläre Schar für  $\{X, T_1\}$ .

## § 5. Monodromiegruppen algebroider Funktionen.

### 5.1.

*Definition V.*  $X$  sei ein Gebiet oder Bereich im Raum  $R_n$ .  $p(z/(x)_n)$  sei ein Polynom von  $z$  mit Koeffizienten, die in  $X$  analytisch sind; der höchste Koeffizient sei 1. Die Diskriminante  $D((x)_n)$  von  $p$  verschwinde nicht identisch.

Es sei  $(x^0)$  ein innerer Punkt von  $X$ , in dem  $D(x^0) \neq 0$  gilt. Ist der Grad von  $p$  gleich  $h$ , so existieren in  $(x^0)$   $h$  analytische Funktionen  $z_i(x)$ , die der Gleichung  $p = 0$  genügen. Diese  $h$ -Funktionen nennen wir Zweige der algebroiden Funktion  $z(x)$  im Punkte  $(x^0)$ . Ist  $C$  eine geschlossene Kurve, die von  $(x^0)$  ausgeht, im Innern von  $X$  verläuft und die Nullstellen von  $D(x)$  vermeidet, so können wir jeden Zweig  $z_i(x)$  auf  $C$  analytisch fortsetzen und kommen nach einem Umlauf um  $C$  in  $(x^0)$  eventuell mit einem anderen Zweige  $z_{i\omega}(x)$  an. Die Zweige  $z_i(x)$  erfahren also bei analytischer Fortsetzung um  $C$  herum eine Permutation. Ziehen wir alle möglichen von  $(x^0)$  ausgehenden, im Innern von  $X$  liegenden und die analytische Mannigfaltigkeit  $D(x) = 0$  nicht schneidenden Wege heran, so erhalten wir weitere Permutationen, die zusammen eine Gruppe bilden. Diese Permutationsgruppe ist vom Punkt  $(x^0) \in X$  unabhängig; sie heiße „Gruppe der algebroiden Funktion  $z(x)$  bezüglich  $X$ “ und werde mit  $G(X)$  bezeichnet.

### 5.2.

*Definition VI.* Es sei  $p(z/(x)_n)$  ein Polynom von  $z$  mit Koeffizienten, die im Punkte 0 analytisch sind; der höchste Koeffizient sei 1.

Es gibt eine Umgebung  $X_0$  von 0 mit folgender Eigenschaft: Ist  $X$  eine beliebige Umgebung von 0, die in  $X_0$  liegt, so stimmt  $G(X)$  mit  $G(X_0)$  überein. Alle hinreichend kleinen Umgebungen von 0 besitzen dieselbe Gruppe  $G(X)$ .  $G(X_0) = G$  heiße Monodromiegruppe der algebroiden Funktion  $z(x)$  im Punkte 0.

*Bemerkung.* Es gibt eine Umgebung  $U$  von 0, die sich so triangulieren läßt, daß die Mannigfaltigkeit  $D(x) = 0$  ( $D(x)$  = Diskriminante von  $p$ ) aus Simplexes der Triangulierung besteht [vgl. z. B. LEFSCHETZ-WHITEHEAD: On analytical complexes, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933)]. Die Gruppe  $G(X)$  wird unabhängig von  $X$ , wenn  $X$  zur simplizialen Umgebung von 0 im Komplex  $U$  gehört (vgl. SEIFERT-THRELFALL, Topologie, S. 120 u. 177).

## 5.3.

**Definition VII.** Es bezeichne  $t$  ein System von  $k$  komplexen Parametern und  $T$  ein Gebiet des Parameterraumes.

$$p(z/(x)_n, t) = p(z/x, t)$$

sei ein Polynom von  $z$  mit den folgenden Koeffizienteneigenschaften:

$U$  sei eine Umgebung von 0. Die Koeffizienten von  $p$  seien analytisch für  $\{x, t\}$  aus  $\{U, T\}$ . Der höchste Koeffizient sei 1. Die Gleichung  $p = 0$  bestimmt die ganz algebroiden Funktion  $z(x, t)$ , die von dem Parametersystem  $t$  abhängt. Die Diskriminante von  $p$  sei  $D(x, t)$ ; sie verschwinde nicht identisch. Durch die Gleichung  $D(x, t) = 0$  wird eine reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten (Definition I) in  $\{U, T\}$  bestimmt, die als Verzweigungsmannigfaltigkeit  $M(t)$  bezeichnet werde.

## 5.4.

**Satz 6.** Durch die algebroiden Gleichung  $p(z/x, t) = 0$  werde die ganz algebroiden Funktion  $z(x, t)$  definiert, die von dem Parametersystem  $t$  abhängt (Definition VII). Ihre Verzweigungsmannigfaltigkeit sei  $M(t)$ . Der Punkt  $t_0$  sei kein Ausnahmepunkt für  $M(t)$  (Definition III). Nach Definition III gibt es einen  $Z$ -Bereich  $X$  und ein Zylindergebiet  $T$ , das  $t_0$  enthält, derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar für  $\{X, T\}$  ist.  $t'$  sei ein beliebiger Punkt aus  $T$ . Die Gleichung  $p(z/x, t') = 0$  bestimme die ganz algebroiden Funktion  $z(x, t')$ . Die Gruppe  $G(X)$  der algebroiden Funktion  $z(x, t')$  ist unabhängig von  $t'$ , solange  $t'$  zu  $T$  gehört, und isomorph der Gruppe  $G(X, T)$  der algebroiden Funktion  $z(x, t)$  von  $n + k$  Variablen bezüglich des topologischen Produktes  $\{X, T\}$ .

**Beweis.** a) Die Diskriminante  $D(x, t)$  von  $p$  ist für  $t = t' \neq 0$ , da  $t'$  kein Ausnahmepunkt für  $M(t)$  ist. Ist  $(x^0)$  ein Punkt aus  $X$  mit  $D(x^0, t') \neq 0$ , so existieren im Punkte  $(x^0, t')$  Zweige der ganz algebroiden Funktion von  $n + k$  Variablen  $z(x, t)$ . Durch die Spezialisierung  $t = t'$  gehen sie in Zweige der ganz algebroiden Funktion von  $n$  Variablen  $z(x, t')$  über, und zwar wird so eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Zweigen dieser beiden algebroiden Funktionen hergestellt.

b)  $C$  sei eine geschlossene Kurve, die von  $x^0$  ausgeht, in dem Inneren von  $X$  verläuft und die Nullstellen der Funktion  $D(x, t')$  vermeidet. Der Kurve  $C$  entspricht im topologischen Produkt  $\{X, T\}$  eine Kurve  $C'$ , die zu dem Inneren von  $\{X, t'\}$  gehört. Setzen wir einen Zweig von  $z(x, t')$  längs  $C$  und den zugeordneten Zweig von  $z(x, t)$  längs  $C'$  analytisch fort, so kommen wir nach einem Umlauf im Punkte  $\{x^0, t'\}$  wieder mit Zweigen von  $z(x, t')$  bzw.  $z(x, t)$  an, die einander zugeordnet sind. Jede Permutation der Gruppe  $G(X)$  der algebroiden Funktion  $z(x, t')$  ist daher in der Gruppe  $G(X, T)$  der algebroiden Funktion  $z(x, t)$  enthalten.

c) Auch die Umkehrung dieses Ergebnisses gilt. Nach Satz 2 kann jede geschlossene Kurve  $C$ , die in dem Inneren von  $\{X, T\}$  verläuft und  $M(t)$  nicht schneidet, so auf eine Kurve  $\Gamma$  in dem Inneren von  $\{X, t'\}$  deformiert werden, daß die Zwischenmengen der Deformation zu  $M(t)$  punktfremd sind und in dem Inneren von  $\{X, T\}$  liegen. Geht bei analytischer Fortsetzung längs  $C$  der Zweig  $z_\mu(x, t)$  in den Zweig  $z_\nu(x, t)$  über, so bewirkt nach einem Satz über analytische Fortsetzung ein Umlauf um  $\Gamma$  dieselbe Vertauschung (vgl. OSGOOD: Lb., S. 77). Jede Permutation von  $G(X, T)$  gehört daher auch zu  $G(X)$ .

## 5.5.

**Satz 7.** Durch die algebroide Gleichung  $p(z/x, t) = 0$  werde die ganz algebroide Funktion  $z(x, t)$  definiert, die von dem Parametersystem  $t$  abhängt (vgl. Definition VII). Ihre Verzweigungsmannigfaltigkeit sei  $M(t)$ . Der Punkt  $t_0 \in T$  sei kein Ausnahmepunkt für  $M(t)$ . Die Monodromiegruppe der algebroiden Funktion von  $n+k$  Variablen  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t_0\}$  stimmt überein mit der Monodromiegruppe der algebroiden Funktion von  $n$  Variablen  $z(x, t_0)$ , die der Gleichung  $p(z/x, t_0) = 0$  genügt, im Punkte 0.

*Beweis.* Die Umgebungen  $X_0$  von 0 und  $T_0$  von  $t_0$  werden so klein gewählt, daß die Gruppe von  $z(x, t)$  bezüglich  $\{X_0, T_0\}$  gleich der Monodromiegruppe von  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t_0\}$  ist.  $X_1$  sei eine Umgebung von 0, die in  $X_0$  liege und so klein sei, daß die Gruppe von  $z(x, t_0)$  bezüglich  $X_1$  die Monodromiegruppe von  $z(x, t_0)$  im Punkte 0 ist. Nach Hilfssatz 1 gibt es einen  $Z$ -Bereich  $X'$ , der zu  $X_1$  gehört, und eine Umgebung  $T'$  von  $t_0$ , die in  $T_0$  liegt, derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar für  $\{X', T'\}$  ist. Dann folgt aus Satz 6  $G(X') = G(X' T')$ . Da  $X' \subset X_1 \subset X_0$  und  $T' \subset T_0$  gelten, stimmen  $G(X')$  bzw.  $G(X' T')$  mit den Monodromiegruppen überein, deren Gleichheit zu beweisen ist.

## 5.6.

Wir heben die folgende Anwendung dieses Satzes hervor: Transitivität der Monodromiegruppe der algebroiden Funktion  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t_0\}$  bedeutet, daß die algebroide Funktion  $z(x, t)$  in der Umgebung dieses Punktes monogen ist, oder daß das Pseudopolynom  $p(z/x, t)$  in diesem Punkte irreduzibel ist. Satz 7 zeigt: Wenn das Polynom  $p(z/x, t)$  in  $\{0, t_0\}$  irreduzibel ist und  $t_0$  kein Ausnahmepunkt der Verzweigungsmannigfaltigkeit  $M(t)$  ist, so entsteht durch die Spezialisierung  $t = t_0$  aus  $p$  ein im Punkte 0 irreduzibles Pseudopolynom  $p(z/x, t_0)$ .

## 5.7.

**Hilfssatz 3.** Durch die algebroide Gleichung  $p(z/x, t) = 0$  werde die ganz algebroide Funktion  $z(x, t)$  bestimmt, die von dem Parametersystem  $t$  abhängt. Ihre Verzweigungsmannigfaltigkeit sei  $M(t)$ .  $t = t_0$  sei kein Ausnahmepunkt für  $M(t)$ . Es gebe eine Umgebung  $T$  von  $t_0$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $U$  eine beliebig vorgegebene Umgebung des Punktes 0, so gebe es einen  $Z$ -Bereich  $X$ , der zu  $U$  gehört, derart, daß  $M(t)$  eine reguläre Schar für  $\{X, T\}$  ist. (Wie in Satz 5 ist  $T$  unabhängig von  $U$ .) Dann sind die Monodromiegruppen der algebroiden Funktionen von  $n$  Variablen  $z(x, t')$  im Punkte 0 isomorph, solange  $t'$  in  $T$  variiert. Isomorph zu diesen und untereinander sind auch die Monodromiegruppen der algebroiden Funktion  $z(x, t)$  in den Punkten  $\{0, t'\}$  für  $t'$  aus  $T$ .

*Beweis.* a)  $t_1$  und  $t_2$  seien beliebige Punkte aus  $T$ . Zu  $t_1$  gehöre die Umgebung  $X_1$  des Punktes 0, derart, daß  $G(X_1)$  die Monodromiegruppe der algebroiden Funktion  $z(x, t_1)$  in 0 ist. Entsprechend sei  $X_2$  dem Punkt  $t_2$  zugeordnet. Der  $Z$ -Bereich  $X'$  werde als Teilbereich von  $X_1$  und  $X_2$  so bestimmt, daß  $M(t)$  reguläre Schar für  $\{X', T\}$  ist. Auf Grund von Satz 6 gilt:  $G(X', T) = G(X')$  für alle Parameterspezialisierungen von  $t$  aus  $T$ , insbesondere also  $t_1$  und  $t_2$ . Für  $t_1$  und  $t_2$  ist  $G(X')$  jedoch die Monodromiegruppe im Punkte 0, da  $X'$  Teilbereich von  $X_1$  und  $X_2$  ist. Die letzte Behauptung des Satzes ist eine Folge von Satz 7.

b) Im Anschluß an den obigen Beweis werde das letzte Ergebnis des Hilfssatzes 3 erläutert. Die Punkte  $(x^1)$  und  $(x^2)$  aus  $X'$  seien so gewählt, daß die

Diskriminante des Polynoms  $p(z/x, t)$  in den Punkten  $P_1 = \{(x^1, t_1)\}$  und  $P_2 = \{(x^2, t_2)\}$  nicht verschwindet. Es sei  $z_v, v = 1, 2, \dots, h$ , ein System von Zweigen im Punkte  $P_1$ .  $\Gamma$  sei eine Kurve zwischen  $P_1$  und  $P_2$ , die im Innern von  $\{X', T\}$  verläuft und die Verzweigungsmannigfaltigkeit  $M(t)$  nicht schneidet. Durch analytische Fortsetzung von  $z_v$  längs  $\Gamma$  gehe  $z$  in den Zweig  $z'_v$  des Punktes  $P_2$  über,  $v = 1, 2, \dots, h$ . Ist nun  $C$  eine geschlossene Kurve, die von  $P_1$  ausgeht, in  $\{X', T\}$  verläuft und  $M(t)$  nicht schneidet, so entspricht ihr eine Permutation  $\mathfrak{P}$  der Zweige  $z_v$ , die ein Element der Monodromiegruppe  $G_1$  von  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t_1\}$  ist. Dieser Kurve  $C$  ordnen wir die geschlossene Kurve  $C' = \Gamma^{h-1} C \Gamma$  zu, die in  $P_2$  beginnt. Zu  $C'$  gehört dieselbe Permutation  $\mathfrak{P}$  der Zweige  $z'_v$ , so daß also  $\mathfrak{P}$  auch Element der Monodromiegruppe  $G_2$  von  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t_2\}$  ist. Die beiden Monodromiegruppen  $G_1$  und  $G_2$  stimmen also genau überein. Nun kann die Numerierung der Zweige im Punkte  $P_2$  von der Kurve  $\Gamma$  abhängen. Wählen wir eine andere Kurve  $\Gamma'$ , so erhalten wir als Monodromiegruppe von  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t_2\}$  eine Gruppe  $G'_2$ , die zu  $G_2$  konjugiert ist. In diesem Sinne ist das Wort „isomorph“ in der Formulierung von Hilfssatz 3 zu verstehen.

## 5.8.

Satz 8. Durch die algebroiden Gleichung  $p(z/x, t) = 0$  werde die ganz algebroiden Funktion  $z(x, t)$  definiert, die von dem Parametersystem  $t$  abhängt. Die Diskriminante von  $p$  sei  $D((x)_n, t)$ . Ausgehend von der Funktion  $D_0 = D((x)_n, t)$  lasse sich im Punkte  $t_0$  die Diskriminantenfolge bilden (vgl. § 4, Nr. 1 und 2).

$$(y)_n = A(x)_n, \Delta_v(y_{n-v}/(y)_{n-v-1}, t), v = 0, 1, 2, \dots, l.$$

Dann gibt es eine Umgebung  $T$  von  $t_0$  mit der folgenden Eigenschaft:

1.  $B_1$  sei die analytische Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte von  $T$ , in denen eine Funktion  $\Delta_v$  der Diskriminantenfolge identisch verschwindet.

2. Setzen wir  $(y)_{n-v-1} = (0)_{n-v-1}$  in die Funktion  $\Delta_v(y_{n-v}/(y)_{n-v-1}, t)$  der Diskriminantenfolge ein, so entstehe das Polynom:  $\Delta'_v(y_{n-v}/t)$ . Das Monom  $y_{n-v}^{e_v}$  werde so bestimmt, daß der Quotient:

$$\Delta'_v(y_{n-v}/t) \cdot 1/y_{n-v}^{e_v} = \Delta''_v(y_{n-v}/t)$$

ein Polynom von  $y_{n-v}$  ist, das  $\neq 0$  ist für  $y_{n-v} = 0$ . Setzen wir in  $\Delta''_v$  auch noch  $y_{n-v} = 0$ , so erhalten wir eine nicht identisch verschwindende Funktion von  $t$ :  $\psi_v(t)$ .  $B_2$  sei die analytische Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte von  $T$ , in denen eine Funktion  $\psi_v(t)$  verschwindet,  $v = 0, 1, 2, \dots, l$ .

Durch Herausnahme von  $B_1$  und  $B_2$  entstehe aus  $T$  das Restgebiet  $T' = T - (B_1 \cup B_2)$ .

Die Monodromiegruppen der aus  $z(x, t)$  durch Spezialisierungen  $t = t'$  aus  $T'$  gewonnenen algebroiden Funktionen  $z(x, t')$  im Punkte 0 sind isomorph. Die Monodromiegruppe von  $z(x, t')$  ( $t'$  aus  $T'$ ) stimmt überein mit der Monodromiegruppe der algebroiden Funktion von  $n + k$  Variablen  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t'\}$ . Isomorph sind also auch die Monodromiegruppen von  $z(x, t)$  in den Punkten  $\{0, t'\}$  für  $t'$  aus  $T'$ .

Beweis. a) Es sei  $\{X^*, T^*\}$  die im Hilfssatz 2 c), Nr. 4. 3., erwähnte Umgebung des Punktes  $\{0, t_0\}$ . Mit  $T = T^*$  gilt Satz 8.

b) Nach Hilfssatz 2 ist  $T'$  frei von Ausnahmepunkten der Verzweigungsmannigfaltigkeit  $D(x, t) = 0$ , denn  $B_1$  ist punktfremd zu  $T'$ .  $t'$  sei ein beliebiger Punkt von  $T'$ . Da  $t'$  nicht auf  $B_2$  liegt, ist die Funktion  $\Delta''_v(y_{n-v}/t) \neq 0$

im Punkte  $\{y_{n-v} = 0, t'\}$ , und zwar gilt das für  $v = 0, 1, 2, \dots, l$ . Aus dem Satz 5 und Hilfssatz 3 folgt, daß  $t'$  eine Umgebung  $T(t')$  besitzt, derart, daß die Monodromiegruppe der Funktion  $z(x, t^*)$  in 0 unabhängig von  $t^*$  ist, wenn  $t^*$  in  $T(t')$  variiert. Da  $T'$  offen und zusammenhängend ist, folgt hieraus Satz 8.

### 5.9.

Aus dem Hilfssatz 2 und Satz 8 ergeben sich:

**Folgerung 1.** Es bezeichne  $t$  einen einzigen komplexen Parameter und  $T$  einen beschränkten Bereich in der  $t$ -Ebene.  $U$  sei eine Umgebung von 0.  $p(z/x, t)$  sei ein Polynom von  $z$ , dessen Koeffizienten analytisch in  $\{U, T\}$  sind; der höchste Koeffizient sei 1. Durch  $p=0$  werde die ganz algebroiden Funktion  $z(x, t)$  bestimmt. Es gibt endlich viele Punkte in  $T$  mit folgender Eigenschaft: Entfernen wir sie aus dem Bereich  $T$ , so entstehe die Punktmenge  $T'$ . Die Monodromiegruppen von  $z(x, t)$  in den Punkten  $\{0, t'\}$  sind isomorph für  $t'$  aus  $T'$ . Die Monodromiegruppe von  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t'\}$  stimmt überein mit der Monodromiegruppe von  $z(x, t')$  im Punkte 0.

**Folgerung 2.** Es bezeichne  $t$  ein System von  $k$  komplexen Parametern und  $T$  ein Gebiet des Parameterraumes.  $U$  sei eine Umgebung von 0.  $p(z/x, t)$  sei ein Polynom von  $z$ , dessen Koeffizienten analytisch in  $\{U, T\}$  sind; der höchste Koeffizient sei 1. Durch  $p=0$  werde die ganz algebroiden Funktion  $z(x, t)$  bestimmt. Für den allgemeinen Punkt  $t'$  von  $T$  (Definition IV) ist die Monodromiegruppe von  $z(x, t)$  im Punkte  $\{0, t'\}$  unabhängig von  $t'$ . Sie stimmt überein mit der Monodromiegruppe der Funktion  $z(x, t')$  im Punkte 0.

## § 6. Monodromiegruppen analytischer Mannigfaltigkeiten.

### 6.1.

Die Resultate des § 5 können auf analytische Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden.

**Definition VIII.**  $X$  sei ein Gebiet oder Bereich im Raume  $R_n$ . Gegeben seien  $m$  algebroiden Gleichungen:

$$p_i(z_i/(x)_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$p_i$  sei ein Polynom von  $z_i$ , dessen Koeffizienten in  $X$  analytisch in den Variablen  $(x)_n$  sind; der höchste Koeffizient sei 1. Die Diskriminanten dieser Polynome seien nicht identisch 0. Es sei  $(x^0)$  ein innerer Punkt aus  $X$ , in dem keine Diskriminante verschwindet. In  $(x^0)$  existieren die Zweige der algebroiden Funktionen  $z_i(x)$ , die mit  $z_i^{(\lambda)}(x)$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, A_i$ , bezeichnet werden. Gegeben sei ferner eine Zuordnung der Zweige, d. h. eine endliche Anzahl von Reihen:  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Reihe  $Z_r$  enthalte von jeder algebroiden Funktion  $z_i(x)$  genau einen Zweig:

$$Z_r : z_1^{(r_1)}, z_2^{(r_2)}, \dots, z_m^{(r_m)}.$$

2. Bei simultaner analytischer Fortsetzung der  $m$  zu  $Z_r$  gehörenden Zweige auf einem beliebigen, von  $(x^0)$  ausgehenden geschlossenen Wege, der im Inneren von  $X$  verläuft und die Nullstellen der Diskriminanten der Polynome  $p_i$  vermeidet, sollen diese in Zweige übergehen, die eine Reihe  $Z_{r'}$  zusammensetzen.

3. Jeder Zweig  $z_i^{(\lambda)}(x)$  der algebroiden Funktion  $z_i(x)$  soll wenigstens einer Reihe  $Z_r$  angehören,  $i = 1, 2, \dots, m$ .



Die Reihen  $Z_n$  erfahren bei analytischer Fortsetzung auf geschlossenen Wegen, die im Innern von  $X$  verlaufen und die Nullstellen der Diskriminanten der Polynome  $p_i$  vermeiden, Permutationen, die zusammen eine Gruppe bilden, die Gruppe  $G(X)$  der analytischen Mannigfaltigkeit  $(z)_m$  bezüglich  $X$ . Wenn  $X$  eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes 0 ist, wird die Gruppe  $G(X)$  unabhängig von  $X$ . Sie heiße dann Monodromiegruppe der analytischen Mannigfaltigkeit  $(z)_m$  in 0.

## 6.2.

*Definition IX.* Es bezeichne  $t$  ein System von  $k$  komplexen Parametern und  $T$  ein Gebiet im Parameterraum.  $U$  sei eine Umgebung von 0. Für  $i = 1, 2, \dots, m$  sei  $p_i(z_i/(x)_n, t)$  ein Polynom von  $z_i$  mit Koeffizienten, die analytisch in  $\{U, T\}$  sind; der höchste Koeffizient sei 1. Die Diskriminante von  $p_i$  sei  $D_i(x, t)$ . Keine Funktion  $D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , verschwinde identisch. Durch die Gleichungen:  $p_i(z_i/(x)_n, t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , werden algebroiden Funktionen  $z_i(x, t)$  bestimmt. Ferner sei eine Zuordnung ihrer Zweige (Definition VIII) gegeben. Dadurch wird eine analytische Mannigfaltigkeit  $(z)_m(t)$  definiert, die von dem Parametersystem  $t$  abhängt.  $D(x, t)$  sei das Produkt der  $m$  Diskriminanten  $D_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Durch die Gleichung  $D(x, t) = 0$  wird eine reguläre Gesamtheit von analytischen Mannigfaltigkeiten  $M(t)$  in  $\{U, T\}$  bestimmt.  $M(t)$  heiße Verzweigungsmannigfaltigkeit der analytischen Mannigfaltigkeit  $(z)_m(t)$ .

## 6.3.

*Satz 9.* Die Sätze 6, 7, 8 und die Folgerungen 1 und 2 (Nr. 5.9.) behalten ihre Gültigkeit, wenn der Begriff „algebroiden Funktion  $z(x, t)$ “ durch den Begriff „analytische Mannigfaltigkeit  $(z)_m(t)$ “ ersetzt wird.

*Beweis.* Die Beweise jener Sätze gelten mit nur unwesentlichen Änderungen.

(Eingegangen am 22. Oktober 1951.)

# Über die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2}$ .

(Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn K. SCHRÖDER.)

Von

OTTO EMERSLEBEN in Berlin.

## Einleitung.

In einer Arbeit über das Problem der eingespannten rechteckigen Platte<sup>1)</sup> beweist und benutzt Herr K. SCHRÖDER den Hilfssatz<sup>2)</sup>

„Für jedes reelle nicht verschwindende  $c$  gilt

$$(54) \quad s = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu}{(\mu^2 + c^2)^2} < \frac{2}{3c^2}.$$

Tatsächlich wird sogar  $s < \frac{41}{64} \cdot \frac{1}{c^2}$  bewiesen. Herr SCHRÖDER fügt hinzu: „NB. Die Abschätzung (54) könnte natürlich noch etwas verbessert werden. Verf. kann aber nicht sehen, daß sogar  $\frac{1}{2c^2}$  eine obere Schranke der linken Seite von (54) ist, wie es von MATHIEU, allerdings ohne Beweis, behauptet wird.“

Wir werden hierzu zeigen, daß für

$$(1) \quad s(c) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2}$$

in der Tat über die Abschätzung (54) von Herrn SCHRÖDER hinaus

$$(2) \quad s(c) < \frac{1}{2c^2}$$

gilt, die Behauptung von MATHIEU also bewiesen werden kann<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Erster Teil: Math. Ann. 121, 247—326 (1949).

<sup>2)</sup> a. a. O.<sup>1)</sup>, 258—260.

<sup>3)</sup> MATHIEU, E.: *Traité de physique mathématique. VI—VII: Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris 1890; sec. partie. Chap. X.

Zusatz 23. 10. 1951:

Der Verfasser dieses Werkes, das mir erst jetzt zugänglich geworden ist, bemüht sich, Kap. X, Ziff. 10, S. 155—156, durch geometrischen Vergleich des Flächeninhalts einer Treppenkurve mit der von einer analytischen Funktion begrenzten Fläche zu beweisen, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2} < \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + c^2)^2} dx = \frac{1}{2c^2}.$$

Hinsichtlich der kleinen Flächenstücke, die zu der von der analytischen Kurve begrenzten Fläche, aber nicht zu der von der Treppenkurve begrenzten Fläche gehören, begnügt er sich mit der Bemerkung, es sei leicht einzusehen, daß ihr Flächeninhalt größer sei als der Flächeninhalt jener kleinen Flächenstücke, die umgekehrt innerhalb der Treppenkurve aber außerhalb der analytischen Kurve liegen. Man ersieht hieraus nicht, ob MATHIEU bei diesem nicht mitgeteilten Teil seines Beweises berücksichtigt hat, daß die erwähnte analytische Kurve (d. h. der Integrand) zwar zunächst konvex von oben, dann jedoch konvex von unten ist.

Zugleich zeigt sich aber, daß

$$(3) \quad s(c) = O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

die wahre Größenordnung für über alle Grenzen wachsendes  $c^2$  ist und daß auch die Konstante  $1/2$  in (2) nicht verbessert werden kann, da

$$(4) \quad s(c) = \frac{1}{2c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

nämlich

$$(5) \quad 0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c^2} - s(c) < \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{c^4}.$$

Es liegt nahe, sich zum Beweis der EULER-MACLAURIN-Summenformel zu bedienen<sup>5a)</sup> — eventuell unter Benutzung bekannter Eigenschaften der Ableitung der  $\Psi$ -Funktion, auf die man hierbei leicht gelangt<sup>5)</sup>.

Wir werden uns einer einfachen Abschätzung bedienen, die den ersten Gliedern der genannten Summenformel nahekommt und deren Voraussetzungen sich leicht erfüllen lassen durch spezielle Wahl einer über alle Grenzen wachsende Wertefolge der  $c > 0$ , nämlich durch ganzzahlige  $c$ . Für alle anderen  $c > 0$  werden wir mittels einer Monotonieüberlegung das Resultat ergänzen und das etwa Gleichung (4) entsprechende Ergebnis auf Gleichung (5) verschärfen.

#### Abschätzung für ganzzahlige $c$ .

Um die endliche Summe  $s(c)$  mit Fehlerabschätzung durch ein Integral zu ersetzen, gehe ich von dem leicht beweisbaren *Hilfssatz* aus, der etwa (nämlich Ersetzung des Faktors  $1/12$  durch nur  $1/8$ ) die ersten Glieder der EULER-MACLAURINSchen Summenformel umfaßt:

Sei  $a_k$  ( $m \leq k \leq n$ ,  $k, m$  und  $n$  ganz) eine unter Ausschluß der Gleichheit konvexe Folge reeller Zahlen. Ferner sei zu diesen Werten  $a_k$  eine Funktion  $a(x)$  so gewählt, daß

1. in  $m \leq x \leq n$   $a(x)$  definiert, reell und stetig ist (an den Enden des Intervalls genügt einseitige Stetigkeit nach innen zu),

2. für ganzzahlige  $x = k$   $a(k) = a_k$ .

<sup>4)</sup> Unmittelbar nach Kenntnisnahme der Arbeit a. a. O.<sup>1)</sup> machte ich Herrn SCHRÖDER mit Schreiben vom 2. 5. 1950 u. a. auf den im folgenden Abschnitt durchgeführten Beweis der Gleichung (4) zunächst für ganzzahlige  $c$  aufmerksam und setzte ihn daraufhin mündlich von dem weiteren Ergebnis in Kenntnis.

<sup>5a)</sup> Zusatz bei der Korrektur: Diesen Weg ist inzwischen L. BERG: Über eine Abschätzung von MATHIEU, Math. Nachr. 7, 257—259 (1952) gegangen.

<sup>5)</sup> Nach JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl., Leipzig 1948, S. 20, soll für  $|z| > 1$ , falls nicht  $z < 0$ ,

$$\Psi'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} \pm \dots \text{sein,}$$

wobei als Koeffizienten offenbar die BERNOULLISchen Zahlen auftreten. Dabei ist  $\Psi(x)$  als logarithmische Ableitung der  $\Pi$ -Funktion (Fakultät) definiert,  $\Psi'(z) = \sum_{v=1}^{\infty} (v+z)^{-2}$ .

Die Darstellung bei JAHNKE-EMDE konvergiert aber für keinen noch so großen Wert von  $z$ , da die Glieder nicht gegen 0 streben. Für rein imaginäres Argument  $z = \pm ic$  haben die Glieder vom dritten an konstantes Vorzeichen und ergeben daher zusammen eine divergente Reihe, deren Imaginärteil über alle Grenzen wächst, während die Summe konvergieren müßte. Für  $2c^2 s(c) = \frac{i}{2} c [\Psi'(ic) - \Psi'(-ic)]$  dürfen daher aus dieser Darstellung die an sich möglichen Schlüsse des hier interessierenden Inhaltes nicht ohne weiteres gezogen werden.

3. im ganzen Intervall  $m \leq x \leq n$  auch  $a(x)$  konvex ist und

4. an den Enden des Intervalls  $a(x)$ , mindestens einseitig zum Intervallinnern zu, differenzierbar ist.

Bei  $\sum_{(m)}^{(n)} a_k$  bedeuten die Klammern um die beiden Integrationsgrenzen, daß das betreffende (erste bzw. letzte) Glied der Summe nur mit dem Gewicht  $1/2$  zu nehmen ist.

Unter diesen Voraussetzungen liegt der Wert der Summe

$$(6) \quad \sum_{(m)}^{(n)} a_k \text{ zwischen den Werten von } \int_m^n a(x) dx \text{ und} \\ \int_m^n a(x) dx + \frac{1}{8} [a'(n) - a'(m)],$$

nämlich:

falls  $a(x)$  und daher die  $a_k$  konvex von oben sind:

$$(6a) \quad \int_m^n a(x) dx - \frac{1}{8} [a'(m) - a'(n)] \leq \sum_{(m)}^{(n)} a_k \leq \int_m^n a(x) dx,$$

falls  $a(x)$  und daher die  $a_k$  konvex von unten sind:

$$(6b) \quad \int_m^n a(x) dx \leq \sum_{(m)}^{(n)} a_k \leq \int_m^n a(x) dx + \frac{1}{8} [a'(n) - a'(m)]^{(6)}.$$

Um hiermit  $s(c) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2}$  abschätzen zu können, setze ich

$$(7) \quad a(x) = \frac{x}{(x^2 + c^2)^2}.$$

Daher ist  $\int a(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + c^2}$ , die Ableitungen nach der Variablen  $x$

$$a'(x) = \frac{c^2 - 3x^2}{(x^2 + c^2)^3} \text{ und } a''(x) = \frac{12x(x^2 - c^2)}{(x^2 + c^2)^4}.$$

Die Funktion  $a(x)$  hat also keine Wendepunkte außer (allenfalls) in  $x = 0$  und  $x = \pm c$ .  $a(x)$  ist konvex von oben in  $0 < x < |c|$ , konvex von unten in  $x > |c|$ .

<sup>6)</sup> Zum Beweis des Hilfssatzes vgl. Ziff. 2 des Anhangs (S. 177—180) von O. EMERSEN: Das Selbstpotential einer Kugel aus gleichschweren Massenpunkten, die sich in den Gitterpunkten eines kubischen Raumgitters befinden, GERLANDS Beiträge zur Geophysik 61, 163—180 (1950). Dort ist, S. 177, auf der rechten Seite von Gl. (5) die eckige Klammer durch den absoluten Betrag zu ersetzen. — Mit den geringen oben ausgesprochenen Voraussetzungen lassen sich die Schranken von (6a) bzw. (6b) nicht verschärfen.

a) Sei  $a_k$  irgendeine konvexe Folge, so daß gemäß Voraussetzung 2 für ganzzahlige  $k$   $a(k) = a_k$ . Wenn  $a(x)$  so gewählt wird, daß diese Funktion dazwischen ( $k \leq x \leq k+1$ ) geradlinig verläuft, so gilt für diesen Polygonzug das Gleichheitszeichen bei der allein durch das Integral gegebenen Schranke von (6) — also bei der oberen Schranke von (6a) und der unteren Schranke von (6b) je nachdem, ob die  $a_k$  konvex von oben oder von unten sind.

b) Auch der Faktor  $\frac{1}{8}$  bei dem die Differenz der Ableitungen enthaltenden Glied läßt sich nicht ohne weitere Voraussetzungen durch den Faktor  $\frac{1}{2}$  der EULER-MACLAURINSchen Summenformel ersetzen. Man gehe aus von einer konvexen Wertefolge, gegeben durch die Werte in den Intervallmitten  $a(k + \frac{1}{2})$ , mit ganzzahligem  $k$  zwischen  $m$  und  $n-1$ , und die Endwerte  $a(m)$  und  $a(n)$ . Dazwischen ( $m \leq x \leq m + \frac{1}{2}$ ,  $k - \frac{1}{2} \leq x \leq k + \frac{1}{2}$  mit  $m+1 \leq k \leq n-1$  und  $n - \frac{1}{2} \leq x \leq n$ ) lasse man  $a(x)$  geradlinig verlaufen. Mit dem durch diesen Polygonzug bestimmten Verlauf von  $a(x)$  und den daraus folgenden Werten von  $a_k = a(k)$  gilt bei der unteren Schranke von (6a) bzw. der oberen von (6b) mit dem Faktor  $\frac{1}{8}$  des Gliedes der Ableitungsdifferenzen das Gleichheitszeichen.

Um auf diese beiden Intervalle, also auf  $\sum_{(0)}^{(c)} a_k$  bzw.  $\sum_{(c)}^{\infty} a_k$  die Abschätzungen (6a) bzw. (6b) ohne weiteres anwenden zu können, setze ich zunächst voraus, daß  $c \neq 0$  ganzzahlig sei, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, daß  $c$  eine natürliche Zahl sei.

Daher erhält man nach (6a)

$$(8a) \quad \frac{1}{4c^3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{c^4} \leq \sum_{(0)}^{(c)} a_k \leq \frac{1}{4c^3}$$

und nach (6b)

$$(8b) \quad \frac{1}{4c^3} \leq \sum_{(c)}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{4c^3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4c^4};$$

zusammen ergibt sich also, daß

$$(8) \quad \frac{1}{2c^3} - \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{c^4} \leq \sum_{(0)}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{2c^3} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{c^4},$$

zunächst wenn  $c$  irgendeine natürliche Zahl ist. Von dieser Beschränkung auf ganzzahlige  $c$  ausgehend, könnte man durch eine zusätzliche Fehlerabschätzung eine Abschätzung von  $s(c)$  für beliebige  $c \geq 0$  erhalten. Statt dessen werden wir jedoch eine Monotonieeigenschaft anwenden, nämlich daß

(9) für alle  $c \geq 0$   $c^2 \cdot s(c)$  eine monoton wachsende Funktion von  $c$  ist („starke“ Monotonie: unter Ausschluß der Gleichheit).

Aus (8) folgt für ganzzahlige  $c > 0$ :

$$c^2 \cdot s(c) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{c^2}.$$

Da aber diese obere Schranke auf der rechten Seite wegen des letzten Gliedes mit wachsendem  $c$  monoton fällt, asymptotisch gegen  $1/2$ , würde aus dem monotonen Wachstum von  $c^2 \cdot s(c)$

$$(9a) \quad c^2 \cdot s(c) \leq \frac{1}{2} \quad \text{folgen,}$$

bei starker Monotonie sogar

$$(9b) \quad c^2 \cdot s(c) < \frac{1}{2},$$

insgesamt also wegen (8) die Abschätzung<sup>7)</sup>

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{c^2} \leq c^2 \cdot s(c) < \frac{1}{2},$$

neben der für genügend kleine  $c \geq 0$  noch die triviale aus der Reihendarstellung (1) folgende Abschätzung mit Hilfe der RIEMANNschen Zetafunktion  $\zeta(s)$

$$0 \leq c^2 \cdot s(c) \leq c^2 \cdot \zeta(3)$$

zweckmäßig sein kann. Dabei gelten die Gleichheitszeichen nur für  $c = 0$ .

<sup>7)</sup> Es wird keine Mühe machen, zugleich die „starke“ Monotonie von  $c^2 s(c)$  zu beweisen. Sonst würde aus (9a), auch wenn nur schwache Monotonie angenommen würde, bereits direkt (9b) folgen; denn wenn  $c^2 s(c) = 1/2$  wäre für irgendein  $c = c_0 > 0$ , also wegen der Monotonie auch für alle  $c \geq c_0$ , würde die analytische Funktion  $c^2 s(c)$  im Innern ihres Regularitätsgebietes streckenweise konstant, also überhaupt konstant sein, was offenbar nicht der Fall ist.

**Beweis der Monotonie von  $c^2 \cdot s(c)$ .**

Zum Beweis der Monotonieeigenschaft (9) wird eine Integraldarstellung von  $s(c)$  verwandt. Zu diesem Zweck zerlege ich:

$$(10) \quad a_k = \frac{k}{(k^2+c^2)^2} = \frac{i}{4c} \left[ \frac{1}{(k+ic)^2} - \frac{1}{(k-ic)^2} \right] \quad (k > 0).$$

Bei dem EULERSchen Integral 2. Gattung in der zweiparametrischen Form

$$(11) \quad \frac{\Gamma(s)}{u^s} = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-ux} dx$$

beschränken wir uns auf ganzzahlige  $s > 0$ , so daß  $u^s$  eindeutig ist. Gleichung (11) gilt auch, wenn nur  $\Re u > 0$  ist. Mit  $u = k + i \cdot c$  erhält man:

$$\frac{\Gamma(s)}{(k+ic)^s} = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-kx-icx} dx,$$

auch gültig, wenn  $c$  durch  $-c$  ersetzt wird, also

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \left[ \frac{1}{(k+ic)^s} - \frac{1}{(k-ic)^s} \right] &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-kx} (e^{-icx} - e^{icx}) dx \\ &= -2i \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-kx} \sin cx dx, \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{(k+ic)^s} - \frac{1}{(k-ic)^s} \right] &= -2i \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \sin cx \frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} dx \\ &= -2i \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} (1-e^{-nx}) \sin cx dx. \end{aligned}$$

Speziell für  $n \rightarrow \infty$  und  $s = 2$  erhält man wegen (10)

$$(12) \quad s(c) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2c} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1} \sin cx dx.$$

Zum Beweis der Eigenschaft (9) schreiben wir nach (12)

$$c^2 s(c) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1} c \sin cx dx,$$

also

$$\begin{aligned} (13) \quad \frac{d[c^2 s(c)]}{dc} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1} (\sin cx + c^2 \cos cx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1} \sin cx dx + \frac{c^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1} \cos cx dx. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist *positiv*, da der Integrand aus dem Produkt einer positiven, monoton abnehmenden Funktion  $\frac{x}{e^x-1}$  (starke Monotonie!) mit einer Funktion  $(\sin cx)$  besteht, deren Verlauf im Integrationsweg derart in Intervalle zerlegt werden kann (nämlich die Periodizitätsintervalle), daß in jedem dieser Intervalle die Funktion in der ersten Hälfte des Intervalls (mit Ausnahme der Endpunkte) nur positive Werte annimmt, in der zweiten Hälfte nur negative Werte mit dem Betrage nach gleichem Funktionsverlauf

<sup>a)</sup> ARENDT G.: G. LEJEUNE-DIRICHLET's Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Braunschweig 1904, S. 148—152 u. 218 bis 219.

wie im positiven Halbintervall. (Übrigens ist der erste Summand der rechten Seite der letzten Gleichung wegen (12) gleich  $c \cdot s(c)$ , also wegen der Reihendarstellung (1) positiv.)

Auch das zweite Integral  $\int_0^{\frac{l}{4}} \frac{x}{e^x - 1} \cos cx \, dx$  und daher der zweite Summand der letzten Gleichung ist positiv, da der Integrand das Produkt eines positiven, monoton abnehmenden von unten *konvexen* („stark“ konvexen) Gliedes  $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  mit der Funktion  $\cos cx$  ist, also einer Funktion  $f(x)$ , deren Verlauf im Integrationsweg in einzelne Intervalle  $0 \leq x \leq l$  zerlegt werden kann (die Periodizitätsintervalle), in denen je die Funktion im Innern des ersten und vierten Viertels dieses Intervalles nur positive Werte annimmt und im Innern des zweiten und dritten Viertels nur negative mit derartiger Symmetrie, daß für alle  $0 < \xi < \frac{l}{4}$

$$(14) \quad f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) = -f\left(\frac{l}{4} + \xi\right) = -f\left(\frac{3}{4}l - \xi\right) = f\left(\frac{3}{4}l + \xi\right) > 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist nachzuweisen, daß

$$\int_0^l g(x) f(x) \, dx > 0 \quad \text{ist.}$$

Weil  $g(x)$  konvex von unten ist, ist

$$g\left(\frac{l}{4} - \xi\right) - g\left(\frac{l}{4} + \xi\right) > g\left(\frac{3}{4}l - \xi\right) - g\left(\frac{3}{4}l + \xi\right).$$

Wegen  $f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) > 0$  ist auch

$$0 < f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) g\left(\frac{l}{4} - \xi\right) - f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) g\left(\frac{l}{4} + \xi\right) - f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) g\left(\frac{3}{4}l - \xi\right) + \\ + f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) g\left(\frac{3}{4}l + \xi\right),$$

wegen (14)

$$= f\left(\frac{l}{4} - \xi\right) g\left(\frac{l}{4} - \xi\right) + f\left(\frac{l}{4} + \xi\right) g\left(\frac{l}{4} + \xi\right) + \\ + f\left(\frac{3}{4}l - \xi\right) g\left(\frac{3}{4}l - \xi\right) + f\left(\frac{3}{4}l + \xi\right) g\left(\frac{3}{4}l + \xi\right).$$

Da dies für alle  $0 < \xi < \frac{l}{4}$  gilt, ist hiernach

$$\int_0^l f(x) g(x) \, dx = \int_0^{\frac{l}{4}} \left[ f(x) g(x) + f\left(\frac{l}{4} + x\right) g\left(\frac{l}{4} + x\right) + f\left(\frac{l}{2} + x\right) g\left(\frac{l}{2} + x\right) + \right. \\ \left. + f\left(\frac{3}{4}l + x\right) g\left(\frac{3}{4}l + x\right) \right] dx > 0.$$

Wir wenden das Ergebnis mit  $l = \frac{2\pi}{c} \operatorname{an}^*)$  auf  $f(x) = \cos(cx + 2\pi n)$ , wo  $n \geq 0$  eine ganze Zahl ist und  $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ . Da

\*) Von der Konvexität von  $g(x)$ , die der Einfachheit halber uneingeschränkt vorausgesetzt wurde, ist jeweils nur in den Intervallen von der Länge  $l$  Gebrauch gemacht worden.



$$g'(x) = \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2} = - \frac{\sum_{k=2}^{\infty} x^k \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right)}{(e^x - 1)^2} < 0 \text{ für } x \geq 0 \text{ (mit } g'(0) = -\tfrac{1}{2})$$

und

$$g''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (x - 2e^x + 2 + x e^x) \\ = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot \sum_{k=3}^{\infty} x^k \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{2}{k!} \right) > 0 \text{ für } x \geq 0$$

(mit  $g''(0) = \frac{1}{6}$ ),

ist die Funktion  $\frac{x}{e^x - 1}$  im ganzen Integrationsintervall *konvex von unten*.

Daher ist für alle  $c \geq 0$   $\int \frac{x}{e^x - 1} \cos cx \, dx > 0$ ,

also nach (13)  $\frac{d}{dc} [c^2 s(c)] > 0$ , d. h.:

$c^2 \cdot s(c)$  ist für alle  $c \geq 0$  eine monoton steigende Funktion des Parameters  $c$ .

Danach sind die aus (9) gezogenen Schlüsse gerechtfertigt.

#### Zusammenfassung.

Über den Verlauf von  $s(c)$  als Funktion von  $c^2 \geq 0$  ergibt sich daher u. a.:  
 Von  $s(0) = \zeta(3)$  fällt  $s(c)$  monoton, mit  $\frac{d s(c)}{d c^2} = -2 \zeta(5)$  für  $c = 0$ , ständig  
 konvex von unten, bleibt stets unter der Hyperbel  $y = \frac{1}{2c^2}$ , der sich  $s(c)$   
 mit über alle Grenzen wachsendem  $c$  asymptotisch nähert. Dabei ist stets

$$s(c) > \frac{1}{2c^2} - \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{c^4}.$$

(Eingegangen am 18. Oktober 1951.)

# Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen.

Von

FRIEDRICH SOMMER in Münster (Westf.).

**1. Einleitung.** Die Übertragung der CAUCHYSchen Integralformel auf Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen läßt sich durch mehrfache Anwendung der Integralformel für eine Veränderliche in einfacher Weise durchführen: In den Ebenen der  $n$  komplexen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  seien jeweils abgeschlossene Gebiete  $D_1, D_2, \dots, D_n$  mit stückweise glatten Rändern  $C_1, C_2, \dots, C_n$  gegeben. Die Funktion  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  sei im abgeschlossenen Polyzylinder  $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  regulär. Dann gilt

$$(1) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_n} \dots \int_{C_2} \int_{C_1} f(\zeta) \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n,$$

und zwar ergibt sich der Wert  $f(z)$  im Innern von  $D$  und der Wert Null für alle Punkte außerhalb von  $D$ , soweit sie auf keiner der  $(2n - 1)$ -dimensionalen Hyperflächen  $H_k: z_k \in C_k$  liegen. Letztere sind ausgeschlossen, weil für sie das Integral nicht existiert. Dabei wird in vorstehender Formel über die  $n$ -dimensionale Bestimmungsfläche  $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$  von  $D$  in der Weise integriert, daß die Gebiete  $D_1, D_2, \dots, D_n$  der Reihe nach im positiven Sinne umlaufen werden.

Während hier die Funktion  $f(z)$  im Polyzylinder  $D$  durch ihre Werte auf einer  $n$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des  $(2n - 1)$ -dimensionalen Randes von  $D$  dargestellt ist, wird in der Integralformel von MARTINELLI<sup>1)</sup> die CAUCHYSche Formel dahingehend verallgemeinert, daß das Integral über den vollen  $(2n - 1)$ -dimensionalen Rand eines  $2n$ -dimensionalen Gebietes erstreckt wird, und dabei braucht das Gebiet keine spezielle Gestalt wie bei Formel (1) zu haben:  $f(z)$  sei im abgeschlossenen und beschränkten Gebiet  $G$  mit dem stückweise glatten Rand  $R$  regulär. Dann gilt im Innern bzw. im Äußeren von  $G$  die Beziehung

$$(2) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_R \frac{f(\zeta)}{(|\zeta_1 - z_1|^2 + \dots + |\zeta_n - z_n|^2)^n} \times \\ \times \sum_{e=1}^n (\bar{\zeta}_e - \bar{z}_e) d\bar{\zeta}_1 d\bar{\zeta}_2 \dots [d\bar{\zeta}_e] d\zeta_e \dots d\bar{\zeta}_n d\zeta_n,$$

wobei das eingeklammerte Glied  $[d\bar{\zeta}_e]$  jeweils auszulassen ist. Zum Beweis dieser Formel bemerkt man, daß der Integrand ein vollständiges Differential ist, und daher ist nach dem STOKESSchen Integralsatz das Integral (2) gleich dem Integral über eine hinreichend kleine Sphäre  $|\zeta_1 - z_1|^2 + \dots + |\zeta_n - z_n|^2 = r^2$ . Letzteres läßt sich durch den Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  elementar auswerten, und man erhält dabei den Wert  $f(z)$  bzw. 0.

<sup>1)</sup> MARTINELLI, E.: Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse. Memorie R. Acc. d'Italia **9**, 269 (1938). — Unabhängig von MARTINELLI wurde die Formel auch abgeleitet in S. BOCHNER: Analytic and meromorphic Continuation by Means of GREEN's formula. Ann. of Math. **44**, 652 (1943).

Aus Formel (2) folgen sofort weitere auf MARTINELLI<sup>2)</sup> zurückgehende Integralformeln für spezielle Gebiete. Sei z. B.  $G$  das direkte Produkt mehrerer Gebiete  $G_1, G_2, \dots, G_p$ , wobei jedes  $G_v$  ein Gebiet im Raume der Veränderlichen  $z_{k_{v-1}+1}, \dots, z_{k_v}$  mit dem stückweise glatten Rand  $R_v$  ist ( $k_0 = 0, k_p = n$ ), so erhält man durch wiederholte Anwendung der Formel (2)

$$(3) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\prod_{v=1}^p (k_v - k_{v-1} - 1)!}{(2\pi i)^n} \int_{R_p} \dots \int_{R_1} \int_{R_1} f(\zeta) \times \\ \times \prod_{v=1}^p \frac{\sum_{e_v=k_{v-1}+1}^{k_v} (\bar{\zeta}_{e_v} - \bar{z}_{e_v}) d\bar{\zeta}_{k_{v-1}+1} d\zeta_{k_{v-1}+1} \dots [d\bar{\zeta}_{e_v}] d\zeta_{e_v} \dots d\bar{\zeta}_{k_v} d\zeta_{k_v}}{(|\zeta_{k_{v-1}+1} - z_{k_{v-1}+1}|^2 + \dots + |\zeta_{k_v} - z_{k_v}|^2)^{k_v - k_{v-1}}},$$

wobei der Wert  $f(z)$  im Innern von  $G$  gilt, während sich für die Punkte außerhalb von  $G$ , soweit sie auf keiner der  $(2n-1)$ -dimensionalen Hyperflächen  $H_v: z_{k_{v-1}+1}, \dots, z_{k_v} \in R_v$  liegen, der Wert Null ergibt. Dabei wird über die  $(2n-p)$ -dimensionale „Bestimmungsfläche“  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_p$  von  $G$  integriert, also für  $p > 1$  nicht über den vollen Rand des Gebietes  $G$ . Man erkennt, daß diese Formel für  $p = n$  und  $p = 1$  die Formeln (1) und (2) als Spezialfälle enthält.

Da in den vorstehenden Beziehungen der Integrand jeweils ein vollständiges Differential ist, so ändert sich ein Integral nicht, wenn man die Integrationsfläche in dem Gebiet, in dem der Integrand als Funktion der  $\zeta$  und  $\bar{\zeta}$  nicht singulär wird, durch eine in diesem Gebiet homologe Fläche ersetzt. Allerdings gelten dann bei festgehaltener Integrationsfläche die Formeln unter Umständen nur noch in einer hinreichend kleinen Umgebung eines betrachteten Punktes.

Eine ganz andere Struktur als die hier genannten Formeln hat die von A. WEIL<sup>3)</sup> angegebene Integralformel [Formel (16)]. Sie ist für analytische Polyeder aufgestellt, und bei ihr wird über die  $n$ -dimensionalen Kanten dieses Polyeders integriert. Dabei gehen die das Polyeder definierenden Gleichungen explizit in die Integralformel ein. Sie erscheint daher als Verallgemeinerung der Formel (1) auf wesentlich allgemeinere Gebiete, ohne daß dadurch die Dimension der Integrationsmannigfaltigkeit erhöht wird. An dieser Stelle sei auch auf die zahlreichen Integralformeln von S. BERGMAN<sup>4)</sup> hingewiesen, die mit den oben genannten Formeln teilweise eng verwandt sind.

<sup>2)</sup> MARTINELLI, E.: Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse. Pontificia Academia Scientiarum Acta 9, 235 (1946). — Die bei MARTINELLI über allgemeinere Integrationsflächen erstreckten und anders geschriebenen Formeln lassen sich auf die nachfolgende Formel (3) zurückführen.

<sup>3)</sup> WEIL, A.: L'intégrale de CAUCHY et les fonctions de plusieurs variables. Math. Ann. 111, 178 (1935).

<sup>4)</sup> Siehe die ausführliche Literaturangabe in S. BERGMAN: Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes. Mém. des Sci. Math. 108 (1948) und S. BERGMAN: The Kernel Function and conformal Mapping. New York (1950). Insbesondere siehe: Zur Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneten Randfläche. Jber. dtsch. Math. Ver. 42, 238 (1933). — Über eine Integraldarstellung von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Rec. math. Soc. Math. (Moscou) 1, 851 (1936). — Über uneigentliche Flächenintegrale in der Theorie der analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Rev. Ciencias, Lima 43, 675 (1941); 44, 131, 377 (1942).

Es ist nun von Interesse, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Integralformeln aufzuzeigen. Hierbei stellt sich heraus, daß trotz der verschiedenen Strukturen ein enger Zusammenhang zwischen den Formeln besteht und daß man als Ausgangsgleichung stets die leicht zu beweisende Formel (2) wählen kann. Wir sahen schon, wie man aus ihr unmittelbar die MARTINELLISCHE Formel (3) und damit auch Formel (1) gewinnen kann. A. WEIL führt die Integralformel für analytische Polyeder auf die CAUCHYSche Formel zurück und damit auch auf Formel (2), die dann sogar nur für den Fall  $n = 1$ , d. h. als gewöhnliche Integralformel für eine Veränderliche benutzt wird. S. HITOTUMATU<sup>5)</sup> hat schließlich in einer interessanten Note darauf hingewiesen, daß man aus der Formel für analytische Polyeder durch einige Umformungen mittels des STOKESSchen Satzes wieder die Formel (2) gewinnen kann.

Im folgenden soll umgekehrt gezeigt werden, wie man auf direktem Wege aus der Formel (2) eine Serie weiterer einfacher Integralformeln für analytische Polyeder erhalten kann, in denen jeweils über die  $(2n - k)$ -dimensionalen Seiten dieses Polyeders integriert wird [Formeln (24) und (25)]. Und diese Formeln enthalten für den Fall  $k = n$  das Integral von A. WEIL, für das damit gleichzeitig ein neuer Beweis gegeben ist. Die Formel (2) erweist sich also als geeigneter Ausgangspunkt für die Herleitung vieler Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.

Zunächst werden wir die in den Formeln auftretenden Gebiete und Integrationsflächen und ihre Orientierungen betrachten. Sodann werden gewisse alternierende Differentialformen in Form von Determinanten geschrieben. Mit diesen Formen lassen sich dann die verallgemeinerten Integralformeln angeben und rekursiv mit Hilfe des STOKESSchen Satzes aus Formel (2) berechnen.

**2. Vorbemerkungen.** Im euklidischen Raum  $R^n$  der  $n$  reellen Veränderlichen  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  sei eine stetig differenzierbare simpliziale Kette  $S$  der Dimension  $m + 1$  gegeben.  $Rd S$  sei ihr Rand. Sodann sei

$$\omega = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} A_{i_1 i_2 \dots i_m}(x) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}$$

eine alternierende Differentialform, deren Koeffizienten  $A_{i_1 i_2 \dots i_m}(x)$  auf  $S$  stetig differenzierbar sind. Die Ableitung von  $\omega$  ist

$$(4) \quad d\omega = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \frac{\partial A_{i_1 i_2 \dots i_m}(x)}{\partial x_i} dx_i dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}.$$

Dann lautet der STOKESSche Integralsatz<sup>6)</sup>

$$(5) \quad \int_{Rd S} \omega = \int_S d\omega.$$

Im  $R^{2n}$ , dem Raum der  $n$  komplexen Veränderlichen  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $z_k = x_k + i y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , hat der Satz dieselbe Gestalt (5), wenn man dort komplexe alternierende Differentialformen

$$\omega = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} A_{i_1 i_2 \dots i_m}(z, \bar{z}) dz_{i_1} \dots dz_{i_l} d\bar{z}_{i_{l+1}} \dots d\bar{z}_{i_m}$$

<sup>5)</sup> HITOTUMATU, S.: On integral formulas of analytic functions of several complex variables and some related problems. Kodai Math. Sem. Rep. 1, 11 (1949).

<sup>6)</sup> Siehe etwa DE RHAM, G., und K. KODAIRA: Harmonic Integrals. Lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton 1950.

eingführt, wobei die Koeffizienten  $A_{j_1 j_2 \dots j_m}(z, \bar{z})$  stetig differenzierbare komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$  sind. Die Differentiale  $dz_j$  und  $d\bar{z}_j$  sind gegeben durch die Beziehungen

$$dz_j = dx_j + i dy_j; \quad d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j,$$

und die Ableitungen  $d\omega$  lauten

$$d\omega = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} \left( \frac{\partial A_{j_1 j_2 \dots j_m}(z, \bar{z})}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial A_{j_1 j_2 \dots j_m}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) dz_{j_1} \dots dz_{j_l} d\bar{z}_{j_{l+1}} \dots d\bar{z}_{j_m}.$$

Darin sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial z_j}$  und  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$  definiert durch die reellen Ableitungen nach  $x_j$  und  $y_j$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_j} + \frac{1}{2i} \frac{\partial A}{\partial y_j}; \quad \frac{\partial A}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2i} \frac{\partial A}{\partial y_j}.$$

Die Schreibweise  $A(z, \bar{z})$  bringt zum Ausdruck, daß  $A$  nicht notwendig regulär in den  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ist. Hängt die Funktion  $A(z, \bar{z})$  regulär von den  $z_j$  ab, so verschwinden wegen der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen die Ableitungen  $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}_j}$ , und in diesem Fall schreiben wir  $A(z)$ . Die komplexe Form des STOKESSchen Integralsatzes beweist man sofort dadurch, daß man eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil vornimmt und dann den im Reellen geltenden Satz anwendet. Ist  $\omega$  auf  $S$  ein vollständiges Differential, d. h. verschwindet auf  $S$  die Ableitung  $d\omega$ , so ist nach (5)

$$\int_{\text{Rd } S} \omega = 0.$$

Zur Formulierung der uns interessierenden Integralformeln müssen zunächst die darin auftretenden Integrationsflächen und ihre Orientierungen beschrieben werden. Gegeben sei ein offenes Gebiet  $D(z)$  im Raume  $R^{2n}$  und darin  $K$  reguläre Funktionen  $X_1(z), X_2(z), \dots, X_K(z)$ . In jeder komplexen  $X_k$ -Ebene möge ein abgeschlossenes Gebiet  $D_k$  mit stückweise analytischer Randkurve  $C_k$  vorliegen. Dann bilden die Punkte  $z$  von  $D(z)$ , für die  $X_k(z)$  in  $D_k$  liegt, einen Teilbereich  $\Delta_k$  von  $D(z)$ , dessen Randpunkte in  $D(z)$  einer oder mehreren analytischen Hyperflächen  $\Gamma_k$  angehören. Der Durchschnitt der Bereiche  $\Delta_k, k=1, 2, \dots, K$  besteht aus einem oder mehreren Gebieten. Wir wollen annehmen, daß  $\sigma$  eines dieser Gebiete sei, und daß die Funktionen  $X_k(z)$  und die Gebiete  $D_k$  so gewählt seien, daß  $\sigma$  kompakt in  $D(z)$  liegt und je zwei der Hyperflächen  $\Gamma_k$  keine  $(2n-1)$ -dimensionalen Stücke gemeinsam haben. Wir orientieren nun  $\sigma$  folgendermaßen. Ist  $\sigma^0 = D_1^0 \times D_2^0 \times \dots \times D_n^0$  ein Polyzylinder im Innern von  $\sigma$ , der die gleiche Orientierung wie  $\sigma$  hat, so möge das Integral über die alternierende Differentialform  $dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \dots dx_n dy_n$  positiv sein:

$$(6) \quad \int_{\sigma^0} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \dots dx_n dy_n = F_1 \cdot F_2 \dots F_n > 0,$$

wobei die  $F_k$  die positiven Flächeninhalte der Gebiete  $D_k^0$  sind. Beachten wir, daß für die komplexen alternierenden Differentiale  $dz_j$  und  $d\bar{z}_j$  die Beziehung

$$d\bar{z}_j dz_j = 2i dx_j dy_j$$

gilt, so können wir die Orientierung von  $\sigma$  auch so festlegen, daß wir fordern, es soll

$$(7) \quad \int_{\sigma^0} d\bar{z}_1 dz_1 d\bar{z}_2 dz_2 \dots d\bar{z}_n dz_n = \prod_{k=1}^n (2i F_k)$$

mit positiven Flächeninhalten  $F_k$  sein. Diese Orientierung ist offensichtlich unabhängig von der speziellen Wahl des Polyzylinders  $\sigma^0$ .

Der Rand  $\sigma$  besteht aus den  $(2n-1)$ -dimensionalen Stücken  $\sigma_j$ , die jeweils auf den Hyperflächen  $F_j$  liegen. Ihre Orientierung ist durch die Orientierung von  $\sigma$  induziert. Liefert ein  $F_j$  kein solches  $(2n-1)$ -dimensionales Randstück, so sei  $\sigma_j$  leer. Es ist also

$$Rd\sigma = \sum_j \sigma_j.$$

Der Rand eines Stückes  $\sigma_j$  besteht aus den  $(2n-2)$ -dimensionalen orientierten Randstücken  $\sigma_{jk}$ , die auch dem Rand von  $\sigma_k$  angehören. Ist  $k=j$  oder haben  $\sigma_j$  und  $\sigma_k$  kein gemeinsames  $(2n-2)$ -dimensionales Randstück, so sei  $\sigma_{jk}$  leer. Demnach ist

$$Rd\sigma_j = \sum_k \sigma_{jk},$$

und es ist offenbar

$$\sigma_{jk} = -\sigma_{kj}.$$

Allgemein sei  $\sigma_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}$  dasjenige  $(2n-k-1)$ -dimensionale Stück des orientierten Randes von  $\sigma_{i_1 i_2 \dots i_k}$ , welches auch zum Rand von  $\sigma_{i_k i_{k+1}}$  gehört. Es ist leer, falls es kein solches  $(2n-k-1)$ -dimensionales Stück gibt oder falls  $i_{k+1} = j_l$  für ein  $l = 1, 2, \dots, k$  ist. Es gilt wieder

$$(8) \quad Rd\sigma_{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum_{i_{k+1}} \sigma_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}$$

und

$$(9) \quad \sigma_{i_1 i_2 \dots i_k} = \pm \sigma_{i_{v_1} i_{v_2} \dots i_{v_k}},$$

je nachdem  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  eine gerade oder ungerade Permutation ist.

Ist  $\sigma^0$  ein Polyzylinder:

$$\sigma^0 = D_1^0 \times D_2^0 \times \dots \times D_n^0,$$

wobei das Gebiet  $D_k^0$  den Rand  $C_k$  haben möge, so ist  $\sigma_{12\dots n}^0$  die orientierte Bestimmungsfläche des Polyzylinders, deren Orientierung nun gemäß unserer Regel durch die Orientierung von  $\sigma$  gegeben ist. Andererseits ist die Bestimmungsfläche von  $\sigma^0$  das direkte Produkt der Randkurven  $C_k$ :

$$\Gamma = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n.$$

Wird nun jedes Gebiet  $D_k^0$  und damit jede Randkurve  $C_k$  positiv orientiert, so wird damit auch  $\Gamma$  orientiert, und es erhebt sich die Frage, wie die Orientierungen von  $\sigma_{12\dots n}^0$  und  $\Gamma$  sich zueinander verhalten. Um dies festzulegen, verabreden wir, daß in üblicher Weise

$$(10) \quad \int_{\Gamma} f(z, \bar{z}) dz_1 dz_2 \dots dz_n = \int_{C_n} \dots \int_{C_1} f(z, \bar{z}) dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

sein soll.

Nun ist nach dem STOKESSchen Satz

$$\begin{aligned} \int_{\sigma^0} d\bar{z}_1 dz_1 d\bar{z}_2 dz_2 \dots d\bar{z}_n dz_n &= \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j^0} \bar{z}_j dz_1 d\bar{z}_2 dz_2 \dots d\bar{z}_n dz_n = \int_{\sigma_1^0} \bar{z}_1 dz_1 d\bar{z}_2 dz_2 \dots d\bar{z}_n dz_n, \end{aligned}$$

da auf  $\sigma_j^0$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$  jeweils  $d\bar{z}_j dz_j$  verschwindet. Wiederholte Anwendung dieses Schlusses liefert bei Berücksichtigung der Vertauschungsregeln für alternierende Differentiale

$$(11) \quad \int_{\sigma^n} d\bar{z}_1 dz_1 d\bar{z}_2 dz_2 \dots d\bar{z}_n dz_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\sigma_1^0 2 \dots n} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n dz_1 dz_2 \dots dz_n.$$

Andererseits ist gemäß der Festsetzung (10)

$$(12) \quad \int_{\Gamma} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n dz_1 dz_2 \dots dz_n = \prod_{k=1}^n (2i F_k).$$

Der Vergleich von (7), (11) und (12) lehrt, daß

$$(13) \quad \Gamma = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sigma_1^0 2 \dots n$$

ist.

Nun gilt der Satz<sup>7)</sup>: Zu jeder in  $D(z)$  regulären Funktion  $X_k(z)$  gibt es reguläre Funktionen  $P_{kl}(\zeta, z)$  in  $D(\zeta) \times D(z)$ , so daß

$$(14) \quad X_k(\zeta) - X_k(z) = \sum_{l=1}^n (\zeta_l - z_l) P_{kl}(\zeta, z), \quad k=1, 2, \dots, K$$

ist. Setzt man

$$q_{kl} = \frac{P_{kl}(\zeta, z)}{X_k(\zeta) - X_k(z)},$$

so schreiben sich die Gleichungen (14) auch in der Form

$$1 = \sum_{l=1}^n (\zeta_l - z_l) \cdot q_{kl}$$

oder, falls man zur Vektorschreibweise mit

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad q_k = \begin{pmatrix} q_{k1} \\ q_{k2} \\ \vdots \\ q_{kn} \end{pmatrix}$$

übergeht,

$$(15) \quad 1 = (\zeta - z, q_k), \quad k=1, 2, \dots, K.$$

Mit diesen Abkürzungen gilt die Integralformel<sup>8)</sup>

$$(16) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_n} \int_{\sigma_{j_1 j_2 \dots j_n}^0} f(\zeta) D(q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_n}) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n,$$

wobei der obere Wert für alle  $z$  im Innern von  $\sigma$  gilt, während das Ergebnis Null für diejenigen  $z$  aus  $D(z)$  herauskommt, die außerhalb  $\sigma$  und auf keiner Hyperfläche  $\Gamma_k$  liegen.  $D(q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_n})$  ist dabei die aus den Vektoren  $q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_n}$  gebildete Determinante.

3. Über gewisse alternierende Differentialformen. Die Umformungen der Formel (2), die wir im folgenden vornehmen werden, kann man bequem ausführen, wenn man gewisse alternierende Differentialformen in geeigneter Weise als Determinanten schreibt.

<sup>7)</sup> HEFER, H.: Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über eine Zerlegung analytischer Funktionen und die WEILsche Integraldarstellung. Math. Ann. 122, 276 (1950).

<sup>8)</sup> WEIL, A., a. a. O.: Das Vorzeichen  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ , welches sich durch die Festlegung der Orientierung gemäß Formel (7) ergibt, tritt in der Arbeit von A. WEIL nicht auf. Die Orientierung ist dort so zu verstehen, daß  $\Gamma = \sigma_1^0 2 \dots n$  an Stelle von (13) gilt.



In einem Gebiet  $G$  seien  $k \cdot n$  Funktionen  $q_{jl}(z, \bar{z})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ;  $l = 1, 2, \dots, n$  und  $(n - k) \cdot n$  Differentialformen ersten Grades gegeben:

$$\theta_l^{(j)} = \sum_{v=1}^n (a_{lv}^{(j)}(z, \bar{z}) dz_v + b_{lv}^{(j)}(z, \bar{z}) d\bar{z}_v), \quad j = k+1, k+2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Die  $q_{jl}$  und die  $\theta_l^{(j)}$  fassen wir zu Vektoren zusammen:

$$q_j = \begin{pmatrix} q_{j1} \\ q_{j2} \\ \vdots \\ q_{jn} \end{pmatrix}; \quad \theta^{(j)} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(j)} \\ \theta_2^{(j)} \\ \vdots \\ \theta_n^{(j)} \end{pmatrix}$$

und bilden die Differentialform

$$(17) \quad D(q_1 \dots q_k, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)}) = \begin{vmatrix} q_{11} \dots q_{k1} & \theta_1^{(k+1)} \dots \theta_1^{(n)} \\ q_{12} \dots q_{k2} & \theta_2^{(k+1)} \dots \theta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ q_{1n} \dots q_{kn} & \theta_n^{(k+1)} \dots \theta_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Diese Differentialform ist nach den Entwicklungssätzen für gewöhnliche Determinanten über einem kommutativen Körper zu berechnen, wobei nur darauf zu achten ist, daß die Reihenfolge der Differentiale in einem Summand genau der Reihenfolge der Spalten entspricht, in denen diese Differentiale auftreten.

Da die Differentiale nicht dem kommutativen Gesetz der Multiplikation gehorchen, so gelten für diese „Determinanten“ nicht mehr alle bekannten Determinantenregeln. Für uns sind die folgenden Gesetze von Bedeutung, die sich aus den üblichen Determinantenregeln sofort ergeben, wenn man nur beachtet, daß die Differentialformen schiefsymmetrisch sind.

(a) Bezeichnen wir die Zeilen von  $D$  mit

$$\delta_v = (q_{1v} \dots q_{kv}, \theta_v^{(k+1)} \dots \theta_v^{(n)}),$$

und gilt eine lineare Abhängigkeit

$$\sum_{v=1}^n g_v \cdot \delta_v = 0,$$

wobei die  $g_v = g_v(z, \bar{z})$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$  in keinem Teilgebiet des Definitionsgebietes  $G$  sämtlich identisch verschwinden, so ist  $D = 0$ .

Für die Spalten  $q_1 \dots q_k$  gilt die übliche Vertauschungsregel:

(b)  $D(\dots q_l \dots q_m \dots, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)}) = -D(\dots q_m \dots q_l \dots, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)})$ . Sind  $g_j = g_j(z, \bar{z})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  und  $g = g(z, \bar{z})$  Funktionen im Definitionsgebiet  $G$ , so ist

$$(c) \quad D(\dots q_l \dots, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)}) = D(\dots q_l + \sum_{j=1}^k g_j q_j \dots, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)})$$

und

$$(d) \quad D(\dots g q_l \dots, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)}) = g \cdot D(\dots q_l \dots, \theta^{(k+1)} \dots \theta^{(n)}).$$

Da die Differentialformen schiefsymmetrisch sind, so gelten bezüglich der Spalten  $\theta^{(j)}$  andere Regeln:

$$(e) \quad D(q_1 \dots q_k, \dots \theta^{(l)} \dots \theta^{(m)} \dots) = D(q_1 \dots q_k, \dots \theta^{(m)} \dots \theta^{(l)} \dots).$$

Sind zwei Spalten  $\theta^{(l)}$  und  $\theta^{(m)}$  gleich, so folgt daraus nicht, daß  $D$  verschwindet. So ist z. B., wenn wir

$$dz = \begin{pmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_n \end{pmatrix}$$

setzen,

$$(18) \quad D(dz, dz, \dots, dz) = \begin{vmatrix} dz_1 dz_1 \dots dz_1 \\ dz_2 dz_2 \dots dz_2 \\ \vdots \\ dz_n dz_n \dots dz_n \end{vmatrix} = n! dz_1 dz_2 \dots dz_n.$$

Sind  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  Differentialformen 1. Grades, so gilt

$$(f) \quad D(q_1 \dots q_k, \dots \theta^{(l)} \dots) = D(q_1 \dots q_k, \dots \theta^{(l)} + \sum_{j=1}^k q_j \omega_j \dots),$$

und wenn  $g = g(z, \bar{z})$  eine Funktion im Definitionsgebiet  $G$  ist:

$$(g) \quad D(q_1 \dots q_k, \dots g \theta^{(l)} \dots) = g \cdot D(q_1 \dots q_k, \dots \theta^{(l)} \dots);$$

denn nach Regel (e) läßt sich die  $l$ -te Spalte mit der  $(k+1)$ -ten Spalte vertauschen, und zwischen den  $k+1$ -ersten Spalten gelten die üblichen Determinantenregeln (e), auch dann, wenn die auftretenden Faktoren  $\omega_l$  Differentiale sind, da jeweils die Differentiale der  $(k+1)$ -ten Spalte mit den Funktionen der ersten  $k$  Spalten vertauschbar sind.

Es seien nun  $\zeta, z$  und  $q_k, k=1, 2, \dots, K$  die oben definierten Vektoren. Ferner sei

$$\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\zeta}_n \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}, \quad d\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} d\bar{\zeta}_1 \\ d\bar{\zeta}_2 \\ \vdots \\ d\bar{\zeta}_n \end{pmatrix}, \quad \theta^{(k)} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(k)} \\ \theta_2^{(k)} \\ \vdots \\ \theta_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

mit

$$(19) \quad \theta_i^{(k)} = \frac{1}{N^{n-k}} d\bar{\zeta} - (n-k) \frac{(\zeta - z, d\bar{\zeta})}{N^{n-k+1}} (\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i)$$

und

$$(20) \quad N = (\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \sum_{v=1}^n (\zeta_v - z_v) (\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v).$$

Dann ist nach Regel (a)

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 \dots 1 & , & \frac{1-n+k}{N^{n-k}} (\zeta - z, d\bar{\zeta}), & (\zeta - z, d\bar{\zeta}) \dots (\zeta - z, d\bar{\zeta}) \\ \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{N} & , & q_{11} \dots q_{k1}, & \theta_1^{(k)} & , & d\bar{\zeta}_1 & \dots & d\bar{\zeta}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\bar{\zeta}_n - \bar{z}_n}{N} & , & q_{1n} \dots q_{kn}, & \theta_n^{(k)} & , & d\bar{\zeta}_n & \dots & d\bar{\zeta}_n \end{vmatrix} = 0;$$

denn wegen (15), (19) und (20) ist die erste Zeile eine Linearkombination der übrigen Zeilen. Die Entwicklung der vorstehenden Differentialform nach der ersten Zeile liefert nun

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & D(q_1 \dots q_k, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) \\
 &= \sum_{e=1}^k (-1)^{e-1} D\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N}, q_1 \dots [q_e] \dots q_k, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}\right) \\
 &+ (-1)^k \cdot \frac{1-n+k}{N^{n-k}} (\zeta-z, d\bar{\zeta}) D\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N}, q_1 \dots q_k, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}\right) \\
 &+ (-1)^k \cdot (n-k-1) (\zeta-z, d\bar{\zeta}) D\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N}, q_1 \dots q_k, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}\right).
 \end{aligned}$$

Zieht man in der letzten Differentialform den Faktor  $\frac{1}{N^{n-k}}$  in  $\theta^{(k)}$  vor die Determinante gemäß Regel (g) und addiert man sodann die mit  $(n-k)$   $(\zeta-z, d\bar{\zeta})$  multiplizierte erste Spalte zur  $(k+2)$ -ten Spalte, so nimmt nach Regel (f) der letzte Summand in Formel (21) den entgegengesetzten gleichen Wert wie der zweite Summand an, so daß sich die rechte Seite auf die erste Summe reduziert. Mit den einzelnen Gliedern dieser Summe kann man nun in gleicher Weise wie mit dem letzten Summand verfahren, sodann den Faktor  $\frac{1}{N^{n-k}}$  mit in die erste Spalte hineinziehen und darauf die erste Spalte an die  $k$ -te Stelle bringen. Dann erhalten wir aus (21) die Identität

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & D(q_1 \dots q_k, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) = \\
 &= \sum_{e=1}^k (-1)^{k+e} D(q_1 \dots [q_e] \dots q_k, \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N^{n-k+1}}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}),
 \end{aligned}$$

die im folgenden für die Integralumformungen von Bedeutung ist. Ersetzt man in vorstehender Beziehung die Indizes 1, 2, ...,  $e$ , ...,  $k$  durch Indizes  $j_1, j_2, \dots, j_e, \dots, j_k$ , so gilt die entsprechende Identität.

**4. Integralformeln für analytische Polyeder.** Um aus der Formel (2) die angekündigten Integralformeln für analytische Polyeder zu gewinnen, bemerken wir, daß  $R = \sum_j a_j$  die Oberfläche des Polyeders  $\sigma$  ist und daß wir

die Differentialform 
$$\frac{(n-1)! \sum_{e=1}^n (\bar{\zeta}_e - \bar{z}_e) d\bar{\zeta}_1 \dots [d\bar{\zeta}_e] \dots d\bar{\zeta}_n}{(\zeta_1 - z_1)^n + \dots + (\zeta_n - z_n)^n}$$
 mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts in der Form  $D\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N^n}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}\right)$  schreiben können, so daß Formel (2) die Gestalt annimmt:

$$(23) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{j, a_j} f(\zeta) D\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N^n}, d\bar{\zeta}, \dots, d\bar{\zeta}\right) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n.$$

Wendet man auf diese Formel mehrmals den STOKESSchen Satz an, so erhält man die Formel

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \int_{a_{j_1 j_2 \dots j_k}} f(\zeta) \sum_{e=1}^k (-1)^{k+e} \times \\
 &\times D(q_{j_1} \dots [q_{j_e}] \dots q_{j_k}, \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{N^{n-k+1}}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n,
 \end{aligned}$$

worin über die  $(2n-k)$ -dimensionalen Seiten des analytischen Polyeders  $\sigma$  integriert wird.

Wir stellen zunächst fest, daß diese Formel für  $k = 1$  mit Formel (23) übereinstimmt, und beweisen sie induktiv für alle  $k$ . Gemäß der Identität (22) können wir in vorstehender Formel die Summe unter dem Integralzeichen durch  $D(q_1 \dots q_k, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta})$  ersetzen und erhalten damit

$$(25) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \times \\ \times \int_{\sigma_{j_1 j_2 \dots j_k}} f(\zeta) D(q_{j_1} \dots q_{j_k}, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n$$

mit

$$\theta^{(k)} = \frac{1}{N^{n-k}} d\bar{\zeta} - \frac{n-k}{N^{n-k+1}} (\zeta - z, d\bar{\zeta}) (\bar{\zeta} - \bar{z}); \quad N = (\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}).$$

Lassen wir die Indizes unabhängig voneinander laufen, so tritt jeder Summand  $k!$  mal auf, so daß

$$(26) \quad \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} = \frac{1}{k!} \sum_{j_1 j_2 \dots j_k}$$

ist. Sodann sehen wir, daß

$$(27) \quad f(\zeta) D(q_{j_1} \dots q_{j_k}, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n \\ = d \left\{ f(\zeta) D(q_{j_1} \dots q_{j_k}, \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{N^{n-k}}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n$$

ist. Hier liegt es nun nahe, den STOKESSchen Satz anzuwenden. Jede  $(2n-k)$ -dimensionale Fläche  $\sigma_{j_1 j_2 \dots j_k}$  besitzt die  $(2n-k-1)$ -dimensionalen Ränder  $\sigma_{j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1}}$ , oder mit anderen Indizes geschrieben: jede  $(2n-k-1)$ -dimensionale Fläche  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{k+1}}$  ist Randstück der  $k+1$  Flächen  $\sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}}$ ,  $\varrho = 1, 2, \dots, k+1$ , und zwar ist bei Berücksichtigung der Vorzeichen  $(-1)^{k+1-\varrho} \sigma_{l_1 l_2 \dots l_{k+1}} = \sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1} l_\varrho}$  Randstück von  $\sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}}$ . Wir können daher die Formel (25) unter Beachtung von (26), (27) und (9) auch schreiben:

$$(28) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n k! (k+1)!} \sum_{\varrho=1}^{k+1} \sum_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}} \times \\ \times \int_{\sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}}} f(\zeta) D(q_{l_1} \dots [q_{l_\varrho}] \dots q_{l_{k+1}}, \theta^{(k)}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n \\ = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n (k+1)!} \sum_{\varrho=1}^{k+1} \sum_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}} \times \\ \times \int_{\sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}}} d \left\{ f(\zeta) D(q_{l_1} \dots [q_{l_\varrho}] \dots q_{l_{k+1}}, \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{N^{n-k}}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n \right\}.$$

Jetzt benutzen wir den STOKESSchen Satz für die Flächen  $\sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1}}$  mit den Rändern  $\sum_{l_\varrho} \sigma_{l_1 \dots [l_\varrho] \dots l_{k+1} l_\varrho} = \sum_{l_\varrho} (-1)^{k+1-\varrho} \sigma_{l_1 l_2 \dots l_{k+1}}$ . Auf diesen Flächen ist jeweils der Integrand als Funktion der  $\zeta$  und  $\bar{\zeta}$  regulär.

Daher ist

$$(29) \quad \left. \begin{matrix} f(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n (k+1)!} \sum_{e=1}^{k+1} \sum_{l_1 \dots l_e} \sum_{l_{e+1} \dots l_{k+1}} \sum_{l_e} \times \\ \times \int_{\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{k+1}}} f(\zeta) \cdot (-1)^{k+1-e} D(q_{l_1} \dots [q_{l_e}] \dots q_{l_{k+1}}) \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{N^{n-k}}, d\bar{\zeta} \dots d\bar{\zeta}_e d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n.$$

Läßt man hier die Indizes nur die geordneten  $(k+1)$ -Tupel  $1_1 < 1_2 < \dots < 1_{k+1}$  durchlaufen und zieht man die Summe über  $\varrho$  unter das Integral, so ergibt sich genau die Formel (24) für die  $(2n - k - 1)$ -dimensionalen Seiten des Polyeders. Damit ist die Formel (24) und gleichzeitig auch die Formel (25) bewiesen. Formel (25) liefert für  $k = n$  die Formel (16).

Setzt man für die Veränderlichen  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$  neue Veränderliche  $z' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ , die von den  $z_\alpha$  unabhängig sind und in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\bar{z}_0$  liegen, so werden die Integrale (24) und (25) in einer Umgebung von  $(z_0, \bar{z}_0) = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n}, \bar{z}_{01}, \bar{z}_{02}, \dots, \bar{z}_{0n})$  reguläre Funktionen  $F(z, z')$  der  $2n$  komplexen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, z_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ . Für die nicht analytische  $2n$ -dimensionale Fläche  $z'_\alpha = \bar{z}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  gilt

$$F(z, z') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f(z).$$

Dann folgt<sup>9)</sup>

$$F(z, z') \equiv (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f(z).$$

Daher gelten die Formeln (24) und (25) in einer Umgebung eines Punktes  $z_0 = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n})$  auch dann, wenn in  $\theta^{(k)}$  und  $N$  die Veränderlichen  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$  durch die konstanten Werte  $\bar{z}_0 = (\bar{z}_{01}, \bar{z}_{02}, \dots, \bar{z}_{0n})$  ersetzt werden:  $N_0 = (\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}_0)$ ,  $\theta^{(k)} = \frac{d\bar{\zeta}}{N_0^{n-k}} - \frac{n-k}{N_0^{n-k+1}} (\zeta - z, d\bar{\zeta}) (\bar{\zeta} - \bar{z}_0)$ .

<sup>9)</sup> BOCHNER, S., a. a. O.

(Eingegangen am 11. Februar 1952.)

## Zur Theorie des Figurengitters.

Von

EDMUND HLAWKA in Wien.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit dem inhomogenen Problem der Geometrie der Zahlen. Dies kann so ausgesprochen werden: Es sei im  $m$ -dimensionalen Raum eine Menge  $A$ , welche den Koordinatenursprung enthält, und ein Gitter  $\Gamma$  (seine Punkte seien  $\gamma$ ) gegeben. Unter welchen Voraussetzungen überdecken die Mengen  $A + \gamma$ , wenn  $\gamma$  alle Punkte in  $\Gamma$  durchläuft, den  $R_m$ , d. h. wann gibt es zu jedem Punkt  $t$  in  $R_m$  ein  $\gamma$ , so daß  $t$  in  $A + \gamma$  liegt. Dieses Problem hängt nun eng mit dem homogenen Problem zusammen, zu bestimmen, wieviele Gitterpunkte  $\neq 0$  in  $A$  liegen. Mit diesem Problem hatte ich mich bereits früher beschäftigt<sup>1)</sup>. Es soll hier weiter behandelt werden, und es sollen verschiedene Anwendungen gegeben werden. Wir gehen dazu von folgender Fragestellung aus: Es liege eine Menge  $A$  vor, welche innere Punkte besitzen soll, und es werde  $A$  wieder allen Gittertranslationen  $\gamma$  unterworfen. Die Gesamtheit der Mengen  $A + \gamma$  nennen wir mit HADWIGER ein Figurengitter  $\mathfrak{A}(\Gamma)$ . Es sei nun weiter  $B$  eine beliebige Menge, welche ebenfalls innere Punkte besitzen soll. Wann hat  $B$  mit dem Figurengitter  $\mathfrak{A}(\Gamma)$  innere Punkte gemeinsam, und wie groß ist das Maß dieses Durchschnittes mindestens, wenn  $A$  und  $B$  meßbar sind? Wir behandeln diese Fragen gleich etwas allgemeiner, indem wir einen beliebigen lokal-kompakten Raum  $R$  mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom und eine diskrete Gruppe  $\Gamma$  zugrunde legen, welche in  $R$  eine diskontinuierliche Transformationsgruppe mit beschränktem, meßbarem Fundamentalebene induziert. Es ist diese Verallgemeinerung vielleicht im Hinblick auf die Untersuchungen von C. L. SIEGEL<sup>2)</sup> von Interesse.

§ 1. Es sei  $R$  ein regulärer lokalkompakter Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und in dem eine Maßtheorie\*) erklärt ist. Seine Punkte bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben. Weiter sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe (mit Elementen  $\gamma$ ), die eine Darstellung als topologische Automorphismengruppe in  $R$  besitzt, in  $R$  diskontinuierlich, mit beschränktem, meßbarem Fundamentalebene\*\*)  $F$  ist. Wird auf ein  $x$  die Transformation  $\gamma$  ausgeübt, so bezeichnen wir den so entstehenden Punkt mit  $\gamma x$ . Ist  $A$  eine meßbare Menge aus  $R$ , so gelte für jedes  $\gamma$  aus  $\Gamma$ :  $m(\gamma A) = m(A)$ . Die Gesamtheit der Mengen  $\gamma A$ , wenn  $\gamma$  alle Elemente von  $\Gamma$  durchläuft, nennen wir das Figurengitter  $\mathfrak{A}(\Gamma)$ . Die Menge  $\gamma A$  heiße Figur aus  $\mathfrak{A}(\Gamma)$ .

<sup>1)</sup> Math. Z. 49, 285—312 (1943); Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. 155, 73—82; Anz. Math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Wien 1950 219—226; vgl. dazu Th. SCHNEIDER: Arch. Math. 81—86 (1950).

<sup>2)</sup> Ann. of Math. 44, 674—689 (1943); Ann. of Math. 46, 708—718 (1945).

\*) Alle BORELSchen Mengen, welche durch eine abzählbare Menge von kompakten Mengen überdeckbar sind, sollen meßbar sein und das Maß einer kompakten Menge  $A_0$  ist das inf  $m(A)$  aller offenen Mengen, welche  $A_0$  enthalten.

\*\*) Und der Rand von  $F$  sei vom Maße 0.

Haben die Figuren von  $\mathfrak{A}(I')$  keinen inneren Punkt gemeinsam, so wollen wir  $\mathfrak{A}(I')$  disjunkt nennen.

Es sei nun  $\varphi(x)$  eine beschränkte, nicht negative, integrierbare Funktion, welche außerhalb einer meßbaren, beschränkten Menge verschwindet. Solche Funktionen wollen wir kurz  $\varphi$ -Funktionen nennen. Wir bezeichnen noch  $\int_R \varphi(x) dx$  mit  $V(\varphi)$ . Wir bilden nun

$$(1) \quad \Phi(x) = \sum_{\gamma \in I'} \varphi(\gamma x).$$

Dann gilt Satz 1:

$$(2) \quad \int_R \Phi(x) dx = V(\varphi).$$

Aus der Definition des Fundamentalbereiches folgt nämlich, daß

$$\int_F \Phi dx = \sum_{\gamma} \int_F \varphi(\gamma x) dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma^{-1}F} \varphi(x) dx = V(\varphi).$$

Ist insbesondere  $\varphi(x)$  die charakteristische Funktion einer beschränkten, meßbaren Menge  $A$  mit Volumen  $V(A) > 0$  und ist  $\mathfrak{A}(I')$  disjunkt, dann ist für fast alle  $x$   $\Phi(x) \leq 1$  und aus (2) folgt

$$(3) \quad V(A) \leq V(F).$$

Ist insbesondere  $A$  selbst Fundamentalbereich  $F_1$ , so muß  $V(F_1) = V(F)$  sein. Ist  $V(A) > V(F)$ , so kann  $\mathfrak{A}(I')$  nicht disjunkt sein. Allgemein folgt aus (2) (BLICHFELDTscher Satz): Es gibt ein  $x_0$ , so daß

$$(4) \quad \Phi(x_0) = \sum_{\gamma} \varphi(\gamma x_0) \geq \frac{V(\varphi)}{V(F)} \quad \text{ist.}$$

Eine einfache Anwendung von (4) ist folgende: Es seien außer der Funktion  $\varphi(x)$  noch weitere  $N$  Funktionen  $\varphi_i(x)$  vorgegeben, so daß  $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \geq \varphi(x)$  für

alle  $x$  ist, und es sei stets  $\Phi_i(x) \leq 1$ . Dann muß  $N \geq \frac{V(\varphi)}{V(F)}$  sein, denn es muß für jedes  $x$ :  $N \geq \sum \Phi_i(x) \geq \Phi(x)$  sein, und (4) liefert dann alles. Sind die  $\varphi_i$  und  $\varphi$  charakteristische Funktionen von Mengen, so gestattet dieser Satz eine einfache geometrische Deutung.

Es seien nun zwei Funktionen  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  gegeben, und wir wollen unter der Voraussetzung  $\Phi_i(x) \leq C_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $I_{12} = \int_F \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx$  nach unten abschätzen. Wir wollen gleich allgemeiner, wenn  $l+1$  Funktionen  $\varphi_i(x)$  ( $l$  natürliche Zahl) vorliegen,  $I_{lk} = \int_F \Phi_l \Phi_k dx$  ist, die  $\Phi_i(x) \leq C_i$  ( $i = 1, \dots, l+1$ ) sind,  $I = \sum_{i \neq k} I_{ik}$  nach unten abschätzen.

$$\text{Es ist } I = \int_F (\sum \Phi_i)^2 dx - \sum \int \Phi_i^2 dx.$$

Wenden wir auf das erste Integral rechts die SCHWARZsche Ungleichung  $\int dx \int_F (\sum \Phi_i)^2 dx \geq (\int_F \sum \Phi_i dx)^2$  an und berücksichtigen (2) und  $\Phi_i \leq C_i$ , so erhalten wir

$$(5) \quad V(F) I \geq \left( \sum_{i=1}^{l+1} V(\varphi_i) \right)^2 - V(F) \sum_{i=1}^{l+1} C_i V(\varphi_i).$$



Daraus folgt, daß es ein  $i$  und  $k$  mit  $1 \leq i < k \leq l+1$  gibt, so daß

$$(6) \quad I_{ik} \geq \frac{1}{V(F)l(l+1)} \left[ \left( \sum_{i=1}^{l+1} V(\varphi_i) \right)^2 - V(F) \sum_{i=1}^{l+1} C_i V(\varphi_i) \right].$$

Ist  $\left( \sum_{i=1}^{l+1} V(\varphi_i) \right)^2 - V(F) \sum_{i=1}^{l+1} C_i V(\varphi_i) = \sum (\varphi_1, \dots, \varphi_{l+1}) > 0$ , so folgt aus (6),

daß es ein  $1 \leq i < k \leq l+1$  gibt, so daß  $I_{ik} > 0$  ist.

Liegen daher z. B.  $l+1$  Mengen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, l+1$ ) vor, sind die zugehörigen Figurengitter  $\mathfrak{A}_i(\Gamma)$  disjunkt, ist

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{l+1} V(A_i) > V(F),$$

so muß es ein  $i$  und  $k$  mit  $1 \leq i < k \leq l+1$  geben, so daß  $A_i$  mit  $\mathfrak{A}_k(\Gamma)$  innere Punkte gemeinsam hat.

Für  $l = 1$  reduziert sich (6) auf

$$(8) \quad C_1 C_2 V(F) \geq I_{12} \geq \frac{1}{2V(F)} [(V(\varphi_1) + V(\varphi_2))^2 - V(F)(C_1 V(\varphi_1) + C_2 V(\varphi_2))].$$

Dabei haben wir gleich die triviale obere Abschätzung von  $I_{12} = \int_F \Phi_1 \Phi_2 dx$  hinzugefügt.

Die Abschätzung (7) läßt sich nicht verschärfen, wie das folgende, einfache Beispiel zeigt:

Es sei im  $R_2$   $A_1$  die Menge  $\left| x_1 - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{4} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ ,  $|x_2| \leq \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ),  $A_2$  die Menge  $|x_1| \leq \frac{1}{4} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ ,  $|x_2| \leq \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ , und  $\Gamma$  sei die Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, also  $V(F(\Gamma)) = 1$ . Wir machen noch folgende Anwendung von (8): Wir wollen den Fall betrachten, daß in (4) das Gleichheitszeichen steht, aber voraussetzen, daß  $V(\varphi) \geq \frac{1}{2} V(F)$  ist. Es sei also für alle  $x$   $\Phi(x) \leq \frac{V(\varphi)}{V(F)} = C_1$ , und wir setzen voraus, daß die Menge der  $x$ , für die  $\varphi(x) > 0$ , innere Punkte besitzt und abgeschlossen ist. Dann folgt aus (8) für  $\varphi = \varphi_1$  und für jede Funktion  $\varphi_2$  mit  $C_2 \leq 1$

$$(8') \quad V(\varphi) \geq I_{12} \geq \frac{V(\varphi_2)(2V(\varphi) - V(F) + V(\varphi_2))}{2V(F)}.$$

Es ist also  $I_{12} > 0$  für alle Funktionen  $\varphi_2$  mit  $V(\varphi_2) > 0$ . Dann muß für alle  $x$  in  $R$   $\Phi(x) > 0$  sein. Nehmen wir an, es gäbe ein  $x_0$ , so daß  $\Phi(x_0) = 0$  ist. Dann gibt es auch eine Umgebung  $U$  von  $x_0$ , so daß für alle Punkte dieser Umgebung  $\Phi(x) = 0$  ist. Dann wählen wir eine meßbare Menge  $A$  aus  $U$ , so daß das zugehörige Figurengitter  $\mathfrak{A}(\Gamma)$  disjunkt ist. Ihre charakteristische Funktion nehmen wir als  $\varphi_2$ . Dann wäre nach obigem  $I_{12} = 0$ , da  $\Phi(x) = 0$ , aber nach (8') muß  $I_{12} > 0$  sein, was nicht geht. Daraus folgt:

Satz 2: Ist  $A$  eine meßbare, abgeschlossene Menge, deren Figurengitter disjunkt ist, und ist  $V(A) = V(F)$ , so muß  $A$  Fundamentalbereich sein. Ist  $R = R_m$ ,  $A$  konvex, so ist dies der bekannte Grenzfall des MINKOWSKISCHEN Fundamentalsatzes. Auch ein früherer Satz des Verf.<sup>1)</sup> ist darin enthalten.

Wir bemerken noch folgendes:

Ist  $\Phi(x) = \sum_{\gamma} \varphi(\gamma x)$ ,  $\Psi(x) = \sum_{\gamma} \psi(\gamma x)$ , so ist

$$(9) \quad I(\Phi, \Psi) = \int_F \Phi(x) \Psi(x) dx = \int_R \varphi(x) \Psi(x) dx = \int_R \psi(x) \Phi(x) dx,$$

welches analog zu (2) bewiesen wird. Daraus folgt noch

$$(9') \quad \int_F \left( (\Phi(x) - \frac{V(\varphi)}{V(F)})^2 \right) dx = \int_R \varphi(x) \left( \Phi(x) - \frac{V(\varphi)}{V(F)} \right) dx.$$

§ 2. Wir wollen nun (4), (6) und (8) spezialisieren. Unter einer  $\psi$ -Funktion verstehen wir eine Funktion  $\psi(x, y)$ , welche in jeder Variablen eine  $\varphi$ -Funktion ist und für die folgende Eigenschaft gilt:  $\psi(\gamma x, \gamma y) = \psi(x, y)$  für jedes  $\gamma$  von  $\Gamma$ . Liegen drei  $\psi$ -Funktionen  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) vor und gilt für jedes  $z$  aus  $R$   $\psi_3(x, y) \geq \min(\psi_1(z, x), \psi_2(z, y))$ , so nennen wir  $\psi_3$  den Funktionen  $\psi_1, \psi_2$  zugeordnet. Ist  $\psi_1 = \psi_2$ , so nennen wir  $\psi_3$  einfach  $\psi_1$  zugeordnet. Es seien weiter  $g_1, g_2$  zwei Punkte, so beschaffen, daß alle Punkte  $\gamma g_1$  bzw.  $\gamma g_2$  untereinander verschieden sind. Die Menge der Punkte  $\gamma g_1$  wollen wir das Punktgitter  $G(\Gamma; g_1)$  in der Lage  $g_1$  nennen. Analog ist natürlich  $G(\Gamma; g_2)$  erklärt.

Ist nun  $\psi_3$  den Funktionen  $\psi_1, \psi_2$  zugeordnet, so ist für jedes feste  $x$

$$(10) \quad \sum_{\gamma} \psi_3(\gamma g_1, g_2) \geq \min_i \sum_{\gamma} \psi_i(\gamma x; g_i) \quad (i = 1, 2).$$

Beweis: Es seien  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) jene Elemente aus  $\Gamma$ , für welche  $\psi_i(\gamma_i x; g_i) \geq \psi_i(\gamma x; g_i)$  ( $i = 1, 2$ ) für jedes  $\gamma$  ist. Solche Elemente gibt es. Wir wollen annehmen, daß  $\psi_2(\gamma_2 x; g_2) \geq \psi_1(\gamma_1 x; g_1)$  ist. Dann ist  $\sum_{\gamma} \psi_3(\gamma g_1; g_2) \geq \sum_{\gamma} \min(\psi_1(\gamma x; g_1), \psi_2(\gamma_2 x; g_2)) \geq \sum_{\gamma} \psi_1(\gamma x; g_1)$ , und alles ist gezeigt.

Wir können nach einer Methode von CASSELS<sup>3)</sup> (10) für  $\psi_1 = \psi_2, g_1 = g_2$  verschärfen, wenn  $\Gamma$  folgende Eigenschaft  $U$  erfüllt: Ist  $r$  eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es unter  $r+1$  verschiedenen Elementen  $\gamma_1, \dots, \gamma_{r+1}$  in  $\Gamma$  stets mindestens ein Element, sagen wir  $\gamma_{r+1}$ , so daß für alle  $i \leq r$ ,  $j \leq r$   $\gamma_i^{-1} \gamma_{r+1} \gamma_j^{-1} \gamma_{r+1} \neq e$  ist. Diese Eigenschaft  $U$  ist für alle Vektoren des  $R_m$  erfüllt. Es ist zu vermuten, daß jede Gruppe  $\Gamma$ , welche keine Elemente endlicher Ordnung besitzt, die Eigenschaft  $U$  hat.

Es sei angenommen, daß  $\Gamma$  die Eigenschaft  $U$  hat. Dann gibt es zu je  $l$ -Elementen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  aus  $\Gamma$   $l$ -Elemente  $\delta_1, \dots, \delta_l$ , wo  $\delta_1 = e$ ,  $\delta_j \neq \delta_k^{\pm 1}$  und  $\delta_j = \gamma_{l_j} \gamma_{m_j}^{-1}$  ( $l_j \leq j, m_j \leq j$ ) ist. Es seien nun bei festem  $x$  die Elemente  $\gamma$  so geordnet, daß (wir schreiben  $\psi = \psi_1 = \psi_2, g = g_1 = g_2$ )  $\psi(\gamma_i x) \geq \psi(\gamma_{i+1} x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ist. Es sei nun  $\eta(\gamma) = \gamma_{m_i}$ , wenn  $\gamma = \delta_i$ ,  $\eta(\gamma) = \gamma_{l_i}$ , wenn  $\gamma = \delta_i^{-1}$ ,  $\eta(\gamma) = \gamma_1$ , wenn  $\gamma = e$  und für alle übrigen  $\gamma$ . Dann ist  $\sum' = \sum \psi_3(\gamma g; g) \geq \sum_{\gamma} \min(\psi(\eta(\gamma) x; g), \psi(\gamma \eta(\gamma) x; g)) \geq \sum_{\gamma=e} + \sum_{\gamma=\delta_i} + \sum_{\gamma=\delta_i^{-1}} = \psi(\gamma_1 x; g) + 2 \sum_{i \geq 2} \min(\psi(\gamma_{l_i} x; g), \psi(\gamma_{m_i} x; g)),$

also, da  $l_i \leq i, m_i \leq i$ ,

$$\sum \geq \psi(\gamma_1 x; g) + 2 \sum_{i \geq 2} \psi(\gamma_i x; g).$$

Da nun  $\psi_3(g; g) \geq \psi(\gamma_1 x; g)$ , so folgt

$$2 \psi_3(g, g) + \sum_{\gamma \neq e} \psi_3(\gamma g; g) = \psi_3(g, g) + \sum' \geq 2 \sum_{\gamma} \psi(\gamma x; g),$$

<sup>3)</sup> J. London Math. Soc. 22, 196—200 (1947).

also

$$(11) \quad \psi_3(g, g) + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \neq g} \psi_3(\gamma g; g) \geq \sum_{\gamma} \psi(\gamma x; g).$$

Aus (10) bzw. (11) und (4) folgt:

Satz 3: Ist  $\psi(x, y)$  eine  $\psi$ -Funktion,  $\psi_3(x, y)$  eine  $\psi$  zugeordnete  $\psi$ -Funktion, dann ist

$$(12) \quad \sum_{\gamma} \psi_3(\gamma g, g) \geq \frac{V(\psi(x; g))}{V(F)} = \frac{1}{V(F)} \int_R \psi(x; g) dx$$

bzw. wenn  $\Gamma$  die Eigenschaft  $U$  besitzt

$$(12') \quad \psi_3(g; g) + \frac{1}{2} \sum_{\gamma} \psi_3(\gamma g; g) \geq \frac{V(\psi(x; g))}{V(F)}.$$

Aus (10), (11) und (6) folgt:

Satz 4: Es seien  $l+1$   $\psi$ -Funktionen  $\psi_i(x, y)$  ( $i = 1, \dots, l+1$ ) gegeben. Es seien  $\psi_{i,k}(x, y)$   $\psi$ -Funktionen, welche  $\psi_i, \psi_k$  zugeordnet sind,  $\psi_i^*(x, y)$ , solche Funktionen, welche  $\psi_i$  zugeordnet sind. Es seien weiter  $l+1$  Punkte  $g_i$  gegeben, für welche alle  $\gamma g_i$  ( $i$  fest) voneinander verschieden sind, und es sei

$$(13) \quad \sum_{\gamma} \psi_i^*(\gamma g_i; g_i) \leq C_i \quad (i = 1, \dots, l+1)$$

bzw. wenn  $\Gamma$  die Eigenschaft  $U$  hat,

$$(13') \quad \psi_i^*(g_i, g_i) + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \neq g_i} \psi_i^*(\gamma g_i, g_i) \leq C_i \quad (i = 1, \dots, l+1).$$

Dann gibt es natürliche Zahlen  $i, k$  ( $1 \leq i < k \leq l+1$ ), so daß

$$(14) \quad \sum_{\gamma} \psi_{ik}(\gamma g_i, g_k) > \frac{1}{V(F) M l(l+1)} \left[ \left( \sum_{i=1}^{l+1} V_i \right)^2 - V(F) \sum_{i=1}^{l+1} C_i V_i \right],$$

wo  $M = \max_i V_i$ ,  $V_i = V(\psi(x, g_i)) = \int_R \psi(x, g_i) dx$  ( $1 \leq i \leq l+1$ ) ist.

Denn aus (9) folgt: Ist  $I(\Phi, \Psi) > C$ , so gibt es ein  $x$ , so daß  $\Phi(x) > \frac{C}{V(\Psi)}$

bzw. ein  $\bar{x}$ , so daß  $\psi(\bar{x}) > \frac{C}{V(\varphi)}$  ist.

Satz 4 vereinfacht sich, wenn  $l = 1$  ist. Dann lautet (14) einfach

$$(15) \quad \sum_{\gamma} \psi_{12}(\gamma g_1, g_2) \geq \frac{1}{V(F) M} [(V_1 + V_2)^2 - V(F) (C_1 V_1 + C_2 V_2)],$$

wo  $M = \max(V_1, V_2)$  ist.

Bemerkung: Eine obere Schranke für den Ausdruck links in (12) bzw. (12'), welche nur von  $V(\psi(x, g))$  abhängt, existiert nicht. Beschränken wir uns auf den  $R_m$ , so liefert der Deformationssatz<sup>1)</sup>, daß es zu jeder  $\varphi$ -Funktion ein Gitter  $\Gamma_0$  mit vorgeschriebener Determinante  $D(\Gamma_0)$  gibt, so daß für jedes  $\varepsilon > 0$   $\sum_{\gamma \neq 0} \varphi(\gamma_0) \leq \frac{V(\varphi)}{D} + \varepsilon$  ist. Ist  $\varphi(x)$  die charakteristische Funktion einer quadrierbaren Menge  $A$  und  $V(A) < kD$ , so ist die Anzahl der  $\gamma_0 \neq 0$

in  $A$ ,  $< k$ . Ist  $A$  Sternbereich, so gilt dies bereits, wenn

$$V(A) < k D \zeta(m) / \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^m}, \text{ wo } \zeta(m) \text{ die } \zeta\text{-Funktion ist.}$$

Das heißt also, wir verlangen, daß  $\frac{V}{D} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(j)}{j^m} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^m} < k$ .

Dann gibt es ein  $n$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß

$$\frac{V}{D} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_j^m}\right) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^m} + \varepsilon < k \quad (p_j = j\text{te Primzahl}).$$

Es ist  $\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_j^m}\right) = \sum_{s=1}^N \frac{\mu(s)}{s^m}$ , wo  $N = p_1 \dots p_n$  und  $s$  alle Zahlen der Ge-

stalt  $p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$  in  $[1, N]$  durchläuft. Wir bilden uns nun  $\sum_{s=1}^N \mu(s) \sum_{j=1}^k \varphi(sjx)$

$= \psi(x)$ , wo  $\varphi(x)$  die charakteristische Funktion des Sternbereiches  $A$  ist. Wir wenden nun auf  $\psi(x)$  den Deformationssatz an. Es ist  $V(\psi)$

$$= \sum_{s=1}^N \mu(s) \sum_{j=1}^k \int_{f(x) \leq \frac{1}{sj}} dx = \sum_{s=1}^N \frac{\mu(s)}{s^m} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^m} V(A). \text{ Es gibt also ein Gitter}$$

$\Gamma_0$ , so daß  $\sum_{\gamma \neq 0} V(\gamma_0) < k$ . Das heißt aber, es gibt höchstens  $k-1$  Gitterpunkte

$\neq 0$  in  $A$ , deren größter gemeinschaftlicher Teiler  $(g \cdot g \cdot T)$  von der Gestalt  $ru$  ( $1 \leq r \leq k$ ) und  $u$  nicht teilbar durch  $p_1, \dots, p_n$  ist. Daher ist die Anzahl der Gitterpunkte mit einem  $g \cdot g \cdot T \leq k$  höchstens  $k-1$ . Dann ist aber die Anzahl aller Gitterpunkte  $\neq 0$  in  $A$  ebenfalls höchstens  $k-1$ , denn gebe es noch weitere, so müßten ihre  $g \cdot g \cdot T \geq k+1$  sein. Dann würden aber, wenn  $\gamma_0$  ein solcher Gitterpunkt ist, die  $k$  Gitterpunkte  $\frac{j}{k+1} \cdot \gamma_0$  in  $A$  liegen. Also würden dann mindestens  $k$ -Gitterpunkte mit einem  $g \cdot g \cdot T \leq k$  in  $A$  liegen. Das ist ein Widerspruch.

§ 3. Wir wollen nun (12), (12'), (14) noch weiter spezialisieren. Es sei  $f(x, y)$  eine  $\psi$ -Funktion, es sei  $f(x, y) = f(y, x)$  und es gelte weiter für jedes  $z$

$$(16) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y).$$

Den Bereich  $f(x, y) \leq r$  ( $y$  fest,  $r > 0$ ) nennen wir den konvexen Körper  $K(y, r)$ ,  $y$  seinen Mittelpunkt. Sein Volumen, welches vorhanden sein soll, bezeichnen wir mit  $V(K(y, r)) = V(y, r)$  und es sei  $> 0$ . Seine charakteristische Funktion bezeichnen wir mit  $\varphi_r(x, y)$ . Dann ist bei festem  $r$   $\varphi_r$  eine  $\psi$ -Funktion und  $\varphi_{2r}$  die zugeordnete  $\psi$ -Funktion. Aus (16) folgt noch  $f(x, x) \leq 2f(x, z)$  für alle  $z$ . Dann folgt aus (12) der MINKOWSKISCHE Satz.

Satz 5: Ist  $V\left(K\left(g_0, \frac{r}{2}\right)\right) > V(F)$ , so gibt es einen Gitterpunkt  $\gamma g_0$  in  $G(\Gamma; g_0)$ , verschieden von  $g_0$ , so daß

$$f(\gamma g_0, g_0) \leq r \text{ ist.}$$

Aus (14) folgt Satz 6: Enthält für  $i = 1, \dots, l+1$   $K(g_i; r)$  ( $i = 1, \dots, l+1$ ) keinen Gitterpunkt  $\gamma g_i \neq g_i$  von  $G(\Gamma; g_i)$ , ist weiter

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{l+1} V\left(K\left(g_i, \frac{r}{2}\right)\right) > V(F),$$

so gibt es ein  $i$  und ein  $k$  mit  $1 \leq i < k \leq l+1$ , so daß

$$(18) \quad f(\gamma g_i, g_k) < r$$

ist. Hängt  $V(K(g, r))$  von  $g$  nicht ab, so können wir kurz  $V(r)$  schreiben und (17) wird

$$(19) \quad V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right) > \frac{V(F)}{l+1}.$$

Daraus können wir jetzt folgendes Resultat herleiten, wenn wir über  $f(x, y)$  mehr als (16) voraussetzen. Wir wollen noch voraussetzen, daß  $f(x, x) = 0$  und daß der Raum  $R$  in bezug auf  $f(x, y)$  konvex<sup>4)</sup> ist, d. h. daß es zu zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  in  $R$  einen Zwischenpunkt  $z$  verschieden von  $x, y$  gibt, so daß

$$(20) \quad f(x, z) + f(z, y) = f(x, y).$$

Es sei  $g$  ein Punkt und  $\text{Min } f(\gamma g, g_1) = s$ . Das Minimum werde für  $\bar{\gamma}$  angenommen. Wir bestimmen nun  $l+1$  Punkte  $t_i$ , so daß

$$1. \ t_1 = g_1, \ t_{l+1} = \bar{\gamma} g \text{ und } 2. \ f(t_i, t_{i+1}) = \frac{s}{l} \text{ ist. Dann folgt aus (18), wo o. B. d. A. } i > k, \\ f(t_{i+1}, \gamma^{-1} t_1) \leq f(t_{i+1}, t_i) + f(t_i, \gamma^{-1} t_k) + f(\gamma^{-1} t_k, \gamma^{-1} t_1) \\ \leq \frac{s(l+1-i)}{l} + r + \frac{s(k-1)}{l} = \frac{s(l-i+k)}{l} + r,$$

also  $s \leq \frac{s(l-1)}{l} + r$ , d. h.  $s \leq r l$ , daher gibt es ein  $\gamma$ , so daß

$$(21) \quad f(g, \gamma g_1) \leq r l$$

ist. Dann gilt also

Satz 6: Ist  $R$  gegenüber  $\Gamma$  fixpunktfrei, konvex in bezug auf  $f(x, y)$  und hängt das Volumen von  $f(x, g) \leq r$  nur von  $r$  ab, so gibt es stets zu zwei Punkten  $g, g_1$  in  $R$  ein  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , so daß

$$(22) \quad f(g, \gamma g_1) \leq \left\{ \frac{V(F)}{V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \right\} r,$$

wo  $\{x\}$  die nächstgrößere ganze Zahl an  $x$  bedeutet und  $f(x, g_1) \leq r$  keinen Punkt  $\gamma g_1 \neq g_1$  für alle  $g_1$  aus  $R$  enthält. Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, daß es Fixpunkte gibt. Es sei  $C$  die größte Ordnung, welche auftritt. Dann müssen wir auf (14) zurückgreifen, und statt (19) gilt jetzt

$$(19') \quad V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right) > \frac{C V(F)}{l+1},$$

und statt (22) haben wir jetzt\*)

$$(23) \quad f(g_1, \gamma g) \leq \left\{ \frac{C V(F)}{V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \right\} r.$$

<sup>4)</sup> Vgl. dazu MENGER, K.: Math. Ann. 100, S. 75—163 (1927), insb. S. 75—87.

<sup>\*</sup>) Wenn  $f(x, g) \leq r$  keinen Punkt  $\gamma g \neq g$  für jedes  $g$  enthält.

Das Volumen von  $f(x, g) \leq r$  hängt sicher nicht von  $R$  ab, wenn  $\Gamma$  als topologische Automorphismengruppe von  $R$ , Untergruppe einer transitiven topologischen Gruppe von  $R$  ist, welche maßinvariant und in bezug auf  $f$  isometrisch ist.

§ 4. Ist  $R = R_m$  und  $\Gamma$  die Gruppe der Gittertranslationen, so können wir (22) verschärfen. Es ist jetzt  $f(x, y) = f(x - y)$ . Wir betrachten jetzt die Punkte  $t_i = \frac{2i(g + \bar{y})}{l+1}$ , wo  $s = f(g + \bar{y}) = \text{Min } f(g + \gamma)$ ,  $g_1 = 0$  und  $i = 0, 1, \dots, l$  ist. Enthält nun  $f(x) \leq r$  keinen Gitterpunkt  $\gamma \neq 0$ , so folgt aus (18), (die Annahme (18) bleibt hier richtig, wenn in (19) das Gleichheitszeichen gilt, wie man in geläufiger Weise zeigt), daß es ein  $i, k$  und ein  $\gamma$  gibt, so daß, wenn  $\bar{g} = g + \bar{y}$ ,

$$f(t_i - t_k - \gamma) = f\left(\frac{2(i-k)\bar{g}}{l+1} - \gamma\right) \leq r.$$

Es muß  $i - k = j \geq 1$  sein. Dann ist

$$s \leq f(\bar{g} - \gamma) \leq f\left(\bar{g} - \frac{2j\bar{g}}{l+1}\right) + f\left(\frac{2j\bar{g}}{l+1} - \gamma\right) \leq \frac{|l+1-2j|s}{l+1} + r \leq \frac{(l-1)s}{l+1} + r,$$

also  $s \leq \frac{l+1}{2} r$ .

Bezeichnen wir das Volumen von  $f(x) \leq 1$  mit  $I$ , führen wir das erste Minimum  $M_1(\Gamma) = r$  ein, so folgt also aus  $I M_1^m \geq \frac{2^m D}{l+1}$ , wo  $D(\Gamma)$  die Determinante des Gitters  $= V(F)$  ist, für  $l \geq 1$ , daß es zu jedem Punkt  $g$  des  $R_m$  einen Gitterpunkt  $\gamma$  gibt, so daß

$$(25) \quad f(g - \gamma) \leq \frac{l+1}{2} M_1$$

st. Für  $l = 0$  ist es nach Satz 2 auch richtig. Man kann (25) auch so schreiben

$$(26) \quad f(g - \gamma) \leq \frac{M_1}{2} \left\{ \frac{2^m D}{I M_1^m} \right\},$$

wo  $\{x\}$  wieder die obige Bedeutung hat.

Diese Abschätzung ist in  $M_1$  schärfer als jene, welche durch Betrachtung sämtlicher  $M_1, \dots, M_m$  gewöhnlich gewonnen wird<sup>5)</sup>. Hier geht man aus von der Abschätzung

$$f(g - \gamma) \leq \frac{1}{2} (M_1 + \dots + M_m).$$

Benützt man, daß  $I M_1 \dots M_m \leq 2^m D$  ist und  $M_1 \leq \dots \leq M_m$ , so folgt daraus

$$(27) \quad f(g - \gamma) \leq \frac{1}{2} \left( (m-1) + \frac{2^m D}{I M_1^m} \right) M_1.$$

Es ist aber  $m-1 + \frac{2^m D}{I M_1^m} > \left\{ \frac{2^m D}{I M_1^m} \right\}$  für  $m > 1$ .

Man kann aber (26) verschärfen, wenn man auch die übrigen Minima ins Spiel bringt:

<sup>5)</sup> MAHLER, K.: Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 41, 634–637; HLAWKA, E.: Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. 155, S. 63–73; STÖRMER, H., u. G. WALTER: Arch. Math. 1949, 346 bis 348.

Es sei, wenn  $K(q)$  der konvexe Körper  $f(x) \leq q$  ist,  $K\left(\frac{M_n}{2}\right) = K$  und  $\varphi(x)$  seine charakteristische Funktion. Sind  $g_i$  ( $i = 0, 1, \dots, l$ ) wieder  $l+1$  Punkte des  $R_m$ , so sei  $\varphi_i(x) = \varphi(x + g_i)$  und  $\psi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^l (1 - \varphi_i(x - \gamma))$ . Es ist  $\psi_i(x) \leq 1$ . Dann zeigt man analog zum Beweis von (6), wenn  $I = I(\psi_i) = \int_F \psi_i(x) dx$ , daß es ein  $i$  und ein  $k$  gibt ( $i \neq k$ ), so daß

$$I_{ik} = \int_F \psi_i(x) \psi_k(x) dx \geq \frac{1}{V(F)l(l+1)} \sum_{i=1}^{l+1} I(\psi_i) (\Sigma I(\psi_i) - V(F))$$

ist. Es ist also  $I_{ik} > 0$ , wenn  $\Sigma I(\psi) > V(F)$ . Nun ist aber<sup>4)</sup>  $I(\psi_i) \geq \frac{M_1 \dots M_m}{2^m} J$ ,

also ist  $I_{ik} > 0$ , wenn  $M_1 \dots M_m I > \frac{2^m D(I)}{l+1}$ . Dann muß es aber ein  $\gamma$  geben, so daß  $f(g_i - g_k - \gamma) \leq M_m$  ist. Geht man so vor, wie bei (26), so erhält man

$$(28) \quad f(g - \gamma) \leq \left\{ \frac{2^m D(I)}{M_1 \dots M_m I} \right\} \frac{M_m}{2},$$

und dies ist eine Vertiefung von (26).

Wir wollen (18) und damit (26) für Kugeln des  $R_m$  verschärfen. Dazu führt uns die Überlegung, daß wir (18) auch direkt aus (2) herleiten können. Liegen  $l+1$  Funktionen  $\varphi_i$  vor, ist  $\Phi_i(x) \leq C$  für ( $i = 1, \dots, l+1$ ), so ist

$$\int_F \sum_i \Phi_i(x) dx = \sum V_i(x) - V(F)C + V(F)C.$$

Ist also

$$(29) \quad \Sigma V_i(x) > V(F)C,$$

so muß es zwei Zahlen  $i$  und  $k$  geben ( $1 \leq k < i \leq l+1$ ), so daß

$$(30) \quad \Phi_i(x) \Phi_k(x) > 0.$$

Sind  $\varphi_i$  die charakteristischen Funktionen von  $K(g_i, r/2)$ , enthält  $K(g_i, r)$  keinen Gitterpunkt  $\neq g_i$  in  $G(I, g_i)$ , so ist  $C = 1$  und es folgt wieder (18).

Wir wollen nun im  $R_m$   $\varphi_i(x) = (r^2/2 - f^2(x - g_i)) \varphi(x - g_i)$  nehmen, wo die charakteristische Funktion der Kugel  $f(x) \leq r/\sqrt{2}$  ist. Es enthalte weiter  $f(x) \leq r$  keinen Gitterpunkt, also stets gelte  $f(\gamma) \geq r$  für alle Gitterpunkte  $\gamma \neq 0$ . Dann gilt für  $k$  Punkte  $x_1, \dots, x_k$

$$(31) \quad \sum_{i \neq j} f^2(x_i - x_j) \leq 2k \sum_{j=1}^k f^2(x_j).$$

Bilden wir nun  $\Phi_i = \sum_j \varphi_i(x + \gamma)$ , so ist stets  $\Phi_i(x) \leq r^2/2$ . Enthält nämlich  $\Phi_i$   $k$  nicht verschwindende Summanden, so ist nach (31)

$$r^2 k(k-1) \leq 2k \sum_{j=1}^k f^2(x - \gamma_j - g_i),$$

also  $\Phi_i < r^2/2 k - r^2/2 (k-1) = r^2/2$ . Weiter ist  $\int_R \varphi_i(x) dx = \int_{f \leq r/\sqrt{2}} (r^2/2 - f^2(x)) dx = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{m+2} I \frac{2}{m+2}$ , wo  $I$  das Volumen der Einheitskugel

<sup>4)</sup> Vgl. z. B. WEYL, H.: Proc. London Math. Soc. (2) 47, S. 268–289 (1942).

$f(x) \leq 1$  ist. Dann wird nach (2)

$$(32) \quad \int_F \Sigma \Phi_i(x) dx = (l+1) I \frac{2}{m+2} \left( \frac{r}{\sqrt{2}} \right)^{m+2} - \frac{r^2}{2} V(F) + \frac{r^2}{2} V(F).$$

Ist also

$$(33) \quad I r^m > \frac{V(F)}{l+1} \frac{2^{\frac{m}{2}} (m+2)}{2},$$

so gibt es ein  $x$ , so daß

$$\Sigma \Phi_i(x) = \sum_{i,j} \left( \frac{r^2}{2} - f^2(x - g_i - \gamma) \right) \varphi(x - g_i - \gamma) > \frac{r^2}{2} \text{ ist.}$$

Bezeichnen wir die Anzahl der  $\gamma$  für die  $\varphi_i \neq 0$  mit  $k_i$ , so ist

$$\sum_i \sum_{j=1}^{k_i} f^2(x - g_i - \gamma_{ij}) < \frac{r^2}{2} (\Sigma k_i - 1).$$

Dann folgt aus (31), daß

$$\Sigma f^2(g_i - g_k - \gamma) \leq r^2 (\Sigma k_i) (\Sigma k_i - 1),$$

also muß es, da links  $(\Sigma k_i) (\Sigma k_i - 1)$  Summanden stehen, mindestens ein  $\gamma$  geben, so daß  $f^2(g_i - g_k - \gamma) \leq r^2$  ist. Daraus folgt wieder<sup>7)</sup>, analog zu (26)

$$(26') \quad f(g - \gamma) \leq \frac{M_1}{2} \left\{ \frac{2^{\frac{m}{2}} (m+2) D}{2 I M_1^m} \right\},$$

und das ist für  $m > 2$  schärfer als (26).

Aus (32) folgt für  $l = 0$   $\int_F \Phi(x) dx = \frac{2I}{m+2} \left( \frac{r}{\sqrt{2}} \right)^{m+2}$  und es folgt unter Benützung von (31) in geläufiger Weise der BLICHFELDSche Satz für  $r = M_1$ .

$$(26'') \quad I M_1^m \leq \frac{2^{\frac{m}{2}} (m+2) D}{2}.$$

Eine Verschärfung von (26) läßt sich auch durchführen, wenn

$$f(x) = (|x_1|^k + \dots + |x_m|^k)^{\frac{1}{k}} \quad (k \geq 1).$$

§ 5. In diesem und im nächsten Paragraphen setzen wir voraus, daß  $R$  eine Gruppe,  $\Gamma$  Untergruppe von  $R$  ist. Dann ist eine  $\varphi$ -Funktion im Sinne von § 2  $\varphi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$ , und ist  $\varphi_3(y^{-1}x) \geq \min(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ , so ist  $\varphi_3(y^{-1}x)$  zu  $\varphi_1(x, y) = \varphi_1(y^{-1}x)$  und  $\varphi_2(x, y) = \varphi_2(y^{-1}x)$  zugeordnet, wenn die  $\varphi_i$ -Funktionen sind.

Wir wollen gleich noch annehmen, daß  $\Gamma$  Normalteiler von  $R$  ist. Dann ist nach (9'), wenn  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^N \varphi(t_i, x)$  ist ( $t_1, \dots, t_N$  Elemente von  $R$ ),

$$\int_F \left( \Phi(x) - \frac{V(\varphi)}{V(F)} \right)^2 dx = \int_R \varphi(x) \left( \Phi(x) - \frac{V(\varphi)}{V(F)} \right) dx.$$

<sup>7)</sup> Ein Spezialfall wurde vom Verf. in der ersten Arbeit in <sup>1)</sup> bewiesen.



Die rechte Seite ist aber weiter gleich, wenn wir setzen

$$\begin{aligned}\varphi^*(x) &= \sum_{i,j=1}^N \psi(t_i t_j^{-1} x), \\ D(\varphi) &= \Phi(x) - \frac{V(\varphi)}{V(F)}, \quad D(\varphi^*) = \Phi^*(x) - \frac{V(\varphi^*)}{V(F)}, \\ \sum_{i=1}^N \int_R \psi(t_i x) \left( \sum_{\gamma} \sum_{j=1}^N \psi(\gamma t_j x) - \frac{V(\psi)N}{V(F)} \right) dx &= \sum_{i=1}^N \int_R \psi(x) \times \\ &\times \left( \sum_{\gamma} \sum_{j=1}^N (\gamma t_i t_j^{-1} x) - \frac{V(\psi)N}{V(F)} \right) dx = \int_R \psi(x) D(\varphi^*) dx,\end{aligned}$$

also

$$(34) \quad \int_F D^2(\varphi) dx = \int_R \psi(x) D(\varphi^*) dx.$$

Nun schließen wir nach KOKSMA<sup>a)</sup>: Gibt es ein  $C$ , so daß für alle  $x$   $|D(\varphi)|^* \leq C$ , so folgt aus (34)  $\int_F D^2(\varphi) dx \leq C V(\psi)$ . Es ist also das Volumen  $V(B)$

der Punkte  $x$  in  $F$ , für die  $|D(\varphi)| > \sqrt{C V(\psi) \alpha}$ , ( $0 < \alpha$  beliebig),  $< 1/\alpha$ . Es ist also für alle  $x$  von  $F$ , ausgenommen eine Menge vom Maß  $< 1/\alpha$ ,

$$|D(\varphi)| \leq \sqrt{C V(\psi) \alpha},$$

das heißt

$$(35) \quad \frac{N V(\psi)}{V(F)} - \sqrt{C V(\psi) \alpha} < \sum_{i=1}^N \sum_{\gamma} \psi(t_i \gamma x) < \frac{N V(\psi)}{V(F)} + \sqrt{C V(\psi) \alpha}.$$

Ist nun eine Folge  $\{t_i\}$  von Punkten von  $R$  gegeben, ist  $\alpha = \alpha(N)$  so beschaffen, daß  $\alpha(N) \rightarrow \infty$ , ist stets für jedes  $N$   $D(\varphi^*) < C$ , so gibt es eine Teilfolge  $\{N_i\}$ , so daß für alle  $x$  aus  $F$  bis auf eine Menge vom Maße 0

$$(36) \quad \left| \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{\gamma} \psi(t_j \gamma x) - \frac{N_i V(\psi)}{V(F)} \right| < \sqrt{C V(\psi) \alpha(N_i)}$$

für  $i = 1, 2, \dots$  ist. Es genügt, die Teilfolge so zu wählen, daß  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(N_i)} < \infty$  ist. Dann ist das Maß der  $x$ , welche (36) nicht erfüllen, bei vorgegebenen  $\varepsilon > 0$ , bei passenden  $n_0$ ,  $< \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(N_i)} < \varepsilon$ , w. z. b. w.

Aus § 1 (8) folgt noch: Ist  $A$  eine meßbare Menge,  $\mathfrak{A}(I)$  disjunkt, ist  $\varphi_1 = \varphi(x)$  charakteristische Funktion von  $A$ ,  $\varphi_2(x) = \varphi(y^{-1}x)$ ,  $V(\varphi) = V(F)$ , so folgt aus (8):  $V(A) \geq I_{12} \geq V(A)$ , also  $I_{12} = V(A)$ . Dies setzt Satz 2 aus § 2 erneut in Evidenz.

§ 6. Wir wollen jetzt einige Anwendungen von (18) betrachten. Wenn  $f(e) = 0$ ,  $f(x) = f(x^{-1})$  und  $f(x, y) = f(x^{-1}y)$  und  $f(x^{-1}y) \leq f(x) + f(y)$  ist, lautet Satz 6 jetzt so: Liegen  $l+1$  Punkte  $t_i$  vor, enthält  $f(\gamma) \leq r$  kein Element  $\neq e$  von  $\Gamma$ , ist  $V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right) = V\left(\frac{r}{2}\right) \geq \frac{V(F)}{l+1}$ , so gibt es ein  $i$  und ein  $k$  ( $1 \leq k < i \leq l+1$ ) und ein  $\gamma$ , so daß

$$(37) \quad f(t_k^{-1} t_i \gamma) \leq r$$

ist. Unter  $\left\{ \frac{V(F)}{V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \right\}$  Elementen  $t_i$  gibt es also ein Paar, welches (37) erfüllt.

<sup>a)</sup> Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 44, S. 75—80.

Ist nun  $t_i = t^i$ , dann liefert (37)

Satz 6: Es gibt zu jedem  $r > 0$  stets ein  $\gamma$  von  $\Gamma$  und ein  $s$  mit  $0 \leq s \leq u(1/r)$ ,

$$u\left(\frac{1}{r}\right) = \left\{ \frac{V(F)}{V\left(K\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \right\}$$

so daß

$$(38) \quad f(t^s \gamma) \leq r$$

ist, wo nicht zugleich  $s = 0$ ,  $\gamma = e$  ist.

Denn enthält  $f(x) \leq r$  ein  $\gamma \neq e$ , so nehmen wir  $s = 0$ , und sonst wenden wir (37) an. Für den  $R_m$  folgt dies aus dem MINKOWSKISCHEN Fundamentalsatz, angewendet auf den konvexen Körper in  $R_{m+1}$  mit der Distanzfunktion  $\text{Max}(f(x_1 \dots x_m, |x_{m+1}|))$ . Wir wollen nun einen analogen Satz herleiten für  $f(t^k \gamma) \leq r$  ( $k > 1$  ganz). Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf  $k = 2$  und folgen der Methode von NORTON<sup>9)</sup> und KHEINTCHINE<sup>10)</sup>.

Enthält  $f(\gamma) \leq r$  ein  $\gamma \neq e$ , so setzen wir einfach  $s = 0$ . Wir können also annehmen, daß  $f(x) \leq r$  kein  $\gamma \neq e$  enthält. Es gibt nach (38) ein  $s_1 > 0$ , so daß  $f(t^{s_1} \gamma_1) \leq r$ . Es sei  $s_1$  minimal. Dann definieren wir rekursiv ganze Zahlen  $s_i > 0$  als kleinste Zahlen, für die  $f(t^{s_i} \gamma_i) \leq \frac{r}{s_{i-1} 3^{s_{i-1}}}$  ( $s_0 = 1$ ), wo  $u = u(3/r)$ . Es muß  $s_i \geq s_{i-1}$  sein. Denn ist dies für  $i$  richtig, dann auch für  $i + 1$ . Denn wäre  $s_{i+1} < s_i$ , so wäre  $f(t^{s_{i+1}} \gamma_{i+1}) \leq \frac{r}{3^{s_i} s_i} \leq \frac{r}{3^{s_i} s_{i-1}}$ , also  $s_i$  nicht minimal. Weiter ist  $s_i \leq u\left(3 u^2 \frac{s_{i-1}}{r}\right)$ . Nun setzen wir  $\sum_{i=0}^j s_i = S_j$  und betrachten die Punkte  $t^{S_j}$  ( $j = 0, 1, \dots, u(3/r)$ ). Dann gibt es nach (37) ein  $i$  und ein  $j$  ( $i > j$ ), so daß

$$(39) \quad f(t^{S_i - S_j} \gamma) \leq \frac{r}{3}.$$

$$\text{Nun ist } S_i^2 - S_j^2 = \left( \sum_{k=j+1}^i s_k \right)^2 + 2 S_j \sum_{k=j+1}^i s_k.$$

Dann können wir, wenn wir  $\sum_{k=j+1}^i s_k = s$  setzen, (39) schreiben:

$$f(t^{s^2} \prod_{k=j+1}^i (t^{s_k} \gamma_k)^{2 S_j} \bar{\gamma}) \leq \frac{r}{3}.$$

Also

$$\begin{aligned} f(t^{s^2} \bar{\gamma}) &\leq \frac{r}{3} + 2 S_j \sum_{k=j+1}^i f(t^{s_k} \gamma_k) \leq r \left[ \frac{1}{3} + \frac{2 S_j}{3 u^3} \sum_{k=j}^i \frac{1}{s_k} \right] \leq r \times \\ &\times \left[ \frac{1}{3} + \frac{2(j+1) s_j i}{3 u^3 s_j} \right] = r \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right] = r. \end{aligned}$$

Dabei ist  $s \geq 1$ . Es ist noch

$$f\left(t^{\sum_{k=j+1}^i s_k} \left(t^{s_k} \gamma_k\right)\right) \leq \frac{r}{3 u^3} \sum_{k=j}^i \frac{1}{s_k} \leq \frac{r}{3 u}.$$

<sup>9)</sup> Proc. London Math. Soc. (2) 16, S. 294—300 (1917).

<sup>10)</sup> Rec. math. Soc. math. (Moskau) 34, S. 109—112 (1927).

Um  $s$  abzuschätzen, beachten wir, daß  $s_i \leq u \left( 3 u^2 \frac{s_i - 1}{r} \right)$ . Definieren wir  $u_i(3/r)$  durch  $u_i(3/r) = u(3/r) u^2(3/r) u_{i-1}(3/r)$ ,  $u_0(3/r) = 1$ , so ist  $s_i \leq u_i(3/r)$ , also  $1 \leq s \leq i s_i \leq u \left( \frac{3}{r} \right) s_u \left( \frac{3}{r} \right) \leq u \left( \frac{3}{r} \right) u_u \left( \frac{3}{r} \right) \left( \frac{3}{r} \right)$ .

Wir erhalten Satz 7: Es gibt stets ein  $s$  und ein  $\gamma$ , so daß nicht zugleich  $s = 0$ ,  $\gamma = e$ , so daß

$$(40) \quad f(t^s \gamma) \leq r$$

$$(41) \quad 0 \leq s \leq u_u \left( \frac{3}{r} \right) u \left( \frac{3}{r} \right),$$

wo  $u \left( \frac{1}{r} \right) = \left\{ \frac{V(F)}{V \left( K \left( \frac{r}{2} \right) \right)} \right\}$ ,  $u_k \left( \frac{3}{r} \right) = u \left( \frac{3}{r} u^2 \left( \frac{3}{r} \right) u_{k-1} \left( \frac{3}{r} \right) \right)$ ,  $u_0 \left( \frac{3}{r} \right) = 1$  ist.

Es gibt noch ein  $\bar{\gamma}$ , so daß

$$(42) \quad f(t^s \bar{\gamma}) \leq \frac{r}{3 u \left( \frac{3}{r} \right)} \text{ ist.}$$

Ist  $R = R_m$ ,  $I$  der Inhalt von  $f \leq 1$ , so ist  $s_i \leq C s_{i-1}^m$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), wo

$C = \left( \frac{6^m D}{I r^m} \right)^{2m+1}$ , also  $s_i \leq C^{m^i + m^{i-1} + \dots + 1}$ , da  $u \left( \frac{3}{r} \right) = \left\{ \frac{6^m D}{I r^m} \right\}$  ist. Also

gibt es einen Gitterpunkt  $\gamma$  des Gitters  $\Gamma$  mit der Determinante  $D$  und eine ganze Zahl  $s$  mit  $0 \leq s \leq v(r) a$ , wo  $v(r) = a^{(2m+1)(m^2 + m^2 - 1 + \dots + 1)}$  ( $a$  gleich nächstgrößere ganze Zahl an  $\frac{6^m D}{I r^m}$ ), wenn  $I r^m \leq 6^m D$ , sonst  $v(r) = 0$ , so daß nicht zugleich  $s = 0$ ,  $\gamma = 0$  und

$$(43) \quad f(s^2 t - \gamma) \leq r$$

ist, wo  $t$  beliebig. Oder anders formuliert:

Es gibt ein  $\gamma$  und ein  $s(\gamma, s) \neq (0, 0)$ , so daß  $0 \leq s \leq \varrho^{(2m+1)(m^2 + m^2 - 1 + \dots + 1) + 1}$  und

$$(44) \quad f(s^2 t - \gamma) \leq \frac{6 D^{\frac{1}{m}}}{I^{\frac{1}{m}} \varrho^{\frac{1}{m}}}$$

für jedes ganze  $\varrho \geq 1$ .

Die höheren Potenzen lassen sich analog behandeln. Erweiterungen auf den Fall  $f(t_1^{s_1} t_2^{s_2} \dots t_r^{s_r} \gamma)$  u. a. sollen an anderer Stelle durchgeführt werden.

§ 7. Es liege wieder der allgemeine Sachverhalt wie in § 1 vor, d. h. es werde nicht vorausgesetzt, daß  $R$  eine Gruppe ist. Es sei nun  $\Gamma_0$  eine Untergruppe von  $\Gamma$  (ihre Elemente seien  $\gamma^0$ ) mit endlichem Index  $[\Gamma : \Gamma_0] = s$ , und es werde  $\Gamma$  nach rechtsseitigen Restklassen von  $\Gamma_0$  entwickelt:  $\Gamma = \Gamma_0 \gamma_1 + \dots$

$+ \Gamma_0 \gamma_s$ . Dann sieht man sofort, daß  $F_0 = \bigcup_{i=1}^s \gamma_i F$  Fundamentalbereich von

$\Gamma_0$  ist, wo  $F$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$  ist, denn jeder Punkt  $x$  von  $R$  liegt in einem  $\gamma F$ , also in einem  $\gamma^0 F_0$ , und die  $\gamma^0 F_0$  sind disjunkt. Dann

folgt aus (3) und der anschließenden Bemerkung: Sind die Figuren eines Figurengitters  $\mathfrak{A}[\Gamma_0]$  disjunkt, so ist

$$(45) \quad V(A) \leq V(F_0) = s V(F).$$

Wir können Untergruppen  $\Gamma_0$  von  $\Gamma$  in folgender Weise erhalten: Es liege eine Menge  $M$  von  $t$  Elementen vor (die Elemente müssen weder in  $R$  noch in  $\Gamma$  liegen), und es sei  $\Gamma$  in  $M$  abgebildet. Dabei soll es ein Element  $m_0$  in  $M$  geben, so daß folgendes gilt. Haben irgend zwei Elemente  $\gamma_1, \gamma_2$  von  $\Gamma$  dasselbe Bild in  $M$ , dann soll stets  $\gamma_1, \gamma_2^{-1}$  auf  $m_0$  abgebildet werden. Dann bilden die  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , welche auf  $m_0$  abgebildet werden, eine Gruppe  $\Gamma_0$ . Die Gruppe  $\Gamma_0$  ist von endlichem Index in  $\Gamma$ , und zwar ist  $e \leq t$ , denn Elemente  $\gamma$  von  $\Gamma$  mit gleichem Bild liegen in der gleichen Restklasse von  $\Gamma_0$ . Es ist dann

$$(46) \quad V(F_0) \leq t V(F).$$

Es liege nun ein Satz über  $\Gamma$  vor, und es gäbe eine positive Zahl  $T$ , so beschaffen, daß der Satz für alle  $\Gamma$  richtig ist, für die  $V(F(\Gamma)) \leq T$  bzw.  $< T$  ist. Dann ist er auch richtig für die obige Untergruppe  $\Gamma_0$  von  $\Gamma$ , wenn  $V(F(\Gamma)) \leq T/t$  (bzw.  $< T/t$ ) ist, denn dann ist  $V(F(\Gamma_0)) \leq T$ . Wir wollen diese Aussage das Übertragungsprinzip von  $\Gamma$  nach  $\Gamma_0$  nennen und<sup>11)</sup> wollen einige Beispiele geben.

1. Es sei  $C^{(s,m)}$  eine ganzzahlige Matrix in  $s$  Zeilen und  $m$  Spalten ( $s < m$ ), dann sei  $M$  die Menge der Restklassen  $C^{(s,m)} g^{(m)}$  modulo  $n$  ( $n > 1$ , ganz), wo  $g$  alle Punkte des  $R_m$  mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.  $M$  besteht aus  $n^s$  Elementen. Es sei  $\Gamma$  das Würfelgitter des  $R_m$  mit der Determinante 1, d. h. die Menge aller  $g$ . Ordnen wir jedem  $g$  die Restklassen  $C^{(s,m)} g^{(m)}$  modulo  $n$  zu, dann haben wir eine Abbildung der obigen Art, und die Untergruppe  $\Gamma_0$  der  $g$ , für welche  $Cg = 0 \pmod{n}$ , hat in  $\Gamma$  einen Index  $\leq n^s$ . Nun ziehen wir den MINKOWSKISCHEN Satz (Satz 4) heran. Hier ist  $T = V(K(r/2))$  das Volumen des konvexen Körpers  $f(x) \leq r/2$ , und wir können daher nach dem Übertragungsprinzip schließen:

Es gibt stets einen Gitterpunkt  $g \neq 0$ , so daß

$$f(g) \leq r, \quad Cg = 0 \pmod{n},$$

wenn  $I r^m \geq 2^m n^s$  ist. ( $I$  Volumen von  $f(x) \leq 1$ ).

Ein Spezialfall ist der Satz von THUE<sup>12)</sup>: Es gibt stets ganze Zahlen  $(g_1, g_2) \neq (0, 0)$ , so daß  $\text{Max}(|g_1|, |g_2|) \leq \sqrt{p} \, a \, g_1 = g_2 \pmod{p}$  ist ( $p$  Primzahl,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ), denn dann ist  $I = 4$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1$ ,  $n = p$ .

2. Es mögen wieder dieselben Bezeichnungen wie bei dem 1. Beispiel gelten. Wir nehmen jetzt aber an, daß für jeden  $s$ -zeiligen, ganzzahligen Vektor  $h^{(s)}$  das System  $C^{(s,m)} g^{(m)} = h^{(s)} \pmod{n}$  lösbar sei und daß es ein  $r_0$  gebe, so daß das System  $C^{(s,m)} g^{(m)} \equiv 0 \pmod{n}$  keine nichttriviale Lösung mit  $f(g)$

$\leq r_0 n^{\frac{s}{m}}$  besitze. Dann folgt nach (26), wo jetzt  $\Gamma$  durch  $\Gamma_0$  zu ersetzen ist,

<sup>11)</sup> Für den MINKOWSKISCHEN Fundamentalsatz wurde dieses Prinzip in spezieller Gestalt explizit ausgesprochen von L. REDEI, Acta Math. 84, S. 155–158 (1950). Allgemeiner dann vom Verf. in der dritten Arbeit in <sup>1)</sup> und in der Besprechung der Arbeit von L. REDEI im Zbl., Bd. 37, S. 32 (1951). In Spezialfällen wurde dieses Prinzip schon öfters angewendet, vgl. z. B. H. DAVENPORT u. M. HALL, Quart. J. 19 (1948).

<sup>12)</sup> Vgl. z. B. SCHOLZ: Zahlentheorie, wo dieser Satz mit dem Schubfachprinzip bewiesen wird. Verallgemeinerungen wurden mit Hilfe desselben Prinzips von A. BRAUER u. R. J. REYNOLDS, Canad. J. 3, S. 367–374 (1951) gegeben. Unter Anwendung des Übertragungsprinzips bewies dies L. REDEI<sup>11)</sup>.

wo  $M_1 = r_0 \frac{s}{n^m}$  ist, daß es zu jedem Punkt  $u$  des  $R_m$  ein  $g$  gibt, so daß

$$f(u - g) \leq \frac{r_0 \frac{s}{n^m}}{2} \left\{ \frac{2^m}{I r_0^m} \right\}, \quad Cg = 0(n) \text{ ist.}$$

Bestimmen wir jetzt zu einem  $h(n)$  ein  $u$ , so daß  $Cu = h(n)$  ist, so folgt folgender Satz:

Besitzt  $Cg = 0(u)$  keine nichttriviale Lösung  $g$  mit  $f(g) \leq r_0 \frac{s}{n^m}$ , so besitzt das inhomogene System  $Cg = h(n)$  stets eine Lösung mit

$$(47) \quad f(g) \leq \frac{r_0}{2} \left\{ \frac{2^m}{I r_0^m} \right\} n^{\frac{s}{m}}.$$

Für  $s = 1$  ist dies ein Satz von KHINTCHINE<sup>13</sup>, wo  $f(x) = |x|$  ist, in verschärfter Form. In diesem Fall, d. h.  $f(x) = |x|$ , gilt sogar nach (33)

$$(48) \quad f(g) \leq \frac{r_0}{2} \left\{ \frac{2^{\frac{2}{m}}(m+2)}{2 I r_0^m} \right\} n^{\frac{s}{m}}.$$

Wir wollen einen Spezialfall herausgreifen: Es sei  $n = p$  (Primzahl),  $f(x) = \text{Max}(|x_1|, |x_2|)$ ,  $s = 1$  und das System laute  $ax_1 = g_1 = g_2$  ( $a \not\equiv 0(p)$ ). Dann lautet also (47):

Besitzt die Kongruenz  $ax_1 = x_2$  ( $p$ ) keine nichttriviale Lösung  $(g_1, g_2)$  mit  $\text{Max}(|g_1|, |g_2|) \leq r_0 \sqrt{p}$ , dann besitzt die inhomogene Kongruenz  $ax_1 = x_2 + b$  ( $p$ ) stets eine Lösung  $(g_1, g_2)$  mit  $\text{max}(|g_1|, |g_2|) \leq \frac{r_0}{2} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \right\} \sqrt{p}$ . Die Voraussetzung über die homogene Kongruenz kann nicht weggelassen werden, wie z. B. die Kongruenz  $2x_1 = x_2 + 23$  (47) zeigt, welche keine Lösung mit  $\text{Max}(|x_1|, |x_2|) \leq \sqrt{47}$  hat, d. h. es gilt nicht das Analogon zum THUESchen Satz. Da aber diese Kongruenz keine nichttriviale Lösung mit  $\text{Max}(|g_1|, |g_2|) \leq 1/4 \sqrt{47}$  besitzt, folgt, daß  $2x_1 = x_2 + b$  (47) stets lösbar ist mit  $\text{max}(|g_1|, |g_2|) \leq 2\sqrt{47}$ .

3. Es gibt bekanntlich im  $R_2$  aus jedem Gitter  $\Gamma$  mit Determinante  $D(\Gamma)$  einen Gitterpunkt  $(g_1, g_2) \neq (0, 0)$ , so daß  $(a \neq 0)$

$$\alpha) g_1^2 + |a| g_2^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} D(\Gamma) \sqrt{|a|} \quad \text{bzw.} \quad \beta) |g_1^2 - |a| g_2^2| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} D(\Gamma) \sqrt{|a|}.$$

Es sei nun  $a$  ganz, kein Quadrat, und die Kongruenz  $x^2 = a$  ( $n$ ) besitze eine Lösung  $N$ . Dann folgt sofort aus dem Übertragungsprinzip: Es gibt stets ganze Zahlen  $g_1, g_2$ , so daß  $g_1^2 + |a| g_2^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{|a|} \cdot n$ , bzw.  $|g_1^2 - |a| g_2^2| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{|a|} n$  und  $g_1 - N g_2 = 0$  ( $n$ ) ist. Dann ist aber  $g_1^2 - a g_2^2$  durch  $n$  teilbar. Wir erhalten also folgendes Lemma von USPENSKY in verschärfter Gestalt: Es gibt stets natürliche Zahlen  $(x, y)$ , so daß  $x^2 - a y^2 = k n$ , wo  $k$  ganz und dem Betrage nach  $\leq \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{|a|}$  ist, wenn  $a > 0$  bzw.  $\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{|a|}$ , wenn  $a < 0$

und  $x = N y$  ( $n$ ) ist, wo  $N$  quadratischer Rest von  $a$  modulo  $n$  ist. Von diesem Lemma hat USPENSKY<sup>14</sup> viele Anwendungen gemacht.

<sup>13</sup>) Rec. math. Soc. math. (Moskau) 32, S. 203—218 (1924); Acta Arith. 2, S. 161—172 (1937); vgl. auch dazu die Arbeit von V. JARNIK u. P. ERDÖS im selben Band. S. 214—220.

<sup>14</sup>) Elementary Number Theory 1939, McGraw Hill Book Company, New York.

4. Bekanntlich gibt es im  $R_4$  zu jedem Gitter  $\Gamma$  mit Determinante  $D$  einen Gitterpunkt  $(g_1, g_2, g_3, g_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ , so daß  $(a > 0, b > 0)$

$$(49) \quad (a b g_1^2 + b g_2^2 + a g_3^2 + g_4^2) \leq \sqrt{2} (a b D)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Es seien nun, wenn vorhanden,  $\alpha, \beta$  ganzzahlige Lösungen der Kongruenz (\*)  $\alpha^2 + a \beta^2 + b \equiv 0 \pmod{n}$ . Dann folgt aus dem Übertragungsprinzip, daß es ganze Zahlen  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), nicht alle 0 gibt, so daß

$$\varphi = b (a g_1^2 + g_2^2) + a g_3^2 + g_4^2 \leq \sqrt{2} a b \cdot n \quad \text{und} \quad \alpha g_1 + \beta g_2 \equiv g_3 \pmod{n}, \quad a \beta g_1 - \alpha g_2 \equiv g_4 \pmod{n},$$

$$\text{ist. Daraus folgt, daß } \varphi \text{ durch } n \text{ teilbar ist, denn}$$

$$(\alpha^2 + a \beta^2) (a g_1^2 + g_2^2) \equiv (\alpha g_1 + \beta g_2)^2 a + (a \beta g_1 - \alpha g_2)^2.$$

Ist nun  $a = b = 1$ , so folgt daraus, daß  $n = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2$  ist. Dies ist der Fall, wenn  $n$  ungerade ist, denn dann ist die Kongruenz (\*) lösbar. Daraus folgt unmittelbar, daß  $2n = (g_1 + g_2)^2 + (g_1 - g_2)^2 + (g_3 - g_4)^2 + (g_3 + g_4)^2$ . Also jede Zahl läßt sich als Summe von 4 Quadraten darstellen.<sup>15)</sup> Die MIN-

KOWSKISCHE Schranke  $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$  hätte statt der Schranke  $\sqrt{2}$  in (47) ebenfalls genügt.

Es sei nun  $a = 3, b = 1$ . Dann können wir zunächst nur folgern, daß entweder  $n = 3(g_1^2 + g_2^2) + g_3^2 + g_4^2$  oder  $2n = 3(g_1^2 + g_2^2) + g_3^2 + g_4^2$  ist. Im zweiten Fall muß  $g_1 \equiv g_2 \pmod{2}, g_3 \equiv g_4 \pmod{2}$  sein, wenn  $n$  ungerade ist, wie man sofort aus  $\varphi = 2n$  modulo 2 und 4 sieht. Dann ist aber  $n = 3 \left[ \left( \frac{g_1 - g_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{g_1 + g_2}{2} \right)^2 \right] + \left( \frac{g_3 - g_4}{2} \right)^2 + \left( \frac{g_3 + g_4}{2} \right)^2$ . Also läßt sich  $n$  stets in der Gestalt  $3(g_1^2 + g_2^2) + g_3^2 + g_4^2$  darstellen, wenn (\*) lösbar ist. Dies ist der Fall, wenn  $n$  ungerade und zu 3 relativ prim ist. Nun folgt aus  $n = \varphi(g)$ ,  $2n = 3((g_1 + g_2)^2 + (g_1 - g_2)^2) + (g_3 + g_4)^2 + (g_3 - g_4)^2$  und  $3n = (3g_1)^2 + (3g_2)^2 + 3g_3^2 + 3g_4^2$ . Also läßt sich jede natürliche Zahl  $n$  in der Form  $3(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2$  darstellen. Hier genügt die BLICHFELDTSCHE Schranke  $2\sqrt{6}$ , (26'') für  $m = 4$ , statt  $\sqrt{2}$ . Der Fall  $a = 2, b = 1$  erledigt sich noch einfacher.

5. Aus (44) folgt:  $\alpha$ ) Liegen  $m$ -Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  vor, so gibt es ganze Zahlen  $x_1, \dots, x_m$ , welche das Kongruenzensystem  $c_{i1}x_1 + \dots + c_{im}x_m \equiv 0 \pmod{n}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) ( $s < m$ ) erfüllen, und eine natürliche Zahl  $y$ , so daß

$$\left| \alpha_j - \frac{x_j}{y^{\frac{s}{m}}} \right| \leq \frac{6 n^{\frac{s}{m}}}{\rho^{\frac{s}{m}} y^s} \quad (j = 1, \dots, m),$$

wo  $1 \leq y \leq \rho^{(e(m+1)(m^s + \dots + 1) + 1)}$  ist, wenn  $\rho > 6^m n^s$  und ganz ist.

$\beta$ ) Besitzt das System  $c_{j1}x_1 + \dots + c_{jm}x_m \equiv b_j \pmod{n}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) bei gegebenen  $b_j$  stets eine Lösung, so besitzt das System

$$c_{j1}x_1 + \dots + c_{jm}x_m \equiv y^{\frac{s}{m}} b_j \pmod{n} \quad (j = 1, \dots, s)$$

bei beliebigem  $b_j$  stets eine Lösung, wo nicht zugleich die  $x_i$  und  $y$  verschwinden,

so daß  $\text{Max}(|x_1|, \dots, |x_m|) \leq \frac{6 n^{\frac{s}{m}}}{\rho^{\frac{s}{m}}}$ ,  $0 \leq y \leq \rho^{(2(m+1)(m^s + \dots + 1) + 1)}$  für jedes

$\rho \geq 1$  ist. Diese Beispiele genügen, um die Anwendung des Übertragungsprinzips zu erläutern<sup>16)</sup>.

<sup>15)</sup> Dieses Theorem wurde schon öfter mit Hilfe der Geometrie der Zahlen bewiesen. Mit dem Satz von THUE, siehe <sup>12)</sup>.

<sup>16)</sup> Weitere Beispiele siehe die Arbeiten unter <sup>11)</sup> und <sup>13)</sup>. Weiter die Arbeit von L. REDET in Nieuw Arch. II, 23, 150—162 (1950).

§ 8. Wir wollen nun diese Überlegungen anwenden, um (8) für spezielle  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zu verschärfen. Es sei  $\bar{\Gamma}$  eine Obergruppe von  $\Gamma$  mit den gleichen Eigenschaften wie  $\Gamma$  und  $\Gamma$  sei Normalteiler von  $\bar{\Gamma}$  mit endlichem Index. Es sei  $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_s$  ein Repräsentantensystem der Restklassen von  $\bar{\Gamma}$  nach  $\Gamma$ , also  $F(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^s \bar{\gamma}_i F(\bar{\Gamma})$  Fundamentalbereich von  $\Gamma$ , wenn  $F(\bar{\Gamma})$  Fundamentalbereich von  $\bar{\Gamma}$  in  $R$ . Wir setzen nun voraus, daß es möglich ist, aus diesem Repräsentantensystem  $\{\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_s\}$   $N$ -Elemente  $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_N$  so auszuwählen, daß sich jedes  $\bar{\gamma} \neq e$  aus  $\bar{\Gamma}$ , mindestens  $\bar{R}$ -mal ( $\bar{R} \geq 1$ ) in der Gestalt  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_j^{-1} (\Gamma)$  ( $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$ ) darstellen läßt. Wir nennen dann  $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_N$  eine Quotientenbasis von  $\bar{\Gamma}$  in bezug auf  $\Gamma$  von der Ordnung  $\bar{R}$ . Es muß  $N \leq s$  und  $\bar{R}(s-1) \leq N(N-1)$  sein, also  $\bar{R} \leq N$ . Es seien nun  $\varphi_3(x), \varphi_4(x)$   $\varphi$ -Funktionen, es sei weiter

$$(50) \quad \varphi_1(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_3(\bar{\gamma}_j x), \quad \varphi_2(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_4(\bar{\gamma}_j x).$$

Wir setzen noch  $\Phi_i(x) = \sum_{\gamma} \varphi_i(\gamma x)$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $\bar{\Phi}_i(x) = \sum_{\bar{\gamma}} \varphi_i(\bar{\gamma} x)$  ( $i = 3, 4$ ). Dann ist für  $i = 1, 2$

$$(51) \quad \Phi_i(x) = \sum_{\gamma} \sum_{j=1}^N \varphi_{i+2}(\bar{\gamma}_j \gamma x) = \sum_{j=1}^N \Phi_{i+2}(\bar{\gamma}_j x),$$

da  $\Gamma$  Normalteiler von  $\bar{\Gamma}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} I &= \int_{F(\Gamma)} \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx = \sum_{j,k=1}^N \int_{F(\Gamma)} \Phi_3(\bar{\gamma}_j x) \Phi_4(\bar{\gamma}_k x) dx \\ &= \sum_{j,k=1}^N \int_{\bar{F}} \Phi_3(x) \Phi_4(\bar{\gamma}_k \bar{\gamma}_j^{-1} x) dx = N \int_{\bar{F}} \Phi_3(x) \Phi_4(x) dx + \sum_{j \neq k} \end{aligned}$$

Nun läßt sich jedes  $\bar{\gamma} \neq e$  mindestens  $\bar{R}$ -mal in der Gestalt  $\bar{\gamma}_k \bar{\gamma}_j^{-1} \bmod \Gamma$  schreiben, also ist die letzte Summe

$$\geq \bar{R} \sum_{j=1}^s \int_{\bar{F}} \Phi_3(x) \Phi_4(\bar{\gamma} x) dx,$$

wo bei der Summation  $\bar{\gamma}_j = e$  auszuschließen ist. Da nun  $N \geq \bar{R}$  ist, so folgt

$$I \geq \bar{R} \sum_{j=1}^s \int_{\bar{F}} \Phi_3(x) \Phi_4(\bar{\gamma}_j x) dx,$$

wo jetzt die Summe über das volle Repräsentantensystem von  $\bar{\Gamma}$  nach  $\Gamma$  zu erstrecken ist, also  $I \geq \bar{R} \int_{F(\bar{\Gamma})} \bar{\Phi}_3(x) \bar{\Phi}_4(x) dx$ .

Setzen wir nun voraus, daß für fast alle  $x$   $\bar{\Phi}_3(x) \leq c_1$ ,  $\bar{\Phi}_4(x) \leq c_2$ , so folgt aus (8), angewendet auf  $\bar{\Gamma}$ , daß

$$I \geq \frac{\bar{R}}{2 V(F(\bar{\Gamma}))} [(V(\varphi_3) + V(\varphi_4))^2 - V(F(\bar{\Gamma})) (c_1 V(\varphi_3) + c_2 V(\varphi_4))].$$

Nun ist  $V(\varphi_i) = N V(\varphi_{i+2})$  ( $i = 1, 2$ ), also erhalten wir

$$(52) \quad \begin{aligned} I &= \int_{F(\Gamma)} \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx \geq \\ &\geq \frac{\bar{R}s}{2 V(F(\Gamma)) N} \left[ \frac{(V(\varphi_1) + V(\varphi_2))^2}{N} - \frac{V(F(\Gamma))}{s} (c_1 V(\varphi_1) + c_2 V(\varphi_2)) \right]. \end{aligned}$$

Es wird also  $I > 0$ , wenn  $(V(\varphi_1) + V(\varphi_2))^2 > N/s V(F) (c_1 V(\varphi_1) + c_2 V(\varphi_2))$ . Dies ist für diese  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) eine Verschärfung, wenn  $N < s$  ist<sup>17)</sup>. Dies ist z. B. der Fall, wenn  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_p$  ( $p$  Primzahl) so beschaffen ist, daß die Faktorgruppe  $\bar{\Gamma}/\Gamma$  ein direktes Produkt von  $r$  zyklischen Gruppen  $(\sigma_1), \dots, (\sigma_r)$  ist, welche die Ordnung  $p-1$  haben. Dann können wir sofort eine Quotientenbasis mit  $N = (2[\sqrt{p}])^r$  und  $\bar{R} = 1$  angeben ( $s$  ist hier  $(p-1)^r$ ). Denn nach dem Satz von THUE (Beispiel 1) gibt es zu jeder Zahl  $a \not\equiv 0 (p)$  ganze Zahlen  $x_1, x_2$  mit  $1 \leq |x_i| \leq \sqrt{p}$  ( $i = 1, 2$ ), so daß  $a x_1 = x_2 (p)$ . Ist nun  $g$  Primitivwurzel von  $p$ , ist  $I(a)$  Index von  $a$  in bezug auf  $p$ , so folgt aus  $a x_1 = x_2 (p)$   $I(a) = I(x_2) - I(x_1) (p-1)$ . Daher bilden die Zahlen  $b_i = I(i)$ ,  $b_{i+2} = I(-i)$  ( $1 \leq i \leq [\sqrt{p}] = q$ ) eine Differenzenbasismodulo  $p-1$ , also  $\sigma_1^{b_1} \dots \sigma_r^{b_r}$  eine Quotientenbasis von  $\bar{\Gamma}_p$  modulo  $\Gamma$ . Es ist also  $N/s < 1$  und der Quotient strebt gegen 0, wenn es  $\bar{\Gamma}_p$  mit beliebig großen  $p$  gibt. Setzen wir dies voraus! (Im  $R_m$  genügt es,  $\bar{\Gamma}_p = \frac{1}{p-1} \Gamma$  zu nehmen). Es seien nun  $\varphi_i(x)$  ( $i = 3, 4$ ) die charakteristischen Funktionen von meßbaren Mengen  $A_i$  ( $i = 3, 4$ ), und die Figurengitter  $\mathfrak{A}_i(\bar{\Gamma})$  ( $i = 3, 4$ ) seien disjunkt. Dann ist  $c_1 = c_2 = 1$ . Wir wollen der Einfachheit halber noch speziell annehmen, daß  $V(A_3) = V(\bar{F})$  (z. B.  $A_3 = \bar{F}$  selbst),  $A_4$  sei sonst beliebig, aber  $V(A_4) < V(\bar{F})$ . Dann sind zunächst die Figurengitter  $\mathfrak{A}_i(\Gamma)$  ( $i = 1, 2$ ) disjunkt, wo  $A_i = \bigcup_{j=1}^N \bar{\gamma}_j A_{i+2}$  ( $i = 1, 2$ ) ist, und es ist

$$V(A_1) = N V(\bar{F}) = N/s V(F). \quad \text{Es ist aber } V(A_1) + V(A_2) > N/s V(F).$$

Wir sehen daher:  $A_2$  hat also, nach dem vorhergehenden mit  $\mathfrak{A}_1(\Gamma)$  innere Punkte gemeinsam, obwohl das Volumen der  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) beliebig klein sein kann, wenn nur  $p$  genügend groß ist. Für den  $R_1$  hat dies zuerst A. RENYI erkannt.

Wir wollen nun voraussetzen, daß  $R$  eine Gruppe ist,  $\Gamma$  bzw.  $\bar{\Gamma}$  Untergruppen von  $R$  sind. Es sei nun  $\varphi_2(x) = \varphi_1(tx)$ , dann ist

$$I(t) = \int_{F(\Gamma)} \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx = \int_R \varphi_1(x) \varphi_1(tx) dx,$$

also

$$(53) \quad \int_R I(t) dt = \left( \int_R \varphi_1(x) dx \right)^2 = V^2(\varphi_1).$$

Dann ist für die oben konstruierten Mengen  $A_1, A_2$ , wenn jetzt  $A_4 = t A_3$  ist, nach (52) für jedes  $t$

$$(54) \quad \frac{I(t)}{V^2(\varphi_1)} \geq \frac{\bar{R}s}{2N V(F(\Gamma))} \left[ \frac{4}{N} - \frac{2V(F(\Gamma))}{s V(\varphi_1)} \right].$$

Ist nun  $A_3 = \bar{F}$ , so erhalten wir für  $A = \sum_{j=1}^N \bar{\gamma}_j \bar{F}$  und jedes  $t$

$$(55) \quad \frac{I(t)}{V^2(A)} \geq \frac{\bar{R}s}{N^2 V(F(\Gamma))}.$$

<sup>17)</sup> Diese Überlegungen wurden durch die Arbeit von A. RENYI, Acta Liter. (Szeged) 13, 77–92 (1949–50) angeregt, der den Fall  $R = R_1$  mit trigonometrischen Summen behandelt.



Ist  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_p$ , so ist  $\bar{R} = 1$ ,  $s = (p-1)^p$ ,  $N = (2[\sqrt{p}])^p$ , also für jedes  $t$

$$(56) \quad \frac{I(t)}{V^2(A)} \geq \left( \frac{p-1}{4[\sqrt{p}]^2} \right)^p \frac{1}{V(F(\Gamma))} \geq \frac{1}{4^p V(F(\Gamma))}.$$

Nimmt man andere Differenzenbasen, so erhält man schärfere Abschätzungen. Dazu sei wieder auf A. RENYI<sup>17)</sup> verwiesen.

§ 9. Es sei nun  $R$  eine lokalkompakte Gruppe,  $\Gamma$  Normalteiler von  $R$  und  $R/\Gamma$  kompakt. Dann besitzt  $R/\Gamma$  eine Folge von Darstellungen  $D^{(i)}(x)$ , welche wir auch als Darstellungen von  $R$  auffassen können, mit der Eigenschaft  $D^{(i)}(\gamma x) = D^{(i)}(x)$  für alle  $\gamma$ . Jeder gegenüber  $\Gamma$  invarianten  $\varphi$ -Funktion  $\Phi$  wollen wir eine FOURIERSche Reihe  $\sum_i S_p(F^{*(i)}) D^{(i)}(x) \sqrt{r_i}$  zuordnen.

( $S_p$  = Spur der Matrix  $A$ ), wo  $F^{(i)}$  die Matrix  $\frac{\sqrt{r_i}}{V(F)} \int_{\bar{F}} \Phi(x) \bar{D}^{(i)}(x) dx$  ist ( $r_i$  Grad der Darstellung von  $D^{(i)}$ ) ( $\bar{D}$  konjugiert komplex zu  $D$ ). Für zwei solche Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2$ , welche außerdem noch stetig sind, gilt die PARSEVALSche Gleichung

$$(57) \quad \frac{1}{V(F)} \int_{\bar{F}} \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx = \sum S_p(\bar{F}_1^{(i)} F_2^{*(i)}).$$

Daraus folgt, daß sie für alle gegenüber  $\Gamma$  invarianten  $\varphi$ -Funktionen  $\Phi$  gilt, wenn es zwei Folgen nicht negativer, stetiger Funktionen  $\Phi'_n, \Phi''_n$  gibt, ebenfalls gegenüber  $\Gamma$  invariant, so daß  $\alpha) \Phi'_n \leq \Phi \leq \Phi''_n$  für alle  $x$  von  $R$  und  $\beta) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \Phi'_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \Phi''_n dx = \int \Phi dx$  ist. Auf solche Funktionen wollen wir uns jetzt beschränken, wir nennen sie kurz  $P$ -Funktionen. Ist z. B.  $A$  eine abgeschlossene, kompakte, beschränkte Teilmenge von  $R$ ,  $\varphi(x)$  seine charakteristische Funktion, so ist  $\Phi(x) = \sum_{\gamma} \varphi(\gamma x)$  eine solche Funktion.

Es sei nun  $\varphi(x)$  eine solche  $P$ -Funktion,  $\bar{\Phi}(x) = \sum_{\gamma} \varphi(\gamma x)$ , dann ist der  $i$ -te Fourierkoeffizient  $F^{(i)}$  von

$$(58) \quad \Phi(x), \quad \frac{\sqrt{r_i}}{V(F)} \int_{\bar{F}} \Phi(x) \bar{D}^{(i)}(x) dx = \frac{\sqrt{r_i}}{V(F)} \sum_{\gamma} \int_{\bar{F}} \varphi(\gamma x) \bar{D}^{(i)}(x) dx$$

also  $F^{(i)} = \frac{\sqrt{r_i}}{V(F)} \int_R \varphi(x) \bar{D}^{(i)}(x) dx.$

Ist  $D^{(1)}(x)$  die identische Darstellung, dann ist

$$(59) \quad F^{(1)} = \frac{V(\varphi)}{V(F)}.$$

Wenden wir jetzt (57) mit  $\Phi_1 = \Phi_2$  an, dann erhalten wir

$$(60) \quad \frac{1}{V(F)} \int_{\bar{F}} \Phi^2(x) dx = \sum_i S_p(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}).$$

Nun ist nach (9)  $\int_F \Phi^2(x) dx = \int_R \varphi(x) \Phi(x) dx$ , also erhalten wir

$$(61) \quad \int_R \varphi(x) \Phi(x) dx = V(F) \sum_i Sp(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}).$$

Setzen wir  $\psi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$ , so ist  $\psi$  eine  $\psi$ -Funktion, wie wir sie früher betrachtet haben. Ist nun  $\chi(x)$  eine solche Funktion, daß stets  $\chi(y^{-1}x) \geq \min(\varphi(x), \varphi(y))$ , dann ist  $\chi(y^{-1}x)$  eine  $\psi(x, y)$  zugeordnete Funktion. Dann gilt aber nach (10) für jedes  $x$  mit  $g_1 = g_2 = e$ :  $\sum_\gamma \chi(\gamma) \geq \sum_\gamma \varphi(\gamma x) = \Phi(x)$ . Multiplizieren wir die Gleichung mit  $\varphi(x)$  und integrieren über  $R$ , so folgt aus (61)

$$\sum_\gamma \chi(\gamma) \geq \frac{V(F)}{V(\varphi)} \sum_i Sp(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}),$$

daher

$$(62) \quad \sum_\gamma \chi(\gamma) \geq \frac{V(\varphi)}{V(F)} + \frac{V(F)}{V(\varphi)} \sum_{i \geq 1} Sp(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}).$$

Dies ist eine Verschärfung von (12). Erfüllt  $\Gamma$  die  $U$ -Annahme, dann kann die linke Seite von (62) durch  $\chi(e) + 1/2 \sum_{\gamma \neq e} \chi(\gamma)$  ersetzt werden, und wir erhalten eine Verallgemeinerung des Satzes von CASSELS. Diese Methode stammt von SIEGEL<sup>18)</sup>. Wir wollen nun (5) verschärfen.

Es seien  $l+1$   $\varphi$ -Funktionen der oben betrachteten Art gegeben. Es gelte für fast alle  $x$ :  $\Phi_j(x) \leq c_j$  ( $j = 1, \dots, l+1$ ). Es sei wieder  $I_{jk} = \int_F \Phi_j \Phi_k dx$ ,  $I = \sum_{j+k} I_{jk}$ . Wir erhalten, wenn  $F_j^{(i)}$  die Fourierkoeffizienten von  $\Phi_j$  sind nach (57), wenn wir  $\sum_j F_j^{(i)} = F^{(i)}$  setzen:

$$\frac{1}{V(F)} I = \sum_i \sum_{j+k} Sp(\bar{F}_j^{(i)} F_k^{(i)*}) = \sum_i Sp(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}) - \sum_{i,j} Sp(\bar{F}_j^{(i)} F_j^{(i)*}).$$

Da  $\Phi_j(x) \leq c_j$  ist, folgt aus (61), daß  $\sum_i Sp(\bar{F}_j^{(i)} F_j^{(i)*}) \leq \frac{V(\varphi_j)}{V(F)} c_j$ , daher

$$\frac{1}{V(F)} I \geq \sum_i Sp(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}) - \frac{1}{V(F)} \sum_{j=1}^{l+1} c_j V(\varphi_j), \text{ also nach (59)}$$

$$(63) \quad I \geq \frac{(\sum V(\varphi_j))^2}{V(F)} - \sum_j c_j V(\varphi_j) + V(F) \sum_{j \geq 1} Sp(\bar{F}^{(i)} F^{(i)*}),$$

wo  $F^{(i)} = \frac{\sqrt{r_i}}{V(F)} \int_R D^{(i)}(x) \sum_j \varphi_j(x) dx$ .

Es ist tatsächlich (63) eine Verschärfung von (5). Wir erhalten damit auch eine Verschärfung von (6).

§ 10. Es sei nun  $\varphi(x)$  die charakteristische Funktion einer Menge  $A$ , die so beschaffen sei, daß  $\varphi(x)$  eine  $P$ -Funktion ist.  $A$  sei abgeschlossen und kompakt. Weiter seien  $N$  Punkte  $t_1, \dots, t_N$  gegeben. Dann sei  $\varphi_i(x) = \varphi(t_i x)$ .

Wir wollen nun

$$\sum_{i=1}^N \Phi(t_i)$$

abschätzen. Es sei weiter die symmetrische Metrik  $f(x, y) = f(y^{-1}x)$  gegeben, also  $f(e) = 0$ ,  $f(x) = f(x^{-1})$ ,  $f(y^{-1}x) \leq f(y) + f(x)$ . Das Figuren-

<sup>18)</sup> Acta Math. 65, 309—323 (1935); vgl. dazu auch die erste Arbeit in <sup>1)</sup>.

gitter  $\mathfrak{A}(\Gamma)$  von  $A$  sei disjunkt, und es sei sogar der Abstand zweier Figuren mindestens  $\delta_1 > 0$ . Weiters sei  $A_2$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $A$ . Diese habe von  $R - A$  den Abstand  $> 2\delta_2$ . Es sei nun  $0 < \delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$  und  $\varphi_\delta(x)$  die charakteristische Funktion der Kugel  $K_\delta: f(x) \leq \delta$ , wo  $\delta$  so gewählt ist, daß  $K_\delta$  meßbar ist. Weiter sei  $c_1$  die Vereinigungsmenge von  $A$  und allen Kugeln vom Radius  $\delta$  mit Mittelpunkt in  $A$ .  $A$  liegt in  $c_1$ . Wenn  $\varphi_1(x)$  die charakteristische Funktion von  $c_1$  ist, gilt weiter für alle  $x$  und  $y$

$$(64) \quad \varphi(x) \varphi_\delta(y) \leq \varphi_1(xy).$$

Denn liegt  $x$  in  $A$ ,  $y$  in  $K_\delta$ , so liegt  $xy$  in  $c_1$ . Weiter sei  $c_2$  die Vereinigungsmenge von  $A_2$  und allen Kugeln vom Radius  $\delta$  mit Mittelpunkt in  $A_2$ . Ist  $\varphi_2(x)$  die charakteristische Funktion von  $c_2$ , so ist

$$(65) \quad \varphi(x) \geq \varphi_2(xy) \varphi_\delta(y),$$

denn liegt  $xy$  in  $C_2$ ,  $y$  in  $K_\delta$ , so liegt  $x$  in  $A$ . Denn würde  $x$  nicht in  $A$  liegen, so wäre  $x$  in  $R - A$ , also  $f((xy)^{-1}x) = f(y) > \delta$ . Widerspruch. Ist insbesondere  $A$  der konvexe Körper  $f(x x_0^{-1}) \leq r$  mit Mittelpunkt  $x_0$ , so können wir für  $C_1$ ,  $f(x x_0^{-1}) \leq r + \delta$  nehmen und für  $C_2$ ,  $f(x x_0^{-1}) \leq r - \delta$ . Es seien nun weiter  $\varphi_3(y)$ ,  $\varphi_4(y)$   $P$ -Funktionen auf  $K_\delta$ . Dann folgt aus (64) und (65)

$$(64') \quad \Phi(x) \varphi_\delta(y) \leq \Phi_1(xy),$$

$$(65') \quad \Phi(x) \geq \Phi_2(xy) \varphi_\delta(y).$$

Multiplizieren wir (64') mit  $\varphi_3(y) \varphi_\delta(y)$ , ebenso (65') mit  $\varphi_4(y) \varphi_\delta(y)$  und integrieren über  $y$ , so erhalten wir

$$(66) \quad \frac{\int \Phi_1(xy) \varphi_3(y) dy}{\int \varphi_3(y) dy} \geq \Phi(x) \geq \frac{\int \Phi_2(xy) \varphi_4(y) dy}{\int \varphi_4(y) dy}.$$

Dabei haben wir  $\varphi_i(y) = \varphi_i(y) \varphi_\delta(y)$  ( $i = 3, 4$ ) gesetzt. Der Fourierkoeffizient von  $\Phi_j(t, x)$ , ( $t$  fest) ist nach (58), wenn  $F_j^{(i)}$  der Fourierkoeffizient von  $\Phi_j(x)$  ist,

$$(67) \quad \sqrt{r_i} V^{-1}(F) \int_R \varphi_j(t, x) \bar{D}^{(i)}(x) dx = \int_R \varphi_j(x) \bar{D}^{(i)}(t^{-1}x) dx = \bar{D}^{(i)}(t^{-1}) F_j^{(i)}.$$

Wenden wir nun (57) an, so erhalten wir aus (66) für  $M_N(\Phi) = 1/N \sum_{j=1}^N \Phi(t_j)$  als Abschätzung nach oben

$$(68') \quad M_N(\Phi) V^{-1}(F) \int \varphi_3(y) dy \leq \sum_i S_p(\bar{F}_3^{(i)} F_1^{(i)*} 1/N \sum_{j=1}^N D^{(i)}(t_j))$$

und nach unten

$$(68'') \quad M_N(\Phi) V^{-1}(F) \int \varphi_4(y) dy \geq \sum_i S_p(\bar{F}_4^{(i)} F_2^{(i)*} 1/N \sum_{j=1}^N D^{(i)}(t_j)).$$

Wenn also  $D$  die identische Darstellung  $E$  ist, ist für  $i = 1$  das Glied in der Reihe rechts in (68') bzw. (68'')  $V^{-2}(F) \int \varphi_{i+2}(y) dy \int \varphi_i dy$  ( $i = 1, 2$ ). Aus (68') und (68'') läßt sich leicht die bekannte Bedingung herleiten, daß eine Folge  $\{t_i\}$  gleichverteilt ist, wenn für jedes  $i > 1$   $1/N \sum_{j=1}^N D^{(i)}(t_j) \rightarrow 0$  strebt.

Denn dann ist  $\frac{\int \varphi_1(y) dy}{V(F)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} M_N \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} M_N \leq \frac{\int \varphi_2(y) dy}{V(F)}$

für jedes  $\delta > 0$ . Da  $\int \varphi_1(y) dy \rightarrow \int \varphi(y) dy = V(A)$ , so folgt, wenn wir mit  $\delta \rightarrow 0$  gehen, daß  $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N$  existiert und  $= \frac{V(A)}{V(F)}$  ist.

Dieses Resultat läßt sich natürlich auch einfacher herleiten<sup>19)</sup>. Die Ungleichung (68') liefert für  $M_N(\Phi)$  eine Abschätzung nach unten. Wir wollen nun für  $A$  den Körper  $f(x) \leq r$ ,  $\delta = \frac{r}{2}$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 = 1$  nehmen. Dann ist  $\varphi_2 = \varphi_r$ , also  $\Phi_2 = \Phi_4$ , und wir erhalten, wenn wir mit  $B$  den Körper  $f(x) \leq r/2$  bezeichnen und  $F^{(i)} = F_1^{(i)} = F_0^{(i)}$  setzen:

$$M_N(\Phi) V^{-1}(F) V(B) \geq \sum_i S_p(\bar{F}_0^{(i)} F_0^{(i)*} M_N^{(i)}),$$

wo  $M^{(i)} = 1/N \sum_{j=1}^N D^{(i)}(t_j)$  ist, ausführlich geschrieben

$$(69) \quad M_N(\Phi) \geq \frac{V(B)}{V(F)} + \frac{V(F)}{V(B)} \sum_{i \geq 1} S_p(\bar{F}_0^{(i)} F_0^{(i)*} M_N^{(i)}).$$

Für den  $R_1$  wurde diese Abschätzung von C. L. SIEGEL<sup>20)</sup> angegeben. Ist  $N = 1$ , so erkennt man, daß es die Abschätzung (62) für den hier vorliegenden Spezialfall ist.

Wir wollen jetzt für  $R$  den  $R_m$  nehmen. Weiter sei  $A$  der Körper  $f(x - x_0) \leq r$ . Dann nehmen wir für  $\varphi_3 = \varphi_4 = (\delta^2 - f^2(x))^k$  ( $k > 0$ ). Dann ist z. B. die Summe rechts in (68'), wenn wir gleich das Würfelgitter mit  $V(F) = 1$  nehmen und noch durch  $\int \varphi_3(y) dy$  dividieren:

$$\sum_i G^{(i)} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i t_j} \right), \quad G^{(i)} = \frac{\bar{F}_0^{(i)} F_1^{(i)}}{\int \varphi_3(y) dy} \quad \text{und}$$

$$F_1^{(i)} = \int_{f(x) \leq r-\delta} e^{-2\pi i l x} dx, \quad F_2^{(i)} = \int_{f(x) \leq \delta} (\delta^2 - f^2(x))^k e^{-2\pi i l x} dx.$$

Ist  $A$  eine Kugel oder allgemein ein konvexer Körper, dessen Rand analytisch ist und nur Berührungen erster Ordnung besitzt, so ist <sup>21)</sup> für

$$l \neq 0, \text{ bei festem } \delta, F_1^{(i)} = 0 \left( \frac{1}{|l|^{\frac{m+1}{2}}} \right), \quad F_2^{(i)} = 0 \left( \frac{\delta^{k+m}}{|l\delta|^{\frac{m+1}{2} + k}} \right),$$

also  $G^{(i)} = 0 \left( \frac{1}{|l|^{\frac{m+1}{2} + k} \delta^{\frac{m+1}{2} + k}} \right)$ . Als gleichmäßige Abschätzung in  $\delta$  erhalten wir für  $l \neq 0$ ,  $G^{(i)} = 0 \left( \frac{1}{|l|^{\frac{m+1}{2}}} \right)$ . Dies sind Abschätzungen, die für

$m = 1$  oft verwendet werden.

Wir wollen noch eine kurze Bemerkung zur Methode von ERDÖS u. TURÁN<sup>22)</sup> hinzufügen. Diese besteht bekanntlich darin, daß die Fourierreihe

<sup>19)</sup> Siehe ECKMANN, B.: Commentarii Math. Helvetici 16, 249—263 (1949).

<sup>20)</sup> KOKSMA, J. F.: Diophantische Approximationen, S. 121, 1936.

<sup>21)</sup> Vgl. HLAWKA, E.: Mh. 54, 1—36 (1950).

<sup>22)</sup> Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 51, 1146—1154, 1262—1269 (1948); Indag. Math. 10, 370—378, 406—413 (1948). Weiter die ausführliche Untersuchung von J. F. KOKSMA, Some theorems on diophantine inequalities: Math. Centrum Scriptum 5, 515 (1950).

von  $\Phi(x)$  selbst betrachtet wird und daß auf sie das Summierungsverfahren von JACKSON angewendet wird. Dies kann so beschrieben werden<sup>23</sup>): Es sei z. B.  $f(x) \leq 1/2$  ein konvexer Körper  $K$  mit Mittelpunkt und es sei  $F(l) = \int_{f(x) \leq 1/2} e^{ilx} dx$ , also der Fourierkoeffizient von  $\hat{\Phi}(x)$ , wenn  $\hat{\varphi}(x)$  die charakteristische Funktion von  $K$ . Dann gilt nach der PARSEVALSchen Gleichung, aber jetzt für Fourierintegrale

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R_m} \int_{f(x) \leq 1/2} e^{ilx} dx \int_{f(t) \leq 1/2} e^{ilt} dt = \int_{R_m} \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x+t) dx = \psi(t)$$

also 0, wenn  $f(t) > 1$  ist. Setzen wir  $F_2(l) = \int_{f \leq 1/2} e^{ilx} dx$ , so erhalten wir, wenn wir diesen Prozeß iterieren

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R_m} F_2^s(l) e^{ilt} dt = \psi_s(t) = 0 \text{ für } f(t) > s.$$

Setzen wir noch  $\frac{F_2^s(l)}{\psi_s(0)} = F_s(l)$ ,  $\frac{\psi_s(t)}{\psi_s(0)} = \chi_s(t)$ . Sei nun  $\sum a_l e^{2\pi i l x}$  die Fourierreihe von  $\Phi(x)$ , wo  $\Phi(x) = \sum \varphi(\gamma x)$ ,  $(\varphi(x))$  charakteristische Funktion einer Menge  $A$ , dann ist

$$s_R(x) = \left(\frac{R}{s}\right)^m \int_{R_m} \Phi(x+y) F_s\left(\frac{R}{s}y\right) dy = \sum_{f(l) \leq R} \chi_s\left(\frac{sl}{R}\right) a_l e^{2\pi i l x}.$$

Diese  $s_R(x)$  konvergieren dann gleichmäßig gegen  $\Phi(x)$  in jeder kompakten Teilmenge von  $A$ . Ist  $f(x) \leq 1$  ein Quader (dies ist der Fall bei ERDÖS und TURAN und KOKSMA) oder eine Kugel oder ein Körper, dessen Rand analytisch ist und Berührungen erster Ordnung besitzt, so kann  $s_R(x) - \Phi(x)$  abgeschätzt werden, und man erhält die Resultate der obigen Autoren. Es wäre nun interessant zu untersuchen, ob sich dies auch auf den Fall, daß  $R$  eine lokalkompakte Gruppe und  $\Gamma$  eine in  $R$  diskontinuierliche Untergruppe ist, übertragen läßt. Dazu ist wohl notwendig, die Theorie der Darstellungen von  $R$  im HILBERTSchen Raum heranzuziehen.

§ 11. Es sei  $R$  eine Gruppe, welche wir als lokalkompakt annehmen,  $\Gamma$  Untergruppe von  $G$  und  $F = R/\Gamma$  ein homogener Raum<sup>24</sup>). Es sei  $A$  eine BORELSche Menge von  $F$ ,  $\mu(A)$  ein RADONSches Maß in  $F$ ,  $m(A)$  das invariante Maß gegenüber  $R$  in  $F$ ,  $m(F)$  sei endlich. Weiter setzen wir noch  $\sup_{x \in R} \mu(x^{-1}A) = s(A)$ . Dann ist zunächst, wenn  $\varphi(x)$  die charakteristische Funktion von  $A$  ist,  $\int_R dx \int_F d\mu \varphi(x^{-1}y) = \int_F d\mu \int_R dx \varphi(x^{-1}y) = \int_F d\mu m(A) = m(F)m(A)$ , also

$$(70) \quad \int_R dx \mu(x^{-1}A) = \mu(F)m(A).$$

<sup>23</sup> Vgl. dazu BOCHNER, S. in Contributions to Fourier Analysis, Ann. of Math. Stud. 25, 3—23 (1950).

<sup>24</sup> Vgl. dazu KNICHAL, V.: Casopis 71, 33—54 (1946) und die Besprechung von A. WEIL in: Review 8, 439 (1947).

Es seien nun  $A_1, \dots, A_{l+1}$  Mengen in  $F$  und wir bilden wieder

$$I_{ik} = \int_F d x \mu(x^{-1} A_i) \mu(x^{-1} A_k), \quad I = \sum_{i+k} I_{ik}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} I &= \int d x \left( \sum_{i=1}^{l+1} \mu(x^{-1} A_i) \right)^2 - \sum_R \int d x \mu^2(x^{-1} A_i) \\ (71) \quad &\geq \frac{1}{m(F)} \left[ \left( \sum \int d x \mu(x^{-1} A_i) \right)^2 - \sum s_i \int d x \mu(x^{-1} A_i) \right] \\ &= \frac{\mu^2(F)}{m(F)} \left( \left( \sum m(A_i) \right)^2 - \frac{m(F)}{\mu(F)} \sum_i s_i m(A_i) \right), \end{aligned}$$

also gibt es wieder ein  $i$  und ein  $k$  ( $1 \leq i < k \leq l+1$ ), so daß

$$I_{ik} = \int_R d x \mu(x^{-1} A_i) \mu(x^{-1} A_k) \geq \frac{(\mu(F) \sum m(A_j))^2 - m(F) \mu(F)}{m^2(F) (l+1)l} - \sum s_i m(A_i).$$

Wir wollen dies nun auf den  $R_m$  anwenden.

Es sei wieder ein RADONSCHES Maß  $\mu(A)$  gegeben, definiert für alle BORELSCHEN Mengen  $A$ . Es sei weiter  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \sup_a \frac{\mu(H_\eta^a)}{\eta^m} = h$  die obere Dichte, von der wir  $h > 0$  voraussetzen. Dabei sei  $H_\eta^a$  der Würfel  $-\eta/2 \leq x_i - a_i < \eta/2$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Es seien nun wieder  $l+1$  beschränkte BORELSCHES Mengen  $A_j$  ( $j = 1, \dots, l+1$ ) gegeben. Da sie beschränkt sind, gibt es einen Würfel  $H_\eta^a$ , in welchem alle  $A_j$  enthalten sind. Weiter gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$ , ein  $a$  und ein  $\eta$ , so daß  $\frac{\mu(H_\eta^a)}{(\eta+3d)^m} > h - \varepsilon$  ist. Es sei nun  $\Gamma$  die Untergruppe  $\sigma g$  ( $\sigma = \eta + 3d$ ,  $g$  durchläuft alle Punkte des Würfelgitters mit Determinante 1). Dann ist  $R/\Gamma = F$  eine kompakte Gruppe, auf welche wir die vorhergehenden Überlegungen anwenden können. Bei der Abbildung  $R \rightarrow R/\Gamma$  entspricht einer Menge  $A$  eine Menge  $\bar{A}$  in  $\bar{R}$ , der wir das RADONSCHES Maß in  $F$ ,  $\bar{\mu}(\bar{A}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(A + \gamma \cap H_\eta^a)$  zuordnen. Es ist natürlich  $\bar{\mu}(\bar{H} \sigma_0) = \mu(H_\eta^a)$ . Wir erhalten dann aus (72) in geläufiger Weise<sup>24)</sup>:

Es gibt ein  $i$  und ein  $k$  ( $1 \leq i < k \leq l+1$ ), so daß

$$(73) \quad \sup_{x \in R_m} \mu(A_i - x) \mu(A_k - x) \geq \frac{(h \sum m(A_i))^2 - h \sum \mu_i^m(A_i)}{l(l+1)},$$

wo  $s_i = \sup \mu(A_i - x)$ .

Man sieht sofort, daß analog aus (70) folgt<sup>25)</sup>

$$(74) \quad \sup \mu(A - x) \geq h m(A).$$

<sup>24)</sup> Dieser Satz stammt von C. VISSER: Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 42, 487 bis 490 (1939); vgl. dazu auch A. F. MONNA: Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 45, 981—986 (1942). Nach MONNA gilt dieser Satz in jedem Banachraum, in dem eine vollständige additive, reellwertige Mengenfunktion existiert, welche nicht  $\equiv 0$  ist. Vgl. dazu auch <sup>25)</sup> und TH. SCHNEIDER: Arch. f. Math. 2, 349—353 (1949).

Ein Spezialfall liegt vor, wenn eine beliebige, diskrete Folge  $\Gamma: \{g_i\}$  von Punkten im  $R_m$  vorliegt<sup>26)</sup>. Dann sei  $\mu(A)$  gleich die Anzahl der Punkte  $g_i$  in  $A$ . Es liege nun ein konvexer Körper  $f(x) \leq r$  vor, und es sei  $\Gamma^*$  die Menge aller Punkte  $g_i - g_k$  ( $g_i, g_k$  aus  $\Gamma$ ), welche ebenfalls diskret sein soll. Dann folgt aus (73) mit  $s_i = 1$ : Enthält der Körper  $f(x) \leq r$  keinen Punkt  $\neq 0$  aus  $\Gamma^*$ , ist  $I r^m \geq \frac{2^m}{l+1} \frac{1}{h}$ , so gibt es unter  $l+1$  beliebigen Punkten  $t_i$  ( $i = 1, \dots, l+1$ ) zwei Punkte  $t_i, t_k$  ( $1 \leq i < k \leq l+1$ ) und einen Punkt  $g^*$  von  $\Gamma^*$ , so daß

$$(75) \quad f(t_i - t_k - g^*) \leq r$$

ist, während aus (74) der bekannte Satz folgt: Ist  $I r^m \geq \frac{2^m}{h}$ , so gibt es ein  $g^* \neq 0$  aus  $\Gamma^*$ , so daß  $f(g^*) \leq r$ .

Es ist (75) eine Verallgemeinerung von (18).

<sup>26)</sup> Dieser Fall wurde zuerst von W. FENCHEL, Acta Arith. 2, 230—241 (1937) behandelt. Von B. JESSEN wurde diese Theorie von FENCHEL vereinfacht und erweitert.

(Eingegangen am 14. Januar 1952.)

# Notes on Some Inequalities for Linear Operators.

By

TOSIO KATO in Tokyo.

In a recent paper on perturbation theory, HEINZ<sup>1)</sup> has deduced several useful inequalities satisfied by linear operators in a Hilbert space  $\mathfrak{H}$ . The purpose of the present note is to give generalizations and improvements for some of them.

1. We start with a lemma concerning the adjoint and inverse of a linear operator.

**Lemma 1.** Let  $T$  be a linear operator and let  $T^*$  and  $T^{-1}$  exist. Then  $T^*$  has a unique right inverse  $T^{*'} with the following properties<sup>2)</sup>:$

i)  $\mathfrak{D}_{T^*} = \mathfrak{R}_{T^*}$ , ii)  $\mathfrak{R}_{T^*} \subseteq \overline{\mathfrak{R}_T}$ , iii)  $\mathfrak{R}_{T^*} \subseteq \mathfrak{D}_{T^*}$  and  $T^* T^{*'} = I$  in  $\mathfrak{R}_{T^*}$ . If in particular  $T^*$  has an inverse  $(T^*)^{-1}$ , then  $T^{*'} = (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

*Proof.* I. For a fixed  $y \in \mathfrak{H}$ ,  $L_y(x) = (T^{-1}x, y)$  is a linear functional defined for  $x \in \mathfrak{D}_{T^{-1}} = \mathfrak{R}_T$ . Let  $\mathfrak{D}_Q$  be the set of all  $y$  such that  $L_y(x)$  is a bounded functional. If  $y \in \mathfrak{D}_Q$ ,  $L_y(x)$  can be extended to all  $x \in \overline{\mathfrak{R}_T}$  preserving the bound, and there is a unique  $y' \in \overline{\mathfrak{R}_T}$  such that  $L_y(x) = (x, y')$ . We define an operator  $Q$  by  $Qy = y'$ .  $Q$  is clearly a linear operator with the domain  $\mathfrak{D}_Q$  just defined and with range contained in  $\overline{\mathfrak{R}_T}$ . Thus we have

$$(1) \quad L_y(x) = (T^{-1}x, y) = (x, Qy) \quad \text{for } x \in \mathfrak{R}_T, \quad y \in \mathfrak{D}_Q \quad \text{and} \quad \|Qy\| = \|L_y\|,$$

where  $\|L_y\|$  is the bound of the functional  $L_y$  with domain  $\overline{\mathfrak{R}_T}$ .

II. Setting  $T^{-1}x = z$ ,  $x = Tz$  in (1), we obtain  $(z, y) = (Tz, Qy)$  for every  $z \in \mathfrak{D}_T$  and  $y \in \mathfrak{D}_Q$ . Hence we have  $Qy \in \mathfrak{D}_{T^*}$ ,  $T^*Qy = y$ . This implies  $y \in \mathfrak{R}_{T^*}$  and hence  $\mathfrak{D}_Q \subseteq \mathfrak{R}_{T^*}$ ,  $\mathfrak{R}_Q \subseteq \mathfrak{D}_{T^*}$  and  $T^*Q = I$  in  $\mathfrak{D}_Q$ . On the other hand if  $y = T^*z$  for some  $z \in \mathfrak{D}_{T^*}$ , then  $L_y(x) = (T^{-1}x, y) = (T^{-1}x, T^*z) = (T T^{-1}x, z) = (x, z)$  is a bounded functional with bound  $\leq \|z\|$ , so that we have  $y \in \mathfrak{D}_Q$ . Hence  $\mathfrak{R}_{T^*} \subseteq \mathfrak{D}_Q$ . Thus we have shown that  $\mathfrak{D}_Q = \mathfrak{R}_{T^*}$ ,  $\mathfrak{R}_Q \subseteq \mathfrak{D}_{T^*}$  and  $T^*Q = I$  in  $\mathfrak{R}_{T^*}$ , i. e., that  $Q$  is a right inverse of  $T^*$  and satisfies the conditions i), ii), iii) for  $T^{*'}$  stated in the lemma.

III. We shall next show that an operator  $T^{*'}$  satisfying these conditions must coincide with  $Q$ . By i),  $T^{*'}$  and  $Q$  have the same domain  $\mathfrak{R}_{T^*}$  and iii) shows that  $T^*(T^{*' - Q) = 0$  in  $\mathfrak{R}_{T^*}$ . Hence  $(Tz, (T^{*' - Q)y) = (z, T^*(T^{*' - Q)y) = 0$  for  $y \in \mathfrak{R}_{T^*}$ ,  $z \in \mathfrak{D}_T$ , i. e.,  $(T^{*' - Q)y$  is orthogonal to  $\mathfrak{R}_T$ . But as  $(T^{*' - Q)y \in \mathfrak{R}_T$  by ii), we must have  $(T^{*' - Q)y = 0$  or  $T^{*' = Q}$ .

IV. When  $(T^*)^{-1}$  exists, we apply it to  $T^* T^{*' y = y$  ( $y \in \mathfrak{R}_{T^*}$ ) and obtain  $T^{*' y = (T^*)^{-1} y$ . But as  $T^{*'}$  and  $(T^*)^{-1}$  have the same domain  $\mathfrak{R}_{T^*}$ , we have  $T^{*' = (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$  (The last equality is well known<sup>3)</sup>).

**Definition I.** Let  $S$  and  $T$  be two linear operators. We shall write  $S \leq T$  if  $\mathfrak{D}_S \supseteq \mathfrak{D}_T$  and  $\|Sx\| \leq \|Tx\|$  for all  $x \in \mathfrak{D}_T$ .

<sup>1)</sup> HEINZ [1].

<sup>2)</sup>  $\mathfrak{D}_T$  and  $\mathfrak{R}_T$  denote respectively the domain and range of the operator  $T$ .  $\overline{\mathfrak{R}_T}$  is the closure of the set  $\mathfrak{R}_T$ .

<sup>3)</sup> STONE [5], p. 43.



It follows immediately that  $R \ll S$  and  $S \ll T$  imply  $R \ll T$ . If  $S$  and  $T$  are self-adjoint, then  $S \ll T$  is equivalent to  $S^2 \leq T^2$  in the sense of RELICH<sup>4)</sup>. More generally if  $S$  and  $T$  are closed and have everywhere dense domains, then we have  $S \ll (S^* S)^{\frac{1}{2}} \ll S$  and similarly for  $T$  (see (3) below). Hence  $S \ll T$  is equivalent to  $(S^* S)^{\frac{1}{2}} \ll (T^* T)^{\frac{1}{2}}$ , i. e., to  $S^* S \leq T^* T$ .

**Theorem 1.** Let  $S$  and  $T$  be two linear operators and let  $S \ll T$ . Further let  $S^*$ ,  $T^*$  and  $S^{-1}$  exist. Then  $T^{-1}$  also exists and we have  $\mathfrak{R}_{T^*} \supseteq \mathfrak{R}_S$  and  $T^{**} \ll S^*$ , where  $S^{**}$  and  $T^{**}$  are respectively the right inverses of  $S$  and  $T$  introduced in Lemma 1.

*Proof.*  $Tx = 0$  implies  $\|Sx\| \leq \|Tx\| = 0$ ,  $\|Sx\| = 0$ ,  $x = 0$  by hypothesis. Hence  $T^{-1}$  exists, and  $S^{**}$  and  $T^{**}$  are defined by Lemma 1. Let  $x \in \mathfrak{D}_{T^{-1}} = \mathfrak{R}_T$  and  $y \in \mathfrak{D}_{S^{**}} = \mathfrak{R}_{S^*}$ . Then  $T^{-1}x \in \mathfrak{D}_T \subseteq \mathfrak{D}_S$  and  $L_y(x) = (T^{-1}x, y) = (T^{-1}x, S^* S^{**}y) = (S T^{-1}x, S^{**}y)$  by Lemma 1. But  $\|S T^{-1}x\| \leq \|T T^{-1}x\| = \|x\|$  so that  $|L_y(x)| \leq \|x\| \|S^{**}y\|$ . According to the proof of Lemma 1, this implies that  $y \in \mathfrak{D}_{T^{**}} = \mathfrak{R}_{T^*}$  and  $\|T^{**}y\| \leq \|S^{**}y\|$  by (1). This completes the proof.

*Corollary<sup>5)</sup>.* Let  $A$  and  $B$  be self-adjoint operators and let  $A \ll B$ . If  $A^{-1}$  exists, then  $B^{-1}$  also exists and  $B^{-1} \ll A^{-1}$ .

*Proof.* This follows immediately from Theorem 1, if we set  $S = A$ ,  $T = B$  and note that  $A^* = A$ ,  $A^{**} = (A^*)^{-1} = A^{-1}$ , etc.

**Theorem 2<sup>6)</sup>.** Let  $A$  and  $B$  be self-adjoint operators and let  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ . If  $A \ll B$ , then  $A^v \ll B^v$  for  $0 \leq v \leq 1$ .

*Proof.* I. First we assume that  $B$  is bounded and has positive lower bound. Then  $A$  is also bounded by hypothesis. Suppose now that the theorem is already proved for  $v = \alpha$  and  $v = \beta$ , where  $0 \leq \alpha < \beta$ . Let  $\lambda$  be any real number belonging to the spectrum of the bounded, self-adjoint operator  $H = B^{\alpha+\beta} - A^{\alpha+\beta}$ . Then, to every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $x_0 \in \mathfrak{H}$  such that  $\|x_0\| = 1$  and  $\|(H - \lambda I)x_0\| < \varepsilon$ . Set  $y_0 = (H - \lambda I)x_0 = B^{\alpha+\beta}x_0 - A^{\alpha+\beta}x_0 - \lambda x_0$ . Then we have  $\|y_0\| < \varepsilon$  and

$$\begin{aligned} (y_0, B^{\beta-\alpha}x_0) &= (B^{\alpha+\beta}x_0, B^{\beta-\alpha}x_0) - (A^{\alpha+\beta}x_0, B^{\beta-\alpha}x_0) - \lambda(x_0, B^{\beta-\alpha}x_0) \\ &= \|B^{\beta}x_0\|^2 - (A^{\beta}x_0, A^{\alpha}B^{\beta-\alpha}x_0) - \lambda(x_0, B^{\beta-\alpha}x_0), \end{aligned}$$

whence follows

$$\begin{aligned} \|B^{\beta}x_0\|^2 - \lambda(x_0, B^{\beta-\alpha}x_0) &= (A^{\beta}x_0, A^{\alpha}B^{\beta-\alpha}x_0) + (y_0, B^{\beta-\alpha}x_0) \leq \|A^{\beta}x_0\| \times \\ &\times \|A^{\alpha}(B^{\beta-\alpha}x_0)\| + \|y_0\| \|B^{\beta-\alpha}x_0\| \leq \|B^{\beta}x_0\| \|B^{\alpha}(B^{\beta-\alpha}x_0)\| + \varepsilon \|B^{\beta-\alpha}x_0\| = \\ &= \|B^{\beta}x_0\|^2 + \varepsilon \|B^{\beta-\alpha}x_0\|, \end{aligned}$$

where we have used the assumption  $A^{\alpha} \ll B^{\alpha}$ ,  $A^{\beta} \ll B^{\beta}$ . Hence we have  $\lambda \geq -\varepsilon \|B^{\beta-\alpha}x_0\|/(x_0, B^{\beta-\alpha}x_0) \geq -\varepsilon \|B\|^{\beta-\alpha}/\gamma^{\beta-\alpha}$ , where  $\gamma > 0$  is the lower bound of  $B$ . Since this holds for every  $\varepsilon > 0$ , we must have  $\lambda \geq 0$ , i. e., the spectrum of  $H$  contains no negative number. This implies  $H \geq 0$  or

$A^{\alpha+\beta} \leq B^{\alpha+\beta}$  or  $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \ll B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ . Thus we have shown that the set  $\Sigma$  of real numbers  $v$  for which the theorem holds contains  $(\alpha + \beta)/2$  whenever it contains  $\alpha$ ,  $\beta$  such that  $0 \leq \alpha < \beta$ . Since  $\Sigma$  clearly contains 0 and 1, it follows that it contains every  $v$  such that  $v = m/2^n$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq v \leq 1$ . Thus we

<sup>4)</sup> RELICH [4], p. 363 and HEINZ [1], p. 422.

<sup>5)</sup> This is a generalization of Hilfssatz 4 of HEINZ [1], p. 422.

<sup>6)</sup> This is Satz 3 of HEINZ [1], p. 426. The Proof given here is elementary in that it does not make use of the theorem of HERGLOTZ as in the proof of HEINZ. However, it seems that the method is not applicable to more general Satz 2 of HEINZ.

have  $\|A^\nu x\| \leq \|B^\nu x\|$  for a set of  $\nu$  dense in the interval  $0 \leq \nu \leq 1$ . But as  $\|A^\nu x\|$  and  $\|B^\nu x\|$  are continuous functions of  $\nu$ , it follows that it holds for every  $\nu$  of that interval, i. e., that  $A^\nu \leq B^\nu$  for  $0 \leq \nu \leq 1$ .

II. Next we assume only that  $B$  is bounded. Then for every  $\varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon = (B^2 + \varepsilon^2 I)^{\frac{1}{2}}$  is bounded and has positive lower bound. Since  $\|B_\varepsilon x\|^2 = \|B x\|^2 + \varepsilon^2 \|x\|^2$ ,  $A \leq B$  implies  $A \leq B_\varepsilon$  so that we have  $A^\nu \leq (B_\varepsilon)^\nu$  by what is already proved. On making  $\varepsilon \rightarrow 0$  we obtain  $A^\nu \leq B^\nu$ , since  $\|(B_\varepsilon)^\nu x\|$  is continuous in  $\varepsilon$ .

III. Finally let  $B$  be unbounded. Setting  $A_\varepsilon = (A^2 + \varepsilon^2 I)^{\frac{1}{2}}$  and  $B_\varepsilon = (B^2 + \varepsilon^2 I)^{\frac{1}{2}}$ , we have

$$(2) \quad \mathfrak{D}_{A_\varepsilon} = \mathfrak{D}_A, \|A_\varepsilon x\|^2 = \|A x\|^2 + \varepsilon^2 \|x\|^2 \text{ and similarly for } B.$$

Hence  $A \leq B$  implies  $A_\varepsilon \leq B_\varepsilon$ . By the Corollary to Theorem 1, it follows that  $(B_\varepsilon)^{-1} \leq (A_\varepsilon)^{-1}$ . Since  $(A_\varepsilon)^{-1}$  is bounded, we have  $(B_\varepsilon)^{-\nu} \leq (A_\varepsilon)^{-\nu}$  for  $0 \leq \nu \leq 1$  by what is already proved. Again by the Corollary, it follows that  $(A_\varepsilon)^\nu \leq (B_\varepsilon)^\nu$ . Noting the relations (2) and making  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we finally obtain  $A^\nu \leq B^\nu$  by continuity, for it is easily seen that  $\mathfrak{D}_{(B_\varepsilon)^\nu} = \mathfrak{D}_{B^\nu}$  and  $\|(B_\varepsilon)^\nu x\|$  is a continuous function of  $\varepsilon$  for  $\varepsilon \geq 0$  for fixed  $x \in \mathfrak{D}_{B^\nu}$  and  $\nu$ .

2. Let  $Q$  be a closed linear operator with everywhere dense domain  $\mathfrak{D}_Q$ . Then the following facts are well known<sup>7)</sup>. Both  $Q^*Q$  and  $Q Q^*$  are self-adjoint and non-negative. If we set  $H = (Q^*Q)^{\frac{1}{2}}$ ,  $K = (Q Q^*)^{\frac{1}{2}}$ , we have

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_Q, \|H x\| = \|Q x\| & (x \in \mathfrak{D}_Q), \\ \mathfrak{D}_K = \mathfrak{D}_{Q^*}, \|K y\| = \|Q^* y\| & (y \in \mathfrak{D}_{Q^*}). \end{cases}$$

Let  $E, F$  be the projections onto  $\overline{\mathfrak{R}_Q}, \overline{\mathfrak{R}_{Q^*}}$  respectively. There is a partially isometric operator<sup>7)</sup>  $W$  such that

$$(4) \quad W = W E = F W, W^* = W^* F = E W^*, W^* W = E, W W^* = F, \|W\| \leq 1.$$

$$(5) \quad \begin{cases} Q = W H = K W, & Q^* = W^* K = H W^*, \\ H = W^* Q = Q^* W, & K = Q W^* = W Q^*. \end{cases}$$

*Lemma 2.* Let  $H, K, E, F, W$  be as above. Let  $\{E_\lambda\}$  and  $\{F_\lambda\}$  be the resolutions of the identity corresponding to  $H$  and  $K$  respectively (which are assumed to be continuous to the right). Then we have

i)  $E_\lambda = 0, F_\lambda = 0$  for  $\lambda < 0$ ; ii)  $E_0 = I - E, F_0 = I - F, W E_0 = 0, F_0 W = 0$ ; iii)  $F_\lambda = F_0 + W E_\lambda W^*, E_\lambda = E_0 + W^* F_\lambda W$  for  $\lambda \geq 0$ .

*Proof.* i) is clear since  $H \geq 0, K \geq 0$ . Next,  $E x = 0$  is equivalent to  $(x, Q^* y) = 0$  for all  $y \in \mathfrak{D}_{Q^*}$ , i. e., to  $Q x = 0, H x = 0, x = E_0 x$ . Hence we have  $E_0 = I - E$ , and it follows by (4) that  $W E_0 = W - W E = 0$ . Similarly we obtain  $F_0 = I - F$  and  $F_0 W = 0$ , thus proving ii). To prove iii), we set  $F'_\lambda = W E_\lambda W^*$ . Then  $F'_\lambda$  is clearly a bounded, symmetric operator and  $F'_\lambda = 0$  for  $\lambda < 0$ . For  $\lambda = 0$ , we have  $F'_0 = W E_0 W^* = 0$  by ii). For  $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ , we have  $F'_\lambda F'_\mu = W E_\lambda W^* W E_\mu W^* = W E_\lambda E E_\mu W^* = W E_\lambda (I - E_0) E_\mu W^* = W (E_\lambda - E_0) W^* = F'_\sigma - F'_0 = F'_\sigma$ , where  $\sigma = \min(\lambda, \mu)$ . Since  $F'_\lambda$  is continuous to the right as well as  $E_\lambda$ , it follows that  $\{F'_\lambda\}$  is a resolution of the projection  $F'_\infty = W E_\infty W^* = W W^* = F = I - F_0$ . We now define  $F''_\lambda$  by  $F''_\lambda = 0$  for  $\lambda < 0$  and  $F''_\lambda = F_0 + F'_\lambda$  for  $\lambda \geq 0$ . From what is just proved,  $\{F''_\lambda\}$  is a resolution of the identity. Let  $K'' = \int \lambda d F''_\lambda$  be the corresponding

<sup>7)</sup> NEUMANN [2], p. 307 and [3], pp. 141—143.

self-adjoint operator. The equality

$$\begin{aligned}\|K''x\|^2 &= \int_{-0}^{\infty} \lambda^2 d(F_1'x, x) = \int_{+0}^{\infty} \lambda^2 d(F_1'x, x) = \int_{+0}^{\infty} \lambda^2 d(F_1'x, x) \\ &= \int_{+0}^{\infty} \lambda^2 d(W E_1 W^* x, x) = \int_{-0}^{\infty} \lambda^2 d(E_1 W^* x, W^* x) = \|H W^* x\|^2\end{aligned}$$

shows that  $x \in \mathfrak{D}_{K''}$  if and only if  $W^* x \in \mathfrak{D}_H$ . In this case we deduce by quite a similar calculation that  $(K''x, y) = (H W^* x, W^* y) = (W H W^* x, y)$  for every  $y \in \mathfrak{H}$ , whence follows  $K'' = W H W^* = Q W^* = K$  by (5). This implies  $F_1' = F_1$ , i. e.,  $F_1 = F_0 + F_1' = F_0 + W E_1 W^*$  for  $\lambda \geq 0$ . In the same way we can prove  $E_1 = E_0 + W^* F_1 W$ .

**Lemma 3.** Let  $H, K, W$  be as above. Let  $\varphi(\lambda)$  be a complex-valued function defined for  $0 \leq \lambda < \infty$  and belonging to a class of Baire. Then we have  $W \varphi(H) = \varphi(K) W$ .

*Proof.* By Lemma 2, we have  $F_1 W = 0$  for  $\lambda < 0$  and  $F_1 W = F_0 W + W E_1 W^* W = W E_1 E = W E_1 (I - E_0) = W E_1$ ,  $(F_1 W x, W x) = (W E_1 x, W x) = (W^* W E_1 x, x) = (E E_1 x, x) = ((E_1 - E_0) x, x)$  for  $\lambda \geq 0$ . It follows that

$$\begin{aligned}\|\varphi(K) W x\|^2 &= \int_{-0}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d(F_1 W x, W x) = \int_{+0}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d((E_1 - E_0) x, x) \\ &= \int_{+0}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d(E_1 x, x) = \|\varphi(H) x\|^2 - |\varphi(0)|^2 \|E_0 x\|^2.\end{aligned}$$

This shows that  $\varphi(K) W x$  exists if and only if  $\varphi(H) x$  exists. In this case we have

$$\begin{aligned}(\varphi(K) W x, y) &= \int_{-0}^{\infty} \varphi(\lambda) d(F_1 W x, y) = \int_{+0}^{\infty} \varphi(\lambda) d(W E_1 x, y) \\ &= \int_{-0}^{\infty} \varphi(\lambda) d(E_1 x, W^* y) = (\varphi(H) x, W^* y) = (W \varphi(H) x, y)\end{aligned}$$

(note that  $F_0 W = W E_0 = 0$ ), i. e.,  $\varphi(K) W = W \varphi(H)$ .

**Lemma 4.** Let  $Q, H, K, W$  be as above. Let  $\varphi(\lambda)$  and  $\psi(\lambda)$  be complex-valued functions defined for  $0 \leq \lambda < \infty$  and belonging to a class of Baire, and let  $\varphi(\lambda) \psi(\lambda) = \lambda$ . Set  $Q' = \psi(K) W \varphi(H)$ . Then<sup>a)</sup> we have  $\tilde{Q}' = Q$ . If in particular  $|\varphi(\lambda)| \leq \alpha + \beta \lambda$  for some positive constants  $\alpha, \beta$ , then  $Q' = Q$ .

*Proof.* Lemma 3 gives  $\psi(K) W = W \psi(H)$  so that  $Q' = W \psi(H) \varphi(H) = W H'$  where  $H' = \psi(H) \varphi(H)$ . Since  $\psi(\lambda) \varphi(\lambda) = \lambda$ , we have<sup>b)</sup>  $H' \subseteq H$  and  $\tilde{H}' = H$ . Hence  $Q' = W H' \subseteq W H = Q$  and  $\tilde{Q}' \subseteq \tilde{Q} = Q$ . Now let  $x \in \mathfrak{D}_Q = \mathfrak{D}_H$ . Since  $\tilde{H}' = H$ , there is a sequence  $\{x_n\}$  such that  $x_n \in \mathfrak{D}_{H'}$ ,  $x_n \rightarrow x$ ,  $H' x_n \rightarrow H x$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Hence  $Q' x_n = W H' x_n \rightarrow W H x = Q x$ , showing that  $\tilde{Q}' \supseteq Q$ . Thus we have proved  $\tilde{Q}' = Q$ . If  $|\varphi(\lambda)| \leq \alpha + \beta \lambda$  holds, then we have  $\mathfrak{D}_{\varphi(H)} \supseteq \mathfrak{D}_H$ . It follows<sup>c)</sup> that  $H' = H$  and hence  $Q' = Q$ .

**Theorem 3<sup>10)</sup>.** Let  $Q$  be a closed linear operator with everywhere dense domain. Let  $A, B$  be self-adjoint operators and let  $A \geq 0, B \geq 0$ . Further let  $Q \leq B$  and  $Q^* \leq A$ . Then  $|(Q x, y)| \leq \|B^v x\| \|A^{1-v} y\|$  holds for  $x \in \mathfrak{D}_B$ ,  $y \in \mathfrak{D}_A$  and  $0 \leq v \leq 1$ .

<sup>a)</sup>  $\tilde{T}$  denotes the closure of the operator  $T$  when it exists.

<sup>b)</sup> B. v. SZ. NAGY [6], p. 461.

<sup>10)</sup> This is an improvement of Satz 1 of HEINZ [1], p. 420.

Proof. Let  $H$ ,  $K$  and  $W$  be defined for  $Q$  as above. Then we have  $Q = K^{1-\nu} W H^\nu$  ( $0 \leq \nu \leq 1$ ) by setting  $\varphi(\lambda) = \lambda^\nu$ ,  $\psi(\lambda) = \lambda^{1-\nu}$  in Lemma 4. Hence we have  $|(Qx, y)| = |(WH^\nu x, K^{1-\nu} y)| \leq \|WH^\nu x\| \|K^{1-\nu} y\| \leq \|H^\nu x\| \|K^{1-\nu} y\|$  for  $x \in \mathfrak{D}_H$ ,  $y \in \mathfrak{D}_K$ , where we have used  $\|W\| \leq 1$  [see (4)]. On the other hand, (3) shows that  $H \leq Q$  and  $K \leq Q^*$ . Hence we have  $H \leq B$  and  $K \leq A$  by hypothesis and a remark following Definition 1. It follows from Theorem 2 that  $H^\nu \leq B^\nu$ ,  $K^{1-\nu} \leq A^{1-\nu}$  and hence  $\|H^\nu x\| \leq \|B^\nu x\|$ ,  $\|K^{1-\nu} y\| \leq \|A^{1-\nu} y\|$  for  $x \in \mathfrak{D}_B$ ,  $y \in \mathfrak{D}_A$ . Thus we have the desired inequality.

*Remark.* Theorem 3 can be generalized as follows. Let  $\varphi(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda)$  be two functions defined and continuous for  $\lambda \geq 0$  with the following properties: i)  $\varphi(\lambda) \geq 0$ ,  $\psi(\lambda) \geq 0$ ; ii)  $\varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \lambda$ ; iii)  $\varphi(\lambda)$  and  $\psi(\lambda)$  have analytic extensions which are regular in the half plane  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  and  $0 \leq \arg \varphi(\lambda) \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \arg \psi(\lambda) \leq \pi/2$  for  $0 < \arg \lambda < \pi/2$ . Then we have  $|(Qx, y)| \leq \|\varphi(B)x\| \|\psi(A)y\|$  for  $x \in \mathfrak{D}_B$ ,  $y \in \mathfrak{D}_A$ .

For the proof we have only to use more general Satz 2 of HEINZ [1] instead of Theorem 2 in the above proof, noting that the functions  $\varphi(\lambda^{\frac{1}{2}})^2$  and  $\psi(\lambda^{\frac{1}{2}})^2$  satisfy the conditions of Satz 2.

### Bibliography.

- [1] HEINZ, E.: Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. 123, 415–438 (1951). — [2] NEUMANN, J. VON: Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. of Math. 33, 294–310 (1932). — [3] NEUMANN, J. VON: On rings of operators. Ann. of Math. 37, 116–229 (1936). — [4] RELICH, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. 122, 343–368 (1951). — [5] STONE, M. H.: Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis, New York 1932. — [6] B. v. SZ. NAGY: Spektraldarstellung linearer Transformationen des HILBERTschen Raumes, Erg. Math. 5, 416–496 (1942).

(Eingegangen am 7. April 1952).

## Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze.

Von

B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

In einer gemeinsamen Arbeit mit W. HABICHT, die als H-W zitiert werden soll<sup>1)</sup>, wurde das Problem der Lagerung von  $N$  Punkten mit Mindestabstand Eins auf einer möglichst kleinen Kugel für große  $N$  untersucht. In einer gemeinsamen Arbeit mit K. SCHÜTTE, die als S-W zitiert werden soll<sup>2)</sup>, wurde dasselbe Problem für einige kleine Werte von  $N$  behandelt und für  $N \leq 9$  vollständig gelöst.

Inzwischen hat sich ergeben, was SCHÜTTE und ich nicht wissen konnten, daß FrI. G. FREY in einer nicht publizierten Diplomarbeit an der Universität Zürich 1951 dasselbe Problem für  $N \leq 7$  ebenfalls gelöst hat. Sie hat natürlich dieselben Minimalfiguren gefunden wie wir.

§ 1 der vorliegenden Arbeit ist ein Zusatz zu H-W, § 2 und § 3 sind Zusätze zu S-W. In § 1 wird die in H-W erhaltene Abschätzungsformel (17) für  $4R^2$  verschärft. Wird die Abschätzung von  $4R^2$  nach oben mit der von FEJES TÓTH und H-W erhaltenen Abschätzung nach unten kombiniert, so erhält man

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi} N \leq 4R^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} N + 3 \left( \frac{N}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} + 3 \left( \frac{N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Der Koeffizient von  $N^{\frac{2}{3}}$  ist

$$3(4\pi)^{-\frac{2}{3}} = 0,555,$$

während der entsprechende Koeffizient in H-W noch 3,871 betrug.

In § 2 wird eine vereinfachte Behandlung des Falles  $N = 7$  angegeben. Die in § 2 bewiesene Konvexitätseigenschaft wird in § 3 wieder benutzt.

In § 3 wird gezeigt, daß eine von H. RUTISHAUSER<sup>3)</sup> konstruierte Lagerung von 20 Punkten nicht die günstigste ist. Durch eine Verschiebung der Punkte erhält man nämlich eine Lagerung von 20 Punkten auf einer kleineren Kugel, die vielleicht die Minimalkugel darstellt.

Dasselbe Verfahren ergibt auch eine Lagerung von 42 Punkten. Wie bei RUTISHAUSER sind die Punkte zonal angeordnet: 30 um den Äquator herum, 6 beim Nordpol und 6 beim Südpol. Schließlich wird noch eine Lagerung von 122 Punkten mit Ikosaedersymmetrie angegeben.

<sup>1)</sup> HABICHT, W., u. B. L. VAN DER WAERDEN: Lagerung von Punkten auf der Kugel. Math. Ann. 123, 223 (1951).

<sup>2)</sup> SCHÜTTE, K., u. B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte im Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. 123, 96 (1951).

<sup>3)</sup> RUTISHAUSER, H.: Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche. Comm. Math. Helvet. 17, 327 (1945).

## § 1. Abschätzung des Minimaldurchmessers nach oben.

Eine obere Schranke für den Durchmesser der Minimalkugel bei gegebener Punktezahl  $N$  wird gefunden, indem man eine Lagerung von  $N$  Punkten mit Mindestabstand Eins effektiv konstruiert. Für kleine  $N$  (bis  $N = 32$ ) ist das in § 17 der Arbeit S-W geschehen. Wir nehmen nun  $N$  als groß an ( $N > 32$ ) und konstruieren zunächst eine Lagerung von möglichst vielen Punkten auf einer Kugel von gegebenem Radius  $R$ . Dabei werden wir unsere Aufmerksamkeit vor allem auf die Hauptglieder von der Größenordnung  $N$  und  $N^{\frac{1}{2}}$  in der Formel für  $4R^3$  richten und kleinere Zusatzglieder zunächst außer acht lassen, wenn die Darstellung dadurch übersichtlicher wird.

Die Kugel möge durch äquidistante Parallelkreise in  $m$  gleich breite Zonen eingeteilt werden. Sind  $\vartheta$  und  $\varphi$  sphärische Koordinaten, so reicht eine Zone von

$$\vartheta' = (j-1) \frac{\pi}{m} \text{ bis } \vartheta'' = j \frac{\pi}{m}.$$

Wir greifen eine Zone heraus, die etwa auf der nördlichen Halbkugel liegen möge; dann ist

$$\sin \vartheta' < \sin \vartheta''.$$

Die Kugel möge nun längs des Halbkreises  $\varphi = 0$  vom Nordpol bis zum Südpol aufgeschlitzt werden. Es sei  $\varepsilon = \frac{\pi}{m}$  und

$$s' = \sin \vartheta'$$

$$s'' = \sin \vartheta''$$

$$r' = R \varepsilon \frac{s'}{s'' - s'}$$

$$r'' = R \varepsilon \frac{s''}{s'' - s'}.$$

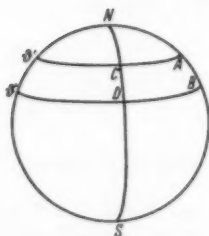


Fig. 1.

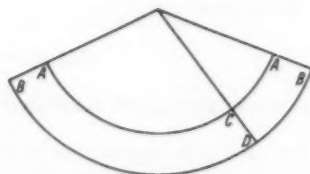


Fig. 2.

Die aufgeschlitzte Kugelzone von  $\vartheta'$  bis  $\vartheta''$  wird nun auf einen ebenen Kreisringsektor abgebildet, begrenzt von zwei konzentrischen Kreisen mit Radien  $r'$  und  $r''$  und von zwei Radien, die einen Winkel

$$\alpha = 2\pi R \frac{s'}{r'} = 2\pi R \frac{s''}{r''} = 2\pi \frac{s'' - s'}{\varepsilon} = 2\pi q$$

einschließen.

Die Breite des Kreisringsektors ist

$$r'' - r' = R \varepsilon,$$

also gleich der Breite der Kugelzone, auf einem Meridiankreis gemessen. Die begrenzenden Kreisbogen des Sektors haben die Längen  $2\pi R s'$  und  $2\pi R s''$ , sind also gleich lang wie die beiden Parallelkreise auf der Kugel. Also kann man die Kugelzone so auf den Kreisringsektor abbilden, daß die beiden be-

grenzenden Breitenkreise längentreu auf die beiden Kreisbogen  $ACA$  und  $BDB$  abgebildet werden und alle Meridiankreise  $CD$  ebenfalls längentreu auf Radien  $CD$ .

Führt man in der Ebene Polarkoordinaten  $r, \psi$  ein, so wird  $r$  eine lineare Funktion von  $\theta$  allein und  $\psi$  eine lineare Funktion von  $\varphi$  allein. Das Linienelement in der Ebene ist

$$(1) \quad d s^2 = d r^2 + r^2 d \psi^2 = R^2 d \theta^2 + q^2 r^2 d \varphi^2.$$

Der Vergleich mit dem Linienelement auf der Kugel

$$(2) \quad d \sigma^2 = R^2 d \theta^2 + (R \sin \theta)^2 d \varphi^2$$

ergibt, daß  $d \sigma^2$  immer größer oder gleich  $d s^2$  ist. Für  $\theta' \leq \theta \leq \theta''$  gilt nämlich

$$(3) \quad q r \leq R \sin \theta.$$

Das folgt unmittelbar aus der Konkavität der Sinusfunktion zwischen 0 und  $\pi$ ; denn die linke Seite von (3) ist eine lineare Funktion von  $\theta$ , die rechte eine Sinusfunktion, und für  $\theta = \theta'$  und  $\theta = \theta''$  gilt in (3) das Gleichheitszeichen.

Daraus folgt, daß auch  $\int d \sigma$  längs eines kürzesten Großkreisbogens größer oder gleich  $\int d s$  längs des Bildbogens in der Ebene, also auch  $\geq \int d s$  längs der Verbindungsstrecke der Endpunkte ist. Sphärisch gemessene Entfernungen werden also bei der Abbildung nicht vergrößert.

Der Flächeninhalt des Kreisringsektors ist

$$S = \frac{\alpha}{2\pi} (\pi r'^2 - \pi r^2) = q \pi (r'' - r') (r'' + r').$$

Setzt man hier für  $q, r'$  und  $r''$  ihre Werte ein, so erhält man

$$(4) \quad S = \pi R^2 \varepsilon (s' + s'').$$

Da das Ergebnis symmetrisch in  $s'$  und  $s''$  ist, so gilt es auch dann, wenn die Zone auf der südlichen Halbkugel liegt, also  $s' > s''$  ist. Liegt die Zone aber genau symmetrisch zum Äquator (was nur bei ungeradem  $j$  einmal vorkommt), so nimmt man statt der „Kegelprojektion“ eine „Zylinderprojektion“, bei der das Bild der Zone ein Rechteck wird, und erhält dasselbe Ergebnis (4).

Nun denke man sich in der Ebene des Sektors (oder des Rechtecks) ein Netz von gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge  $b$ , wobei  $b$  der sphärisch gemessene Abstand zweier Punkte auf der Kugel ist, deren lineare Entfernung

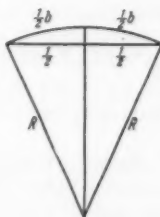


Fig. 3.

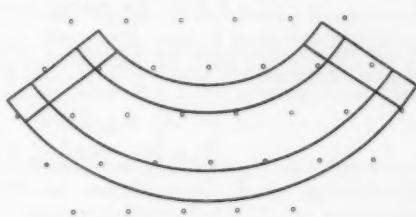


Fig. 4.

Eins beträgt. Wir haben

$$\sin \frac{b}{2R} = \frac{1}{2R}$$

$$\frac{b}{2R} = \arcsin \frac{1}{2R} = \frac{1}{2} R^{-1} + \frac{1}{48} R^{-3} + \dots$$

also

$$b = 1 + \frac{1}{24} R^{-2} + \dots$$

Lassen wir die Zusatzglieder weg, weil sie am Endergebnis für große  $R$  fast nichts ändern, so können wir  $b$  durch 1 ersetzen.

Die Punkte des Kreisringsektors, die vom Rande mindestens den Abstand  $\frac{1}{2}b$  haben, bilden einen verkleinerten Sektor  $K'$ . Der Flächeninhalt des abgeschnittenen Randstreifens von  $K$  ist höchstens gleich dem Produkt aus der Breite  $\frac{1}{2}b$  und dem Umfang des Sektors

$$(5) \quad \begin{aligned} 2T &= 2\pi R s' + 2\pi R s'' + 2\varepsilon R \\ &= 2R(\pi s' + \pi s'' + \varepsilon). \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt von  $K'$  ist also

$$(6) \quad S' \geq S - T.$$

Die Anzahl der Netzkpunkte im abgeschlossenen Bereich  $K'$  sei  $n$ . Wir verschieben das Netz so, daß  $n$  möglichst groß wird. Nach einer Überlegung von BLICHFELDT<sup>1)</sup> kann das Maximum von  $n$  folgendermaßen abgeschätzt werden.

Zwei Dreiecke des Netzes bilden ein Fundamentalparallelogramm. Es genügt, einen Punkt  $P$  des Netzes im Fundamentalparallelogramm zu verschieben, um alle verschobenen Netze zu erhalten. Für jede Lage von  $P$  ist die Zahl  $n$  bestimmt; sie ist eine stückweise konstante, also integrierbare Funktion von  $P$ :

$$n = n(P).$$

$n$  kann auch so bestimmt werden: man überdecke die Ebene einfach mit kongruenten Parallelogrammen, die durch Verschiebungen aus dem Fundamentalparallelogramm entstehen. Nun zerschneide man  $K'$  in Stücke, die je einem solchen Parallelogramm angehören, und verschiebe alle diese Stücke rückwärts in das Fundamentalparallelogramm hinein. Dann ist  $n(P)$  die Anzahl dieser Stücke, die den Punkt  $P$  überdecken.

Das Integral der Funktion  $n(P)$  über das Fundamentalparallelogramm ist offensichtlich gleich der Summe der Flächeninhalte der Stücke, in die  $K'$  zerschnitten wurde, also gleich dem Flächeninhalt  $S'$  von  $K'$ . Also ist der Mittelwert  $\hat{n}$  der Funktion  $n(P)$  gleich  $S'$ , dividiert durch die Fläche des Fundamentalparallelogramms:

$$\hat{n} = \frac{S'}{b^2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{S - T}{b^2} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Für mindestens eine Lage des Punktes  $P$  muß die Anzahl  $n$  größer oder gleich  $\hat{n}$  sein. Ersetzen wir wieder  $b$  durch 1, so kommt

$$(7) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} n \geq S - T.$$

Eine geringfügige Verschärfung der Abschätzung — Berücksichtigung der vier Eckstückchen von  $K$ , die zusammen den Flächeninhalt 1 haben und bei der Abschätzung von  $T$  doppelt gezählt wurden — ergibt, daß (7) sogar streng gilt, auch wenn der genaue Wert von  $b$  in Rechnung gestellt wird.

Überträgt man nun die in  $K'$  liegenden Netzkpunkte auf die Kugel zurück, so werden ihre Entfernungen nicht verkleinert, bleiben also  $\geq b$ . Ebenso haben sie vom Rande der Zone eine Entfernung  $\geq \frac{1}{2}b$ , also haben zwei Netz-

<sup>1)</sup> BLICHFELDT: Trans. Amer. Math. Soc. 15, 227 (1914).



punkte verschiedener Zonen auch immer eine Entfernung  $\geq b$  auf der Kugel, also  $\geq 1$  im Raum.

Summiert man (7) über alle Zonen, so erhält man für die Gesamtzahl  $N$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{3} N &\geq \Sigma (S - T) = \Sigma S - \Sigma T \\ &= \pi R^2 \varepsilon \Sigma (s' + s'') - \pi R \Sigma (s' + s'') - R \Sigma \varepsilon \\ &= \pi R (R \varepsilon - 1) \Sigma (s' + s'') - \pi R.\end{aligned}$$

Nun ist nach ARCHIMEDES<sup>2)</sup> für  $\varepsilon = \frac{\pi}{m}$

$$\Sigma s' = \Sigma s'' = \sum_1^m \sin j \varepsilon = \cotg \frac{1}{2} \varepsilon,$$

also wird

$$(8) \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot N = 2 \pi R (R \varepsilon - 1) \cotg \frac{1}{2} \varepsilon - \pi R.$$

Um die rechte Seite möglichst groß zu machen, setzen wir

$$(9) \quad \varepsilon = 6^{\frac{1}{3}} R^{-\frac{1}{3}}.$$

Dann wird (8)

$$\begin{aligned}(10) \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot N &\geq 2 \pi R^2 \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} \right) \cotg \frac{1}{2} \varepsilon - \pi R \\ &= 4 \pi R^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{80} + \dots \right) - \pi R \\ &\geq 4 \pi R^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) - \pi R \\ &= 4 \pi R^2 - 6^{\frac{2}{3}} \pi R^{\frac{4}{3}} - \pi R.\end{aligned}$$

Streng genommen ist (9) nicht möglich, weil  $m = \frac{\pi}{\varepsilon}$  eine ganze Zahl sein muß. Man muß also  $\varepsilon$  durch einen solchen benachbarten Wert ersetzen, daß  $m = \frac{\pi}{\varepsilon}$  ganzzahlig ausfällt. Dabei kommt auf der rechten Seite von (10) nur ein kleines negatives Zusatzglied von der Größenordnung  $R^{\frac{2}{3}}$  hinzu, das jedenfalls kleiner als  $\frac{1}{2} \pi R$  ist. So erhält man statt (10)

$$(11) \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot N \geq 4 \pi R^2 - 6^{\frac{2}{3}} \pi R^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} \pi R.$$

Durch eine geringfügige Verschärfung der Abschätzung kann das letzte Glied in (11) eliminiert werden. Man kann nämlich  $m$  ungerade wählen und die Zone am Äquator so breit machen, daß die Höhe des Rechteckes  $K'$  ein Vielfaches von  $\frac{1}{2} b \sqrt{3}$  wird. Dann haben fast  $2 \pi R$  Punkte mehr Platz als nach (11), und man erhält

$$(12) \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} N \geq 4 \pi R^2 - 6^{\frac{2}{3}} \pi R^{\frac{4}{3}}$$

oder

$$(13) \quad \frac{\sqrt{3}}{2 \pi} N \geq 4 R^2 - (6 R^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man

$$x = 3^{\frac{1}{2}} \left( \frac{N}{4 \pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad y = (6 R^2)^{\frac{1}{3}},$$

<sup>2)</sup> ARCHIMEDES: Kugel und Zylinder, Satz 21.

so wird (13)

$$\frac{2}{3}x^3 \geq \frac{2}{3}y^3 - y^2$$

oder

$$(14) \quad y^3 \leq x^3 + \frac{5}{3}y^3.$$

Durch Quadrieren folgt

$$y^4 \leq x^4 + 3x^3y^2 + \frac{25}{9}y^4 < (x^2 + y^2x^{-1})^2$$

$$y^2 < x^2 + \frac{5}{3}y^2x^{-1}$$

$$(15) \quad y^2 < \frac{x^3}{x-1} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right).$$

Nun ist für  $N > 32$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

Daher ergibt (15)

$$y^2 < x^2 + x\sqrt{3}.$$

Setzt man das in (14) ein, so erhält man

$$\frac{2}{3}y^3 < \frac{2}{3}x^3 + x^2 + x\sqrt{3}$$

oder

$$(16) \quad 4R^2 < 2\sqrt{3} \frac{N}{4\pi} + 3 \left(\frac{N}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + 3 \left(\frac{N}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

für  $N > 32$ . Da dieselbe Ungleichung nach der Tabelle bei S-W auch für  $N \leq 32$  gilt, so gilt sie allgemein.

Das letzte Glied rechts in (16) ist wahrscheinlich unnötig. Im zweiten Glied kann der Koeffizient 3 noch ein wenig verkleinert werden. Ich sehe aber nicht, wie man den Exponenten  $\frac{2}{3}$  dieses Gliedes verkleinern könnte. Bei einer Lagerung von möglichst vielen Punkten auf einer sehr großen Kugel kommen immer große Gebiete vor, in denen die Punkte annähernd so gelagert sind wie in einem ebenen Dreiecksnetz. Wenn das nämlich nicht der Fall wäre, würde man asymptotisch eine zu kleine Dichte der Punkte erhalten. Welche Form diese Gebiete haben, ist ziemlich gleichgültig, aber ihre Anzahl  $m$  ist im günstigsten Fall von der Größenordnung  $R^{\frac{1}{3}}$ . Zwischen diesen Gebieten bleiben Randstreifen übrig, weil die verschiedenen Dreiecksnetze in der Orientierung nicht zusammenpassen. Die gesamte Länge dieser Randstreifen ist von der Größenordnung  $R^{\frac{1}{3}}$ . Die Randstreifen gaben in unserer Rechnung Anlaß zu dem Glied  $\Sigma T$  von der Größenordnung  $R^{\frac{1}{3}}$ . Ein weiteres Zusatzglied von derselben Größenordnung rührte davon her, daß ein exaktes Dreiecksnetz auf der Kugel nicht möglich ist und die mittlere Dichte der Punkte in den Gebieten daher etwas kleiner wird als in der Ebene. Macht man  $m$  größer, so vergrößert sich das erste Zusatzglied  $\Sigma T$ . Macht man  $m$  kleiner, so vergrößert sich das zweite Zusatzglied. Die Größenordnung  $R^{\frac{1}{3}}$  scheint also das Günstigste zu sein, was man erreichen kann.

## § 2. Der Fall $N = 7$ .

Verbindet man auf der Minimalkugel je zwei Punkte im Abstand Eins durch einen kürzesten Großkreisbogen, so entsteht ein Graph. In S-W § 8

wurde bewiesen, daß für  $N = 7$  der Graph zwei Vierecke  $PAQB$  und  $PCRD$  und zwei Dreiecke  $PAD$  und  $PBC$  enthält. Wir ziehen nun in dem Viereck  $PAQB$  die Diagonale  $PQ = f$  und beweisen:

**Satz 1.** Die Diagonale  $f$  ist eine konkave Funktion des Winkels  $\varphi$  am Punkt  $P$ .

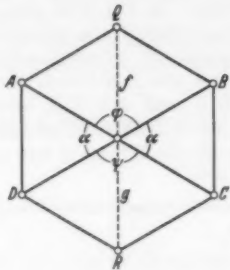


Fig. 5.

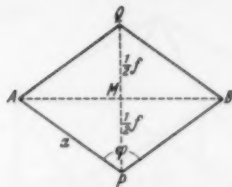


Fig. 6.

Beweis: Ist  $M$  der Mittelpunkt des sphärischen Vierecks  $PAQB$ , so ist  $MPA$  ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit fester Hypotenuse  $a$ , also  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} f = \operatorname{tg} a \cos \frac{1}{2} \varphi$ . Differentiation ergibt

$$\frac{df}{d\varphi} = -\operatorname{tg} a \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

Mit zunehmendem  $\varphi$  nimmt die rechte Seite ab, also ist  $f$  eine konkave Funktion von  $\varphi$ .

Ebenso ist natürlich die Diagonale  $PR = g$  eine konkave Funktion des Winkels  $\psi$ .

Nun ist aber die Summe der Winkel bei  $P$  gleich  $360^\circ$ , also ist

$$\psi = 360 - 2\alpha - \varphi.$$

Der Dreieckswinkel  $\alpha$  ist konstant, also ist  $\psi$  eine lineare Funktion von  $\varphi$ , also ist  $g$  eine konkave Funktion von  $\varphi$ .

Die Summe von zwei konkaven Funktionen ist wieder eine konkave Funktion, also ist  $f + g$  eine konkave Funktion von  $\varphi$ .

Eine konkave Funktion kann im Innern des zulässigen Bereiches der Veränderlichen kein Minimum haben. Wenn also  $AB$  und  $CD$  beide unverändert sind, d. h. wenn die Strecken  $AB$  und  $CD$  beide größer als Eins sind, so kann durch eine kleine Variation von  $\varphi$  die Summe  $f + g$  verkleinert werden.

Nun ist  $f + g > 180^\circ$ , die kürzeste sphärische Entfernung  $QR$  ist also  $360^\circ - f - g$ . Wenn  $f + g$  verkleinert wird, so wird  $QR$  vergrößert, d. h. die Verbindung  $QR$  wird aufgehoben. Dann werden  $Q$  und  $R$  Punkte 2. Grades und der Graph wird reduzibel, was auf der Minimalkugel nicht sein kann.

Also ist  $A$  mit  $B$  oder  $C$  mit  $D$  verbunden. Außerdem ist  $Q$  mit  $R$  verbunden, weil sonst der Graph wieder reduzibel sein würde. Also ist der Graph mit dem der Fig. 8 oder 14 aus S-W identisch.

Damit ist die Minimalkugel für  $N = 7$  von neuem bestimmt, und zwar mit weniger Rechnung als in S-W.

### § 3. Der Fall $N = 20$ .

H. RUTISHAUSER hat eine Lagerung von 20 Punkten mit Mindestabstand Eins auf einer Kugel vom Radius

$$R = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{4}$$

folgendermaßen konstruiert. Er nimmt auf dem Äquator 6 Punkte in gleichen Abständen, sodann auf zwei Parallelkreisen vom Radius  $r = 1$  wieder je 6 Punkte in regelmäßigen Sechsecken, aber um  $30^\circ$  verdreht gegen das erste Sechseck, schließlich den Nordpol und den Südpol. In Fig. 7 ist eine stereographische Projektion des ganzen Graphen vom Südpol aus gezeichnet, in Fig. 8 ein Teil der Figur am Äquator. Der Äquator ist jedesmal gestrichelt.

Greifen wir aus dem Graph zwei Vierecke  $PAQB$  und  $PCRD$  heraus, so haben wir genau dieselbe Situation wie in Satz 1 (Fig. 5): die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  bei  $P$

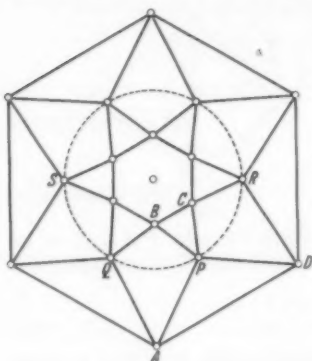


Fig. 7.

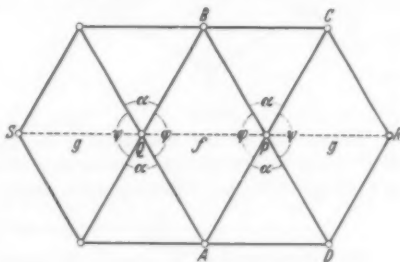


Fig. 8.

sind zusammen  $360^\circ - 2\alpha$ , und die Summe  $f + g$  der Diagonale  $PQ$  und  $PR$  ist eine konkave Funktion von  $\varphi$ .

Macht man nun  $\varphi$  etwas größer (oder kleiner), so nimmt  $f + g$  ab. Die Diagonalen  $f$  und  $g$  wiederholen sich je dreimal am Äquator entlang. Der Erfolg der Verkleinerung wird also der sein, daß die Folge der Strecken  $f g f g f g$  sich nicht mehr um den Äquator herum schließt. Man kann dann auf dem Äquator einen Punkt nach dem anderen wegschieben und isolieren; schließlich wird der ganze Graph in isolierte Punkte zerlegt und die Kugel läßt sich verkleinern.

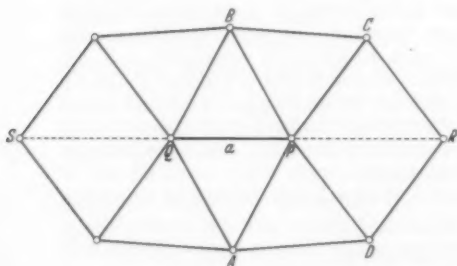


Fig. 9.

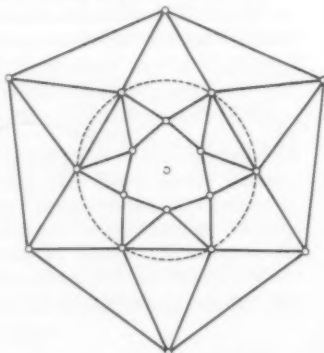


Fig. 10.

Die Verkleinerungsmöglichkeit hört erst dann auf, wenn eine Diagonale, etwa  $f$ , die kleinste zulässige Länge  $a$  erhalten hat (Fig. 9). Die Rechnung

lehrt, daß dann der Abstand des Nordpols zum höchsten Punkt  $B$  (oder des Südpols zu  $A$ ) immer noch größer als Eins ist. Nordpol und Südpol bleiben also isolierte Punkte und man erhält den Graph der Fig. 10. Der Graph hat nur noch Dreiersymmetrie. Er enthält drei Verbindungsstrecken mehr als der Graph der Fig. 7.

Aus den beim Beweis des Satzes 1 schon herangezogenen trigonometrischen Relationen zusammen mit den Bedingungen

$$f = a \text{ und } f + g = 120^\circ$$

sind  $a$  und  $R$  leicht zu berechnen; man findet

$$a = 47^\circ 26'$$

$$d^2 = 4 R^2 = 6,182.$$

Vergleicht man das mit der Schranke

$$d_0^2 = 5,812,$$

die man nach FEJES TÓTH findet, so ist der Überschuß nur 6%. Die Kugel dürfte die Minimalkugel sein. Der Graph ist nach dem Zonenprinzip aufgebaut, das sich in § 1 bereits als günstig erwies. Die Minimalgraphen für  $N = 8$  und  $N = 9$  haben eine ähnliche zonale Lagerung in der Äquatorialzone; nur fehlen hier die isolierten Punkte am Nord- und Südpol.

Analog zu der von RUTISHAUSER gefundenen Punktverteilung ist die folgende Lagerung von 42 Punkten: 10 Punkte gleichverteilt am Äquator,

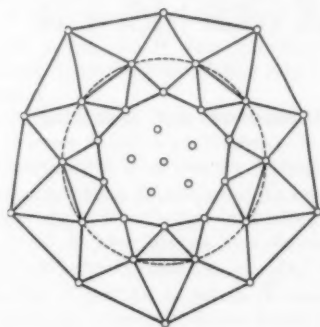


Fig. 11.

sodann auf zwei Parallelkreisen je 10 Punkte in regelmäßigen Zehneckern mit der Seitenlänge 1, sodann noch zwei Kränze von je 5 isolierten Punkten, etwa

33° vom Nord- oder Südpol entfernt, schließlich Nord- und Südpol. Wiederum kann die Kugel verkleinert werden, indem man die Abstände der Punkte am Äquator abwechselnd verkleinert und vergrößert, bis 5 Abstände minimal, d. h. gleich Eins werden (Fig. 11).

Die Rechnung ergibt

$$a = 32^{\circ} 5'$$

$$d^2 = 13,095.$$

Der Überschuß von  $d^2$  über  $d_0^2 = 11,868$  beträgt fast 11%. Ich weiß nicht, ob die Kugel minimal ist.

Die dichteste mir bekannte Lagerung von Punkten auf der Kugel ist die folgende. Ausgehend von der Ikosaederteilung der Kugelfläche teile man jedes Dreieck in 4 kleinere Dreiecke

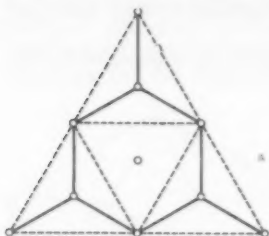


Fig. 12.

(Fig. 12). Die Ecken sind die 12 Ikosaederecken und die 30 Kantenmitten. In jedem dieser 80 Dreiecke nehme man nun noch den Mittelpunkt des Umkreises hinzu. So erhält man 122 Punkte, von denen 20 isoliert liegen, während die übrigen einen irreduziblen Graph bilden. Das Quadrat des Durchmessers ist  $d^2 = 35,41$ . Der Überschuß über  $d_0^2 = 33,91$  beträgt nur 4,4%.

Die Tabelle am Schlusse von S-W kann demnach so ergänzt werden:

$N$	$d^2$	$d_0^2$	$p$
20	(6,18)	5,81	6%
24	(7,22)	6,91	5%
32	(9,74)	9,11	7%
42	(19,10)	11,87	11%
122	(35,41)	33,91	4%

(Eingegangen am 2. April 1952.)

## Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von

HANS RICHTER in Freiburg i. Br.

### Teil II. Axiomatik der Erwartungskoeffizienten.

#### § 5. Versuche und Ergebnisse.

Die Betrachtungen von Teil I<sup>1)</sup> dieser Arbeit führten uns dazu, die Wahrscheinlichkeit ( $W.$ ) als einen Ordnungsbegriff anzusehen, mit dessen Hilfe das erkennende Subjekt die Erfahrungswelt zu erfassen sucht. Die  $W.$ -Axiomatik erschien damit als mathematische Präzisierung dessen, was wir bereits vorwissenschaftlich durch die Belegung von zukünftigen Ereignissen mit Hilfe des „Erwartungsgefühls“ meinen. Es erwies sich dabei als zweckmäßig, die  $W.$ -Belegung zunächst auf die möglichen Ereignisse von Versuchsvorschriften  $H$  zu beschränken. Wenn wir nun auch auf eine naturphilosophische Definition der  $H$  verzichten können, so ist es doch nötig, einige charakteristische Züge derselben anzugeben:

a) Ein konkretes Experiment  $\hat{H}$  ist anzusehen als die Realisierung eines bestimmten Versuchsschemas  $H$  in Raum und Zeit.  $\hat{H}$  besitzt genau ein festgestelltes Ergebnis;  $H$  dagegen eine Menge von möglichen Ergebnissen, die bei einer zukünftigen Realisierung auftreten können.

b) Das Schema  $H$  ist definiert als eine Menge von Vorschriften, die prinzipiell realisierbar sein sollen. Da  $\hat{H}$  makrophysikalisch ist, müssen auch die Vorschriften von  $H$  makrophysikalischer Natur sein<sup>2)</sup>. Von diesen Vorschriften seien besonders erwähnt:

$\alpha$ ) Forderung der Endlichkeit des Raum-Zeit-Gebietes  $\Gamma = (V, \Delta t)$  für eine Realisierung.  $H$  kann  $\Gamma$  fest vorschreiben; im allgemeinen wird aber  $\Gamma$  nur durch Ungleichheiten mehr oder weniger eingegrenzt.

$\beta$ ) Das für  $\hat{H}$  vorgeschriebene Zeitintervall  $\Delta t$  besteht aus den aufeinanderfolgenden Intervallen  $\Delta t_1 > 0$ ,  $\Delta t_2 \geq 0$  und  $\Delta t_3 > 0$ . Für  $\Delta t_1$  („Zeit des Versuchsaufbaus“) setzt  $H$  eine Menge von Ausdrücken  $P|H$  („Versuchsbedingungen“), die meßbare Größen in  $(V, \Delta t_1)$  enthalten („Beziehungen zwischen ihnen betreffen“) und die in jedem  $\hat{H}$  wahr („erfüllt“) sein müssen. In  $\Delta t_2$  („Zeit des Versuchsablaufs“) sollen keine Eingriffe in den Versuch geschehen. Für  $\Delta t_3$  („Zeit der Ablesung der Versuchsergebnisse“) setzt  $H$  eine zweite Menge von logisch disjunkten Ausdrücken  $x|H$  („mögliche Ergebnisse“), die meßbare Größen in  $(V, \Delta t_3)$  enthalten und von denen in jedem  $\hat{H}$  höchstens eine wahr („in  $\hat{H}$  eingetreten und registriert“) ist. Ohne Bezugnahme auf ein  $\hat{H}$  sind die  $P|H$  und die  $x|H$  weder wahr noch falsch,

<sup>1)</sup> Math. Ann., Bd. 125, S. 129—139.

<sup>2)</sup> Die Beschränkung auf makrophysikalische  $H$  geschieht in Übereinstimmung mit den Ausführungen hinter These II von § 2 und schließt insoweit den späteren Versuch einer Erweiterung des Anwendungsbereiches der  $W.$  auf mikrophysikalische und damit hypothetische  $H$  nicht aus.

sondern sie müssen nur leicht anzugebende Implikationen erfüllen. Ihre Wahrheit in  $\hat{H}$  muß in den jeweils endlichen Zeitintervallen feststellbar sein, woraus folgt, daß in jedem  $H$  nur endlich viele  $P$  und  $x$  gesetzt sein dürfen:  $x = x_1, \dots, x_n$ . Die Disjunktion der  $x$  ist nie vollständig; d. h. es ist stets denkbar, daß in  $\hat{H}$  etwas eintritt, was durch keines der  $x|H$  ausgedrückt werden kann („Mißlingen des Versuchs“). Wir können die Disjunktion jedoch vollständig machen, indem wir das Mißlingen als  $x_1|H$  mit in die  $x|H$  aufnehmen. Wollen wir es besonders kennzeichnen, so nennen wir es  $\omega|H$ . Weitgehend ist es eine Frage der Vereinbarung, welche  $x|H$  mit zu  $\omega|H$  gerechnet werden. Die möglichen Ergebnisse  $x, H$  heißen im folgenden kurz *Ergebnisse* von  $H$ . Im praktischen Fall werden die Ergebnisse meist durch Zahlen (Vektoren usw.) repräsentiert. In diesem Sinne sprechen wir dann davon, daß die Ergebnisse Zahlen (Vektoren usw.) „sind“.

γ) Forderung der physikalischen Abgeschlossenheit jedes  $\hat{H}$  gegen die Vorgänge außerhalb von  $\Gamma$ . Dabei ist die physikalische Abgeschlossenheit als ein ursprünglicher Ordnungsbegriff anzusehen, der gemäß § 3, These VI erst noch simultan mit eine Frage der Vereinbar, welche  $x|H$  mit zu  $\omega|H$  gerechnet werden muß; d. h. die aufzubauende Axiomatik hat die Aufgabe, durch mathematische Relationen das im Rahmen der W.-Theorie Wesentliche von dem auszudrücken, was wir zunächst vorwissenschaftlich mit diesem Begriffe meinen. Andererseits ist die aus der Axiomatik folgende W.-Rechnung nur gültig für diejenigen  $H$ , die das mit der Forderung der physikalischen Abgeschlossenheit Gemeinte erfüllen. In dieser Verflechtung kommt der implizite Charakter der simultanen Setzung der beiden Ordnungsbegriffe der physikalischen Abgeschlossenheit und der Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck, eine Verflechtung, die durchaus ihr Analogon auch in der klassischen Physik hat: Physikalische Abgeschlossenheit und Darstellbarkeit durch kopplungsfreie Gleichungssysteme.

Von der abstrakten Forderung der physikalischen Abgeschlossenheit ist zu unterscheiden der Ausdruck dieser Forderung durch die Angabe gewisser Vorschriften bezüglich des Versuchsaufbaues („Abschirmvorschriften“), die jeweils gemäß dem Wissenschaftsstande formuliert werden. Diese Vorschriften können die abstrakte Forderung nicht ersetzen, sondern dienen nur der Stützung der bei Anwendung der W.-Rechnung stets zu machenden Hypothese, daß  $H$  dieser Forderung genügt und wir zu Recht die entsprechenden Gleichungen der W.-Rechnung anwenden<sup>3)</sup>.

In dem angegebenen Rahmen sind nicht nur die gewöhnlichen physikalischen Experimente enthalten, bei denen die Feststellung der  $x$ , durch das Ablesen der stets nur in endlicher Anzahl vorhandenen Skalen mit je endlich vielen Marken geschieht. Hierher gehört auch die Feststellung der Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Krankheitsform in einem durch einen Teil der  $P_H$  definierten Kreis von Lebewesen unter vorgegebenen Bedingungen; weiter das einfache Beobachten und Registrieren von Naturerscheinungen und schließlich auch der Ablauf von Naturereignissen in astronomischer raumzeitlicher Entfernung, solange die Feststellbarkeit der je endlich vielen Anfangsbedingungen und der Ergebnisse widerspruchsfrei wenigstens gedacht werden kann. Allerdings stellt die Aufnahme solcher  $H$  bereits eine zusätzliche Hypothese dar, deren Berechtigung durch den Vergleich der Ergebnisse

<sup>3)</sup> Vgl. Teil I, Fußnote 1<sup>6)</sup>.



der W.-Rechnung mit der Erfahrung zu prüfen ist. Man bemerke wohl, daß schon wegen der Endlichkeit von  $\Delta t_1$  die Versuchsbedingungen nur in endlicher Anzahl und nur mit genügenden Toleranzen versehen gegeben sein können, auch wenn die Toleranzen wie meist nicht explizit angegeben werden. Ein Idealversuch ohne Toleranzen darf nach dem gegenwärtigen Stand der Physik auch nicht einmal gedacht werden. Damit verlieren wir die Möglichkeit, die von uns eingeführten  $H$  als Mengen toleranzfreier Idealschemata anzusehen, auf die die W.-Theorie eigentlich anzuwenden wäre oder die vielleicht sogar als stets deterministisch angesehen werden dürften.

Sind  $H_1$  und  $H_2$  zwei Versuchsschemata, so kann es vorkommen, daß jede Realisierung von  $H_1$  automatisch auch eine solche von  $H_2$  bedingt. Andererseits kann es aber auch sein, daß jedes  $\hat{H}_1$  eine jede Realisierung von  $H_2$  ausschließt.

Gibt es jedoch zu zwei Schemata  $H_1$  und  $H_2$  gegeneinander physikalisch abgeschlossene Realisierungen  $\hat{H}_1$  und  $\hat{H}_2$  in zueinander fremden Raum-Zeit-Gebieten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , so nennen wir  $H_1$  und  $H_2$  „gegeneinander abgeschlossen realisierbar“. Gilt diese Bedingung für zwei Realisierungen desselben  $H$ , so heißt  $H$  „wiederholbar“; die genannten Realisierungen heißen „Wiederholungen“ voneinander. Nicht jedes  $H$  braucht Wiederholungen zu gestatten.

Sind von drei Schemata  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$  je zwei gegeneinander abgeschlossen realisierbar, so brauchen sie deswegen nicht alle drei gegeneinander abgeschlossen realisierbar zu sein. Beispiel:  $H_1$  verlange ein Material  $M_1$ ,  $H_2$  ein solches  $M_2$ , und  $H_3$  verlange die Verwendung von  $M_1$  oder  $M_2$ ; bei jedem der  $\hat{H}$  werde das Material zerstört.

### § 6. Ereignisse.

Ein Ereignis  $E$  ist eine Untermenge der Menge  $\Omega$  aller Ergebnisse  $x_k | H$  einschließlich  $\omega$ .  $E$  kann auch die Nullmenge 0 sein. Die Vereinigungsmenge aus  $E_1$  und  $E_2$  bezeichnen wir mit  $E_1 \dot{+} E_2$ , ihren Durchschnitt mit  $E_1 E_2$ .

Ist  $E_1 E_2 = 0$ , so heißen  $E_1$  und  $E_2$  *disjunkt*. Wir schreiben dann  $E_1 + E_2$  anstelle von  $E_1 \dot{+} E_2$ .

Ist  $E_1 + \dots + E_p = \Omega$ , so heißt  $E_1, \dots, E_p$  eine *vollständige Ereignisdisjunktion*.

Ist  $E_1 + E_2 = \Omega$ , so heißen  $E_1$  und  $E_2$  *komplementär*. Wir schreiben dann auch:  $E_2 = \bar{E}_1$  oder  $E_1 = \bar{E}_2$ .

$E$  heißt bei einer Realisierung  $\hat{H}$  von  $H$  „eingetreten“, wenn  $\hat{H}$  ein  $x_k$  liefert mit  $x_k \in E$ .

Vermöge der genannten Regeln bilden die Ereignisse einen Mengenkörper mit  $\Omega$  als Einselement, den „Ereigniskörper“  $\mathfrak{E}$ .  $\mathfrak{E}$  und seine Elemente  $E$  haben nur Sinn, wenn gesagt wird, auf welches  $H$  sie sich beziehen, was bei  $\mathfrak{E}$  durch die gewählte Schreibweise zum Ausdruck kommen möge. Bei den  $E$  schreiben wir  $E|H$ , wenn die Bezugnahme auf  $H$  nicht von vornherein klar ist.

Auch bei abstrakten endlichen Mengenkörpern  $\mathfrak{K}$  wollen wir die Atome  $x_1, \dots, x_n$  *Ergebnisse*, die Mengen  $E$  aus den  $x$ , *Ereignisse* und  $\Sigma x = \Omega$  nennen, sowie die oben definierten Folgebegriffe benutzen. Von den Operationen mit Mengenkörpern werden wir nur die folgenden benötigen:

a) Ein Unterkörper  $\mathfrak{K}_1$  von  $\mathfrak{K}$  definiert eindeutig eine Menge disjunkter Ereignisse  $E_1, \dots, E_m$ , die gerade  $\mathfrak{K}_1$  erzeugen (Atome von  $\mathfrak{K}_1$ ). Wir unterscheiden die Fälle:

$\alpha$ )  $E_1, \dots, E_m$  sind Ergebnisse  $x_1, \dots, x_m$  mit  $m < n$ . Es ist dann  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ .  $\mathfrak{K}_1$  ist direkter Summand von  $\mathfrak{K}$ .

$\beta$ )  $E_1, \dots, E_m$  bilden eine vollständige Disjunktion.  $\mathfrak{K}_1$  heißt *Vergrößerung* von  $\mathfrak{K}$  und wird als  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bezeichnet. Charakteristisch für Vergrößerungen ist  $\Omega \in \tilde{\mathfrak{K}}$ . Die triviale Vergrößerung von  $\mathfrak{K}$  ist  $\mathfrak{K}$  selbst.

$\gamma$ ) Allgemeiner Fall:  $E_1 + \dots + E_m = E_0 \neq 0$ .  $\mathfrak{K}_1$  ist direkter Summand der durch  $E_0, E_1, \dots, E_m$  definierten Vergrößerung; resp. ist  $\mathfrak{K}_1$  Vergrößerung des durch die  $x_i \in (E_1 + \dots + E_m)$  erzeugten direkten Summanden von  $\mathfrak{K}$ .

b) Sind  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$  zwei endliche Mengenkörper mit den resp. Ergebnissen  $x'_i$  und  $x''_k$ , so bilden die Untermengen der Menge aller ungeordneten Paare  $(x'_i, x''_k)$  einen Mengenkörper  $\mathfrak{K}' \times \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}' \times \mathfrak{K}'$ , den Produktkörper. Für  $\sum_{x'_i \in E'} \sum_{x''_k \in E''} (x'_i, x''_k)$  schreiben wir kurz  $(E', E'')$ . Für  $E' = E'_1 + E'_2$  ist  $(E', E'') = (E'_1, E'') + (E'_2, E'')$ . Weiter folgt: Sind resp.  $\{E'_\nu\}$  und  $\{E''_\mu\}$  vollständige Disjunktionen mit zugehörigen Vergrößerungen  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}}''$ , so sind die  $(E'_\nu, E''_\mu)$  eine vollständige Disjunktion in  $\mathfrak{K}' \times \mathfrak{K}''$  mit der zugehörigen Vergrößerung  $\tilde{\mathfrak{K}' \times \mathfrak{K}''} = \tilde{\mathfrak{K}}' \times \tilde{\mathfrak{K}}''$ .

Man bemerke wohl, daß für Ereigniskörper Vergrößerungen, allgemeine Unterkörper und direkte Produkte zunächst nur mathematische Begriffsbildungen sind, die nicht Ereigniskörpern eines Versuchsschemas zu korrespondieren brauchen.

## § 7. Abgeleitete Schemata.

a) *Vergrößerung und Verfeinerung*. Bei jedem gegebenen Schema  $H$  kann man auf die durch  $x_1, \dots, x_n$  vorgeschriebene Ablesegenauigkeit teilweise verzichten; so kann man sich z. B. bei einem Würfelversuch mit der Angabe begnügen, ob die geworfene Augenzahl  $\leq 2$  oder  $> 2$  ist, und  $\omega|H$  in eine dieser beiden Möglichkeiten mit aufnehmen oder als selbständig beibehalten. Damit entsteht aus  $H$  ein neues Schema  $\tilde{H}$ , das wir *Vergrößerung* von  $H$  nennen, während umgekehrt  $H$  eine *Verfeinerung* von  $\tilde{H}$  heiße. Zu jedem  $H$  gibt es Vergrößerungen, nicht aber stets nichttriviale Verfeinerungen. Die Ergebnisse  $\tilde{x}_\mu$  von  $\tilde{H}$  sind die Elemente einer vollständigen Ereignisdisjunktion  $E_1, \dots, E_m$  von  $H$ . Der Ereigniskörper von  $\tilde{H}$  ist die zu dieser Ereignisdisjunktion gehörige Vergrößerung  $\tilde{\mathfrak{K}}$  von  $\mathfrak{K}$ . Umgekehrt kann jedes  $\tilde{\mathfrak{K}}$  als Ereigniskörper einer Vergrößerung  $\tilde{H}$  betrachtet werden. Ist  $\tilde{E} \in \tilde{\mathfrak{K}}$ , so kann es wahlweise als  $\tilde{E}|\tilde{H}$  oder als  $\tilde{E}|H$  geschrieben werden.

b) *Formale Koppelung*. Es seien  $H_1$  und  $H_2$  zwei gegeneinander abgeschlossen realisierbare Versuchsschemata mit den resp. Ergebnissen  $x_i$  und  $y_k$ ; dann können wir durch eine zusätzliche Vorschrift, die mit den Forderungen der Abgeschlossenheit sowohl von  $H_1$  als auch von  $H_2$  verträglich ist, fordern, daß tatsächlich  $H_1$  und  $H_2$  gegeneinander abgeschlossen realisiert werden. Als Ergebnisse des so geschaffenen neuen Versuchsschemas  $F(H_1, H_2)$  betrachten wir die Paare  $(x_i, y_k)$ . Wir nennen  $F$  eine „formale Koppelung“ von  $H_1$  mit  $H_2$ .  $F$  ist im allgemeinen durch  $H_1$  und  $H_2$  nicht eindeutig bestimmt.

Man sieht aber wegen der Abgeschlossenheit die verschiedenen  $F$  als gleich an. Der Ereigniskörper  $\mathfrak{E}$  von  $F$  ist  $\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2$ . Entsprechend ist  $F(H_1, H_2) = F(H_2, H_1)$ . Ein  $(x_i, y_k)$  heißt eingetreten, wenn bei der gemeinsamen Realisierung  $\tilde{H}_1$  das  $x_i$  und  $\tilde{H}_2$  das  $y_k$  liefert.

Sind  $H_1, H_2$  und  $H_3$  alle drei gegeneinander abgeschlossen realisierbar, so ist

$$F(H_1, F(H_2, H_3)) = F(F(H_1, H_2), H_3) = F(H_1, H_2, H_3).$$

Die formale Koppelung eines  $H$  mit sich selbst hat natürlich nur dann Sinn, wenn  $H$  wiederholbar ist im Sinne von § 5.

Sind  $H_1$  und  $H_2$  formal koppelbar, so auch beliebige Vergrößerungen  $\tilde{H}_1$  und  $\tilde{H}_2$ , wobei  $F(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$  die entsprechende Vergrößerung von  $F(H_1, H_2)$  gemäß § 6, b) ist.

c) *Reale Koppelung.* Es seien  $H_1$  und  $H_2$  zwei Versuchsschemata mit den resp. Ergebnissen  $x_i$  und  $y_k$ .  $R$  sei ein Versuchsschema, bei dessen Realisierung sowohl die Vorschriften von  $H_1$  als auch die von  $H_2$  mit Ausnahme der Abgeschlossenheitsforderungen von  $H_1$  und  $H_2$  realisiert werden. Die Ergebnisse von  $R$  seien die Paare  $(x_i, y_k)/R$ , die eingetreten heißen, wenn bei  $R$  sowohl  $x_i$  als auch  $y_k$  geliefert wird. Einige dieser Paare können vermöge  $R$  logisch unmöglich sein<sup>4)</sup>.  $R$  heißt eine „reale Koppelung“ von  $H_1$  mit  $H_2$  und ist im allgemeinen weder logisch noch physikalisch eindeutig bestimmt;  $\mathfrak{R}$  ist isomorph einem Unterkörper von  $\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2$ .

Ist  $R$  eine reale Koppelung von  $H_1$  mit  $H_2$ , so ist eine geeignete Vergrößerung von  $R$  eine reale Koppelung von Vergrößerungen  $\tilde{H}_1$  und  $\tilde{H}_2$ .

d) *Zugeordnete Vergrößerung in der Koppelung.* Ist  $K$  eine (reale oder formale) Koppelung von  $H_1$  mit  $H_2$ , so bilden die Ereignisse  $E_i = \sum_k (x_i, y_k) = (x_i, \Omega(H_2))$  eine vollständige Disjunktion. Die entsprechende Vergrößerung von  $K$  nennen wir  $\tilde{K}_1$ . Ist keines der  $E_i$  leer, so wird vermöge  $E_i \leftrightarrow x_i$  eine isomorphe Abbildung des Ereigniskörpers von  $\tilde{K}_1$  auf den von  $H_1$  geschaffen. In diesem Sinne heißt  $\tilde{K}_1$  dem  $H_1$  zugeordnet.

Sind in  $K$  auch die Abschlußforderungen von  $H_1$  erfüllt, so wird in Verschärfung des genannten Isomorphismus  $\tilde{K}_1$  als nicht verschieden von  $H_1$  angesehen; denn der Übergang von  $H_1$  über  $K$  zu  $\tilde{K}_1$  bedeutet ja nur, daß ohne Änderung von  $H_1$  zunächst mehr abgelesen wird, als bei  $H_1$  erforderlich ist, und man diese Mehrablesung dann wieder unterschlägt. Diese Gleichsetzung von  $H_1$  mit  $\tilde{K}_1$  heißt im einzelnen, daß die Ereignisse  $E_1|H_1$  und  $(E_1, \Omega(H_2))|\tilde{K}_1$  als „gleichwertig“ angesehen werden, was wir durch

$$E_1|H_1 \sim (E_1, \Omega(H_2))|\tilde{K}_1$$

symbolisieren oder auch kürzer durch  $H_1 \sim \tilde{K}_1$ .

Die Gleichwertigkeit von  $\tilde{K}_1$  mit  $H_1$  ist insbesondere bei formalen Koppelungen gegeben; es gilt also: Ist  $\tilde{F}_1$  in  $F(H_1, H_2)$  dem  $H_1$  zugeordnet, so ist  $\tilde{F}_1 \sim H_1$ .

Es darf nicht übersehen werden, daß in diesen Setzungen der Gleichwertigkeit bereits eine teilweise implizite Definition der physikalischen Abgeschlossenheit liegt.

<sup>4)</sup> Zum Beispiel, wenn zwei durch  $H_1$  und  $H_2$  geforderte Apparate in  $R$  identisch werden.

Sind  $H_1$  und  $H_2$  Vergrößerungen desselben  $H$ , die zu den resp. vollständigen Disjunktionen  $E'_\nu$  und  $E''_\mu$  gehören, so bilden auch die  $E'_\nu E''_\mu$  eine vollständige Disjunktion, die eine Vergrößerung  $\tilde{H}$  von  $H$  definiert. Ist  $E'_\nu E''_\mu$  eingetreten, so ist sowohl  $E'_\nu$ , als auch  $E''_\mu$  eingetreten, so daß wir  $E'_\nu E''_\mu$  auch  $(E'_\nu, E''_\mu)$  nennen dürfen. Wir können somit  $\tilde{H}$  auch als eine reale Koppelung von  $H_1$  mit  $H_2$  auffassen, bei der die  $(E'_\nu, E''_\mu)$  mit  $E'_\nu E''_\mu = 0$  logisch unmöglich sind. Obwohl in diesem Falle nicht nur Äquivalenz jedes  $H_\nu$  zu seinem in der Koppelung zugeordneten Schema, sondern sogar definitorische Identität besteht, ist  $\tilde{H}$  nicht die *formale* Koppelung aus den  $H_\nu$ , weil die in jeder Realisierung von  $\tilde{H}$  involvierten Realisierungen der  $H_\nu$  die Forderung der Fremdheit der  $\Gamma_\nu$  verletzen. Die angegebenen  $H_\nu$  können aber außer dieser realen Koppelung  $\tilde{H}$  auch eine formale Koppelung  $F(H_1, H_2)$  besitzen; dies ist genau dann der Fall, wenn  $H$  wiederholbar ist. Das Beispiel zeigt, daß unsere Äquivalenzrelation die physikalische Abgeschlossenheit noch sehr unvollkommen wiedergibt.

### § 8. Unendliche Ereigniskörper.

Die von uns eingeführten Ereigniskörper sind endliche Mengenkörper. In Anbetracht der großen Allgemeinheit der sonst verwendeten W.-Felder könnte dies als zu scharfe Einschränkung erscheinen, werden doch insbesondere die in der praktischen W.-Rechnung meist verwendeten geometrischen W.-Verteilungen ausgeschlossen. Bevor wir im nächsten Paragraphen die eigentliche W.-Axiomatik aufstellen, ist es daher nützlich, das Verhältnis unseres Aufbaues zu den Theorien allgemeiner W.-Felder kurz anzugeben. Da wir den Inhalt dieser Ausführungen jedoch für den axiomatischen Aufbau selbst nicht benötigen, sei es im Interesse der kurzen Ausdrucksweise gestattet, dabei den W.-Begriff und die Grundregeln der W.-Rechnung als bekannt zu unterstellen.

Wir bemerken zunächst, daß Versuchsvorschriften  $H_\infty$  mit unendlich vielen Ergebnismöglichkeiten der Forderung der Realisierbarkeit in endlicher Zeit widersprechen. Da darüber hinaus jede Ablesung eine physikalische Größe betrifft, die in der uns zur Verfügung stehenden Experimentalwelt notwendig beschränkt ist, muß bei unendlich vielen Ergebnismöglichkeiten eine Häufungsstelle des Wertevorrates der physikalischen Größe auftreten, an der wir prinzipiell keine reale Möglichkeit der erforderlichen infinitesimalen Unterscheidbarkeit besitzen. Ein  $H_\infty$  ist also eine hypothetische Vorschrift, die nach dem gegenwärtigen Stand der Physik nicht einmal als Grenzfall realisierbarer  $H$  angesehen werden darf und die somit auch als Gedankenexperiment unzulässig ist. Es ist daher nicht möglich, solche  $H_\infty$  für eine Begründung des W.-Begriffes heranzuziehen.

Die Unbrauchbarkeit der  $H_\infty$  für die Axiomatik schließt jedoch ihre Verwendbarkeit in der praktischen W.-Rechnung nicht aus. Ein solcher Fall ist z. B. gegeben, wenn ein  $H$  sehr dicht liegende  $x_\nu$  besitzt. Der Ansatz der geometrischen W. ist dann eine mathematische Idealisierung im gleichen Sinne wie es die klassische Kontinuumsphysik ist; d. h. für die mathematische Behandlung wird  $H$  als Vergrößerung eines  $H_\infty$  mit kontinuierlichem  $x$ -Vorrat angesehen. Eine derartige mathematische Idealisierung ist vor allem dann durchzuführen, wenn eine Menge von Schemata  $H^{(i)}$  mit Ergebnissen  $x_{\nu_i}^{(i)}$  vorliegt, die alle (vermöge einer eingeführten Hypothese) als Werte der gleichen

aleatorischen Größe zu betrachten sind und die so dicht liegen, daß ihre Unterscheidbarkeit in einem einzigen  $H$  unmöglich ist. Hier versucht der mathematische Ansatz jedes  $H^{(i)}$  als endliche Vergrößerung eines gemeinsamen idealen  $H_\infty$  aufzufassen, dessen Ereignisse die Elemente eines Körpers meßbarer Mengen sind. Sind allgemeiner die  $x_v^{(i)}$  keine Zahlen oder Vektoren, so wird der Ereigniskörper des idealen  $H_\infty$  ein allgemeiner BOOLEscher Ring, in welchem  $\omega(H_\infty)$  durch ein Ideal und die Ergebnisse durch Ultrafilter repräsentiert werden. Damit ergibt sich auch von unserem zunächst sehr eingeschränkten Standpunkte aus nicht nur die Möglichkeit, sondern auch die Notwendigkeit des Studiums derartiger allgemeiner W.-Felder.

### § 9. Axiome der Erwartungskoeffizienten.

Durch die Angabe von  $H$  ist nicht festgelegt, welches der möglichen Ergebnisse eintreten wird. Bei deterministischer Auffassung ist man des Glaubens, daß man bei genügender Verkleinerung der Toleranzen in  $H$  wenigstens erreichen kann, daß stets das gleiche Ergebnis eintritt. Da wir uns aber überzeugen mußten, daß der Grenzübergang zu beliebig kleinen Toleranzen prinzipiell unstatthaft ist, müssen wir auf diese Aussage des Determinismus verzichten. Anstelle der deterministischen Bestimmtheit wollen wir nun von einer „Sicherheit“ des Eintretens von  $E$  bei Realisierung von  $H$  sprechen, wobei diese Sicherheit noch der Präzisierung bedarf und als „Quantität“ der in § 4 genannten Erlebnisqualität des „Erwartungsgefühls“ entsprechen soll. Die W.-Theorie soll also die Sicherheit durch Mathematisierung des Erwartungsgefühls in Zahlen ausdrücken, die gewissen Rechenregeln gehorchen.

Wir ordnen daher zunächst jedem  $E|H$  eine reelle Zahl  $\varrho(E|H)$  zu<sup>5)</sup>, den Erwartungskoeffizienten (EK). Für die Nullmengen jedes Ereigniskörpers soll der EK den gleichen Wert  $a$  und für die allein logisch sicheren Ereignisse  $\Omega(H)$  den gleichen Wert  $b$  erhalten, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $a < b$  festsetzen:

$$(9.\alpha) \quad \varrho(0|H) = a \quad \varrho(\Omega|H) = b.$$

Alle anderen  $\varrho$  sollen zwischen  $a$  und  $b$  liegen:

$$(9.\beta) \quad a \leq \varrho(E|H) \leq b.$$

Um einen Kalkül für die  $\varrho$  zu erhalten, fordern wir nun die Existenz einer Rechenvorschrift, die es innerhalb eines jeden Ereigniskörpers gestattet,  $\varrho(E_1 + E_2|H)$  aus den  $\varrho(E_v|H)$  zu berechnen:

$$(9.\gamma) \quad \varrho(E_1 + E_2|H) = f(\varrho(E_1|H), \varrho(E_2|H)).$$

Wenn  $f$  noch von den in  $H$  vorkommenden  $\varrho$ -Werten abhängen dürfte, so wäre wegen der Endlichkeit der Ereigniskörper die Forderung seiner Existenz leer; auch würde dies nicht dem Ziel entsprechen, mit Hilfe des  $f$  einen Kalkül aufzubauen, um zunächst unbekannte  $\varrho$ -Werte zu berechnen.  $f$  dürfte allenfalls von der Struktur von  $\mathfrak{H}$  abhängen. Diese ist durch die Anzahl der  $x_v$  festgelegt, wobei diese Anzahl aber durch Bildung von Vergrößerungen beliebig vermindert werden kann. Unsere Existenzforderung ist also so zu verstehen, daß  $f$  unabhängig von  $H$  sein soll.

<sup>5)</sup> In der Forderung der Realität für die  $\varrho$ , die wir von der üblichen W.-Theorie übernehmen, liegt natürlich eine gewisse Willkür.

Jede Belegung mit  $\varrho$ -Werten zieht durch die Anordnung der reellen Zahlen eine Anordnung aller  $E|H$  nach sich, von der das Erwartungsgefühl jedoch zunächst nur aussagt, daß  $E_1 + E_2$  sicherer ist als  $E_1$ , wenn  $E_2$  einen von dem der logischen Unmöglichkeit verschiedenen Sicherheitsgrad hat. Wir verlangen daher von der  $\varrho$ -Belegung noch:

$$(9.\delta) \quad \varrho(E_1 + E_2|H) > \varrho(E_1|H), \text{ falls } \varrho(E_2|H) \neq a.$$

Außer dieser Monotonie am Rande wissen wir von  $f$  nur noch, daß sein Definitionsgebiet  $\mathfrak{M}$  im Quadrate  $a \leq \varrho(E_1|H) \leq b$  liegt. Für einen brauchbaren Kalkül werden wir aber noch die gleichmäßige Stetigkeit von  $f$  in  $\mathfrak{M}$  voraussetzen und (9. $\delta$ ) entsprechend verschärfen. Da wir dann von  $\varrho$  ohne Verletzung von (9. $\alpha$ - $\delta$ ) zu einer beliebigen stetigen, monoton steigenden Funktion übergehen können, sei schließlich  $a = 0$  und  $b = 1$  gesetzt, so daß wir erhalten:

*Axiom 1: Jedem  $E|H$  ist eindeutig eine reelle Zahl  $\varrho(E|H)$ , der Erwartungskoeffizient EK, zugeordnet.*

$$\text{Axiom 2: } \varrho(0|H) = 0; \quad \varrho(\Omega|H) = 1. *)$$

$$\text{Axiom 3: } \varrho(E_1 + E_2|H) = f(\varrho(E_1|H), \varrho(E_2|H))$$

mit einem  $f$  der Eigenschaften:

a)  $f$  ist unabhängig von  $H$ .

b)  $f$  ist stetig über der abgeschlossenen Hülle  $\overline{\mathfrak{M}}$  der Menge  $\mathfrak{M}$  aller  $(\varrho_1, \varrho_2)$ , die gemeinsam in einem  $H$  als EK disjunkter Ereignisse vorkommen.

c) Liegt  $(\xi, \eta)$  in  $\overline{\mathfrak{M}}$  mit  $\eta \neq 0$ , so ist  $f(\xi, \eta) > \xi$ .

Wegen  $E = E + 0$  und  $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$  genügt  $f$  den Relationen:

$$(9.1) \quad f(\xi, 0) = \xi$$

$$(9.2) \quad f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi).$$

Weiter ergibt sich aus  $(E_1 + E_2) + E_3 = E_1 + (E_2 + E_3)$  die eingeschränkte Transitivitätseigenschaft:

$$(9.3) \quad f(f(\varrho_1, \varrho_2), \varrho_3) = f(\varrho_1, f(\varrho_2, \varrho_3)),$$

falls die  $\varrho_i$  EK disjunkter Ereignisse aus einem  $\mathfrak{H}$  sind.

Ist  $\varrho = \varrho(E|H) \neq 0$ , so ist  $\varrho = f(\varrho, 0) = f(0, \varrho) > 0$ ; andererseits würde aus  $\varrho > 1$  folgen:

$$1 = \varrho(\Omega|H) = \varrho(E + \bar{E}|H) = f(\varrho, \varrho(\bar{E}|H)) \geq \varrho > 1.$$

Damit ergibt sich

$$(9.4) \quad 0 \leq \varrho(E|H) \leq 1,$$

so daß wir (9. $\beta$ ) nicht in die Axiome aufzunehmen brauchten.

Aus Axiom 1 folgt insbesondere

$$(9.5) \quad \varrho(\tilde{E}|\tilde{H}) = \varrho(\tilde{E}|H)$$

für die Ereignisse  $\tilde{E}$  einer Vergrößerung  $\tilde{H}$  von  $H$ .

Es liegt nahe, von vornherein als einfachste Möglichkeit  $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$  zu setzen und damit den Additionssatz der W.-Theorie axiomatisch einzuführen, so wie dies in der maßtheoretischen Begründung gemacht wird. Wenn man damit auch insbesondere die Schwierigkeiten umgeht, die aus der Unkenntnis des Definitionsgebietes von  $f$  entstehen, so ist eine solche Setzung doch gemäß Teil I ein logischer Sprung, der tunlichst vermieden werden sollte. Im Gegenteil soll die W.-Axiomatik gerade auch den Additionssatz begründen.

\*) Umgekehrt folgt aus  $\varrho(E|H) = 0$  oder 1 nicht die Unmöglichkeit oder Gewißheit.

In § 7 haben wir eine Äquivalenz zwischen Ereignissen verschiedener Schemata eingeführt. Wir wollen nun fordern, daß eine solche Äquivalenz die Gleichheit der EK nach sich zieht. Dies liefert

*Axiom 4:* Ist  $E_1|H_1 \sim E_2|H_2$ , so ist  $\varrho(E_1|H_1) = \varrho(E_2|H_2)$ .

Hieraus folgt insbesondere, wenn  $F(H_1, H_2) = F$  die formale Koppelung von  $H_1$  und  $H_2$  ist,

$$(9.6) \quad \varrho(E_1, \Omega(H_2)|F(H_1, H_2)) = \varrho(E_1|H_1).$$

Setzen wir  $\Omega(H_2) = E_2 + \bar{E}_2$ , so ergibt sich die Gleichung

$$(9.7) \quad \varrho(E_1|H_1) = f(\varrho(E_1, E_2|F), \varrho(E_1, \bar{E}_2|F)).$$

(9.7) liefert eine Aussage über die EK in der formalen Koppelung, legt aber die Werte derselben noch nicht völlig fest. Eine völlige Festlegung würde aber dem entsprechen, was wir mit physikalischer Abgeschlossenheit meinen; denn einerseits sollten alle  $F(H_1, H_2)$  als gleich angesehen werden, andererseits darf die Sicherheit sich nicht ändern, wenn wir  $H_1$  durch ein  $H_2$  mit isomorphem Ereigniskörper und zahlenmäßig gleichem EK ersetzen und den zu  $F(H_1, H_2)$  gehörigen Ereigniskörper  $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$  entsprechend auf  $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_2$  abbilden. Wir werden daher verlangen, daß die EK von  $F(H_1, H_2)$  eindeutig aus denen von  $H_1$  und  $H_2$  zu berechnen sind mit Hilfe einer Funktion, die wir wieder als gleichmäßig stetig annehmen. Die gesuchte Rechenvorschrift soll weiter — wieder in Übereinstimmung mit dem Erwartungsgefühl — so beschaffen sein, daß  $\varrho(E_1, E_2|F(H_1, H_2))$  nur dann gleich Null werden kann, wenn wenigstens eines der  $\varrho(E_r|H_r)$  verschwindet. Dies führt zu

*Axiom 5:* Es ist

$$\varrho(E_1, E_2|F(H_1, H_2)) = \varphi(\varrho(E_1|H_1), \varrho(E_2|H_2))$$

mit einem  $\varphi$  der Eigenschaften:

a)  $\varphi$  ist stetig über der abgeschlossenen Hülle  $\bar{\mathfrak{L}}$  der Menge  $\mathfrak{L}$  aller  $(\varrho_1, \varrho_2)$ , bei denen  $\varrho_r = \varrho(E_r|H_r)$  ist mit existierendem  $F(H_1, H_2)$ ;

b) aus  $\varphi(\xi, \eta) = 0$  folgt  $\xi = 0$ .

Unmittelbar folgt

$$(9.8) \quad \varphi(\xi, 0) = 0.$$

Wegen  $F(H_1, H_2) = F(H_2, H_1)$  ist weiter  $(\eta, \xi) \in \bar{\mathfrak{L}}$  bei  $(\xi, \eta) \in \bar{\mathfrak{L}}$  und

$$(9.9) \quad \varphi(\xi, \eta) = \varphi(\eta, \xi).$$

Schließlich schreibt sich (9.7) nunmehr in der Gestalt

$$(9.10) \quad \varrho_1 = f(\varphi(\varrho_1, \varrho_2), \varphi(\varrho_1, \bar{\varrho}_2)) \text{ bei } \varrho_r = \varrho(E_r|H_r), \bar{\varrho}_r = \varrho(\bar{E}_r|H_r) \text{ und } (\varrho_1, \varrho_2) \in \mathfrak{L}.$$

Mit  $(\varrho_1, \varrho_2) \in \mathfrak{L}$  ist nämlich automatisch auch  $(\varrho_1, \bar{\varrho}_2) \in \mathfrak{L}$ .

Die bisher eingeführten Axiome 1—5 sind bereits erfüllt durch die „deterministische Belegung“:  $\varrho(x_k|H) = 1$  für ein bestimmtes  $k$ ,  $\varrho(x_r|H) = 0$  für  $r \neq k$  mit  $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$  und  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ . Wir wollen nun ausschließen, daß es nur diese deterministische Belegung gibt oder daß sich die Welt nach genügend langer Zeit beliebig genau durch ein deterministisches Modell approximieren läßt. Hieraus folgt die Forderung, daß es bei Wahl eines geeigneten  $\lambda > 0$  jederzeit noch unendlich viele  $E_r|H_r$  gibt mit  $\lambda \leq \varrho(E_r|H_r) \leq 1 - \lambda$ . Diese Forderung wäre z. B. dann erfüllt, wenn es einen indeterministischen Standardversuch (etwa einen Urnenversuch) gibt, der jederzeit abgeschlossen gegen einen beliebig vorgegebenen Versuch  $H_0$  realisierbar ist. Es genügt sogar die noch schwächere Fassung des



*Axiom 6: Zu jedem  $H_0$  gibt es ein mit  $H_0$  formal koppelbares  $H$  mit Ereignis  $E|H$  so, daß*

$$\lambda \leq p(E|H) \leq 1 - \lambda$$

*ist mit einem  $\lambda > 0$  unabhängig von  $H_0$ .*

Betrachten wir  $\lambda$  als den Grad der Undeterminiertheit, so können wir Axiom 6 auch physikalisch folgendermaßen aussprechen: Für jedes  $H_0$  besitzt der von  $H_0$  nicht beeinflusste Weltteil einen festen positiven Mindestgrad der Undeterminiertheit.

Die Widerspruchsfreiheit des angegebenen Axiomensystems ist an Hand eines Modells leicht einzusehen: Wir denken uns eine Welt, in der es nur eine unendliche Folge von beliebig koppelbaren Grundversuchsschemata, die formalen Koppelungen aus endlich vielen derselben und Vergrößerungen der genannten Schemata gibt. Jedes Grundschema habe nur zwei Ergebnisse, die wir je mit dem EK  $p = 1/2$  belegen. Es sei  $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$  und  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ . Die EK werden in den formalen Koppelungen mit Hilfe von Axiom 5 festgelegt. Dann sind offenbar alle Axiome erfüllt. Die Unabhängigkeit der Axiome ist ebenso offensichtlich; offen bleibt dabei nur die Möglichkeit, die Axiome noch schwächer zu formulieren. Das Axiomensystem kann dagegen nicht eindeutig sein in dem Sinne, daß die numerischen Werte der EK a priori berechenbar werden. Es gibt also evtl. unendlich viele Systeme von EK, die den Axiomen genügen. So hätten wir in der soeben betrachteten gedachten Welt ebenfalls ein widerspruchsfreies EK-System erhalten, wenn wir die Ergebnisse der Grundschemata mit  $1/3$  und  $2/3$  belegt hätten. Die Behandlung der damit sich bietenden Frage der eindeutigen Festlegbarkeit (Objektivität) der EK-Werte sei auf später verschoben.

### § 10. Wahrscheinlichkeiten.

In dem angegebenen Axiomensystem sind die Menge der vorkommenden  $p$ -Werte und die spezielle Gestalt der Funktionen  $f$  und  $\varphi$  noch offengelassen. Die Axiome liefern somit zunächst anstelle der üblichen W.-Rechnung einen allgemeineren EK-Kalkül, in dem  $f$  den Additionssatz und  $\varphi$  den Multiplikationssatz ersetzen und der unmittelbarer unserem Erwartungsgefühl entspricht als die gewöhnliche W.-Rechnung, die nur als derjenige Spezialfall erscheint, bei dem die  $p$ -Werte dicht liegen und  $f = \xi + \eta$  sowie  $\varphi = \xi \cdot \eta$  gesetzt ist. Wir werden gleich sehen, daß die erstgenannte Eigenschaft eine unmittelbare Folge der beiden letzteren ist und führen daher den Begriff der W. ein durch

*Definition 1: Genügt ein System von EK  $p(E|H)$  den Axiomen 1–6 mit  $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$  und  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ , so heißt  $p(E|H)$  die Wahrscheinlichkeit von  $E|H$ .*

Es gilt zunächst der einfache

*Satz 1: Wahrscheinlichkeiten liegen dicht in  $0 \leq p \leq 1$ .*

*Beweis:* Für jedes  $N$  folgt aus Axiom 6 durch vollständige Induktion die Existenz einer Folge von Ereignissen  $E_1|H_1, \dots, E_N|H_N$  mit  $\lambda \leq p(E_r|H_r) \leq 1 - \lambda$  und existentem  $F(H_1, \dots, H_N)$ . Ist nun  $\tilde{H}_r$  die zu  $E_r + \bar{E}_r = \Omega(H_r)$  gehörige Vergrößerung von  $H_r$ , so existiert auch  $\tilde{F} = F(\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_N)$ . Die W.en der Ergebnisse von  $F$  sind höchstens gleich  $(1 - \lambda)^N$ , also beliebig klein für genügend großes  $N$ . Axiom 3 liefert die Behauptung.

Die Frage nach der Begründung des Additions- und des Multiplikationssatzes ist nunmehr die Frage nach der Berechtigung geworden, gerade die in



Definition 1 genannte Auswahl für die Funktionen  $f$  und  $\varphi$  zu treffen. Hierzu bemerken wir zunächst, daß die Anwendung einer stetigen, monoton steigenden Funktion  $h(x)$  mit  $h(0) = 0$  und  $h(1) = 1$  auf die  $\varrho$ -Werte eines EK-Systems, also  $\varrho_1 = h(\varrho)$ , wieder ein EK-System liefert, für dessen  $\varrho_1$ -Werte andere Funktionen  $f_1$  und  $\varphi_1$  gelten. Die Gesamtheit aller  $\varrho$ -Systeme können wir damit in Klassen von ineinander transformierbaren Systemen zerlegen. Zwei Systeme derselben Klasse sind dann als nicht wesentlich verschieden anzusehen: sie unterscheiden sich — physikalisch gesprochen — nur durch eine Maßstabsänderung. Ist insbesondere ein EK-System in ein  $p$ -System transformierbar, so sind wir deshalb berechtigt, allein das letztere zu betrachten; wir werden dies wegen der besonders einfachen Struktur der  $p$ -Systeme sogar vorziehen. Die Begründung für den Additions- und Multiplikationssatz, also für das alleinige Interesse an W.en gemäß Definition 1, liegt nun darin, daß jedes EK-System sich in ein W.-System transformieren läßt. Dies ist der Inhalt von

*Satz 2: Genügt ein System von EK  $\varrho(E|H)$  den Axiomen 1–6, so gibt es eine stetige, monoton steigende Funktion  $h(x)$  so, daß  $p = h(\varrho)$  ein System von Wahrscheinlichkeiten ist.*

In der obigen Sprechweise können wir auch sagen, daß jede Klasse von EK-Systemen wenigstens ein  $p$ -System enthält; vermöge Satz 1 enthält sie dann auch nur ein  $p$ -System. Wegen der Unbekanntheit der Definitionsgebiete von  $f$  und  $\varphi$  ist der Beweis von Satz 2 etwas umständlich; er wird in Teil III erbracht werden. In Anbetracht des grundlegenden Charakters von Satz 2 werden wir dabei vorher den für den Beweis wesentlichen Inhalt der §§ 5–7 in axiomatische Gestalt bringen, um der Gefahr zu begegnen, daß weitere nicht genannte anschauliche Elemente in den Beweis einfließen. In diesem Paragraphen sei jedoch noch der Tatsache Rechnung getragen, daß die Einführung des Additionssatzes, also die Setzung  $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$ , weitgehend als unmittelbar einleuchtend empfunden und die Schwierigkeit nur in der Begründung des Multiplikationssatzes gesehen wird. Wir geben daher jetzt noch den wesentlich einfacheren Beweis von Satz 2 bei Ersetzung von Axiom 3 durch

*Axiom 3\*:*  $\varrho(E_1 + E_2|H) = \varrho(E_1|H) + \varrho(E_2|H)$ .

Bei Axiom 3\* schreibt sich (9.10) einfach in der Gestalt:

$$\varrho_1 = \varphi(\varrho_1, \varrho_2) + \varphi(\varrho_1, 1 - \varrho_2) \text{ für } (\varrho_1, \varrho_2) \in \bar{\mathcal{Q}},$$

woraus wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  folgt

$$(10.1) \quad \xi = \varphi(\xi, \eta) + \varphi(\xi, 1 - \eta) \text{ für } (\xi, \eta) \in \bar{\mathcal{Q}}.$$

Hieraus ergibt sich zunächst wegen  $\varphi(\xi, 1 - \eta) \geq 0$ .

$$(10.2) \quad \varphi(\xi, \eta) \leq \xi.$$

Ist  $\xi > 0$  und  $\eta < 1$ , so ist nach Axiom 5b  $\varphi(\xi, 1 - \eta) > 0$ , also

$$(10.3) \quad \varphi(\xi, \eta) < \xi \text{ für } \xi > 0 \text{ nebst } \eta < 1.$$

Wir zeigen nun zunächst

*Lemma 1: Zu beliebig vorgegebenen  $\delta > 0$  und  $\vartheta < 1$  gibt es ein  $N(\delta, \vartheta)$  mit der Eigenschaft: Gilt  $\varrho_r = \varrho(E_r|H_r) \leq \vartheta$  für  $n$  Ereignisse  $E_r$ , mit existentem  $F = F(H_1, \dots, H_n)$  und ist  $n \geq N(\delta, \vartheta)$ , so ist  $\varrho = \varrho(E_1, \dots, E_n|F) < \delta$ .*

*Beweis:* Wegen Axiom 6 ist  $\mathfrak{L}$  nicht leer. Es sei  $\mathfrak{L}_1$  der Durchschnitt von  $\overline{\mathfrak{L}}$  mit  $\xi \geq \delta, \eta \leq \theta$ .

Ist  $\mathfrak{L}_1$  leer, so ist wegen  $(\varrho_1, \varrho_2) \in \overline{\mathfrak{L}}$  und  $\varrho_2 \leq \theta$  sicher  $\varrho_1 < \delta$ . Nach (10.2) ist  $\varrho \leq \varrho_1 < \delta$  für alle  $n$ .

Ist dagegen  $\mathfrak{L}_1$  nicht leer, so nimmt die in  $\mathfrak{L}_1$  stetige Funktion  $\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\xi}$  ihr Maximum  $h(\delta, \theta)$  in  $\mathfrak{L}_1$  an. Nach (10.3) ist  $h < 1$ . Wir wählen  $N$  so, daß  $h^{N-1} < \delta$  wird. Wir setzen nun:  $\sigma_1 = \varrho_1, \sigma_2 = \varphi(\sigma_1, \varrho_2), \dots, \sigma_n = \varphi(\sigma_{n-1}, \varrho_n) = \varrho$ . Ist  $\sigma_\mu < \delta$  für ein  $\mu \leq n-1$ , so ist wegen (10.2) auch  $\varrho < \delta$ . Ist dagegen  $\sigma_\mu \geq \delta$  für  $\mu \leq n-1$ , so ist  $(\sigma_\mu, \varrho_{\mu+1}) \in \mathfrak{L}_1$  und daher  $\sigma_{\mu+1} \leq h \cdot \sigma_\mu$ . Es folgt  $\varrho = \sigma_n \leq \varrho_1 \cdot h^{N-1} < \delta$  für  $n \geq N$ .

*Lemma 2:* Bei vorgegebenem  $H_0$  und  $\delta > 0$  gibt es ein mit  $H_0$  formal koppelbares  $H$ , für dessen Ergebnisse  $y_r$  gilt:  $\varrho(y_r | H) < \delta$ .

*Beweis:* Wir benutzen das im Beweis zu Satz 1 allein auf Grund von Axiom 6 konstruierte  $\tilde{F}$  mit  $N = N(\delta, 1 - \lambda)$  gemäß Lemma 1, wobei  $\lambda$  die Schranke von Axiom 6 ist. Dann sind nach Lemma 1 die EK aller Ergebnisse von  $\tilde{F}$  kleiner als  $\delta$ ; also  $H = \tilde{F}$ .

Es seien jetzt drei nichtnegative Zahlen  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  mit  $\xi \leq 1, \eta + \zeta \leq 1$  vorgegeben. Für jedes  $\delta > 0$  gibt es nach Lemma 2 ein  $H_1$  mit  $\varrho(y_r | H_1) < \delta$ . Wegen Axiom 3\* finden wir in  $H_1$  ein  $\varrho_1 = \varrho(E_1 | H_1)$  mit  $\xi - \delta < \varrho_1 \leq \xi$ . Die nochmalige Anwendung von Lemma 2 liefert ein mit  $H_1$  formal koppelbares  $H_2$  mit  $\varrho(z_\mu | H_2) < \delta$  für dessen Ergebnisse  $z_\mu$ .  $H_2$  enthält ein  $\varrho'_2 = \varrho(E'_2 | H_2)$  mit  $\eta - \delta < \varrho'_2 \leq \eta$ . Es ist dann  $\varrho(\overline{E'_2} | H_2) \geq 1 - \eta \geq \zeta$ . Für eine geeignete Untermenge  $E''_2$  der  $z_\mu \in \overline{E'_2}$  mit EK  $\varrho''_2$  ist daher  $\zeta - \delta \leq \varrho''_2 < \zeta$ .

Nun ist in  $F(H_1, H_2)$ :

$$(E_1, E'_2 + E''_2) = (E_1, E'_2) + (E_1, E''_2),$$

so daß die Axiome 3\* und 5 liefern:

$$\varphi(\varrho_1, \varrho'_2 + \varrho''_2) = \varphi(\varrho_1, \varrho'_2) + \varphi(\varrho_1, \varrho''_2).$$

Hieraus folgt bei  $\delta \rightarrow 0$  die Relation

$$\varphi(\xi, \eta + \zeta) = \varphi(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \zeta)$$

und die Aussage, daß  $\overline{\mathfrak{L}}$  das ganze Einheitsquadrat ist. Wegen der Stetigkeit und Symmetrie ist also  $\varphi(\xi, \eta) = C \cdot \xi \cdot \eta$  mit  $C = 1$  wegen (10.1).

Fordert man Axiom 3\*, so ist also das System der EK automatisch ein System von W.en, womit Satz 2 bewiesen ist.

Für den geführten Beweis war Axiom 5b sehr wesentlich. Wir wollen uns noch davon überzeugen, daß es nicht entbehrt werden kann. Hierzu denken wir uns eine Welt, in der bis auf Vergrößerungen alle  $H$  die formalen Koppelungen eines einzigen beliebig wiederholbaren  $H_0$  sind mit Ergebnissen  $E$  und  $\overline{E}$ . Es sei:

$$\varrho(E) = \frac{1}{3}; \varrho(\overline{E}) = \frac{2}{3}; f(\xi, \eta) = \xi + \eta;$$

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}; \varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 0; \varphi\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Dann sind alle Axiome erfüllt. Das System der  $\varrho$  läßt sich nicht auf W.en transformieren, da dies in Widerspruch zu Satz 1 stände.

(Eingegangen am 27. März 1952.)

## Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen\*).

Von

HANS MAASS in Heidelberg.

### Einleitung.

Die Beziehungen der indefiniten quadratischen Formen zu den automorphen Funktionen sind durch die eindrucksvollen Arbeiten<sup>1) 2)</sup> SIEGEL weitgehend geklärt worden. Spezielle arithmetische Eigenschaften, die die indefiniten quadratischen Formen vor den definiten auszeichnen, fanden ihren Ausdruck in dem funktionentheoretischen Verhalten der von SIEGEL eingeführten automorphen Formen. Es handelt sich hierbei um gewisse nicht-analytische Funktionen einer komplexen Variablen  $z = x + iy$  vom Typus der EISENSTEIN-Reihe

$$(1) \quad E(z, w; \alpha, \beta) = \sum_{c,d} \gamma(c, d) (cz + d)^{-\alpha} (cw + d)^{-\beta},$$

wobei  $w = x - iy$  zu setzen ist. Die Exponenten  $\alpha, \beta$  hängen nur von der Signatur der zugeordneten indefiniten quadratischen Formen ab. Man hat

$$(2) \quad \alpha = \frac{n}{2}, \quad \beta = \frac{m-n}{2}$$

zu wählen, wenn die reelle Normalform

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \dots - y_m^2$$

zugrunde gelegt wird. Es ergeben sich im folgenden gewisse formale Vereinfachungen, wenn wir  $z$  und  $w$  als unabhängige komplexe Variable beibehalten. Das eigentliche Operationsgebiet bleibt jedoch die reelle  $(x, y)$ -Halbebene  $w = \bar{z}$ .  $\Im m z > 0$ . Punkte, die nur durch eine komplexe Variable  $\zeta$  gekennzeichnet werden, sollen dem Bereich  $w = \bar{z}$  angehören; d. h. es ist  $z = \zeta$ ,  $w = \bar{\zeta}$  zu setzen. Der Fall  $\zeta = \infty$  ist hier mit einzuschließen.

Multipliziert man die Reihe (1) mit  $y^\beta$ , so ergibt sich mit  $k = \alpha - \beta$  der Formtypus

$$(3) \quad E_k(z, \beta) = y^\beta E(z, \bar{z}; \alpha, \beta) = \sum_{c,d} \gamma(c, d) \frac{y^\beta}{(cz + d)^k |cz + d|^{2\beta}}.$$

Automorphe Formen dieser Art habe ich gelegentlich „Wellenformen der Dimension  $-k$  zur Wellenzahl  $\beta$ “ genannt. Einen Zusammenhang zwischen den Wellenformen und den indefiniten quadratischen Formen konnte ich bereits vor einigen Jahren über die Funktionalgleichungen der Zetafunktionen

\*) HANS PETERSSON zum 50. Geburtstage am 24. 9. 52 gewidmet.

<sup>1)</sup> SIEGEL, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen. Studies Essays, pres. to COURANT, New York 1948, p. 395—406.

<sup>2)</sup> SIEGEL, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I. Math. Ann. 124, 17—54 (1951).

zu den indefiniten quadratischen Formen ermitteln<sup>2)</sup>. In den Fällen  $0 < n < m$ ,  $n = 1$  (2),  $m = 0$  (2) wurde hier im Gegensatz zu (2) die Zuordnung

$$(4) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{m}{4}, & \beta &= \frac{m}{4} & \text{für } m \equiv 2 \pmod{4}, \\ \alpha &= \frac{m}{4} + \frac{1}{2}, & \beta &= \frac{m}{4} - \frac{1}{2} & \text{für } m \equiv 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

vorgenommen. Die Betrachtungen konnten also auf Wellenformen der Dimension 0 und  $-1$  beschränkt werden. Allgemein genügen Wellenformen der Dimension  $-k$ , wenn  $k$  eine nicht-negative ganz rationale Zahl ist, einem System von  $k+1$  partiellen Differentialgleichungen der Ordnung  $2k+2$ . Diese Differentialgleichungssysteme sind zwar von einfacher Bauart, lassen sich aber nur in den Fällen  $k=0$  und  $1$  befriedigend behandeln, so daß auch nur für  $k=0$  und  $1$  eine Beziehung zwischen Wellenformen und DIRICHLET-Reihen mit Hilfe der MELLIN-Transformation hergestellt und nach HECKESchem Vorbild untersucht werden konnte.

Für die indefiniten quadratischen Formen, die durch  $m \equiv n$  (2) gekennzeichnet sind, gibt es neben (2) noch die Zuordnung

$$(5) \quad \alpha = \frac{m}{2}, \quad \beta = 0.$$

Gemäß (1) handelt es sich bei diesem Formentypus um gewöhnliche Modulformen der Dimension  $-m/2$ . Dieser Tatbestand ist leicht einzusehen, wenn man die Struktur der Funktionalgleichungen der entsprechenden Zetafunktionen beachtet. Eine erste Klärung dieser etwas merkwürdigen Verhältnisse erfolgte durch SIEGEL<sup>1)</sup>; mit Hilfe gewisser Differentialoperatoren konnte er im Falle  $m = n$  (2) den Formentypus (2) unmittelbar in den Typus (5) überführen. Damit war der Weg angezeigt, auf dem ich schließlich zu einer systematischen und durchsichtigen Differentialgleichungstheorie gekommen bin. Hierüber soll im folgenden berichtet werden. In der neuen Theorie tritt der Formentypus (1) mit gleichberechtigten Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$ , die beliebige reelle oder komplexe Zahlen sein dürfen, in den Vordergrund; die Auszeichnung der Wellenformen ganzzahliger Dimension erwies sich nicht als zweckmäßig.

Die ersten Bemühungen waren darauf zu richten für die EISENSTEIN-Reihen (1) partielle Differentialgleichungen zu bestimmen. Zugleich mußte eine funktionale Beziehung zwischen den Formentypen (1) zu verschiedenen Exponentensystemen  $\alpha, \beta$  hergestellt werden. Diese Probleme werden mit Hilfe der Differentialoperatoren

$$(6) \quad \begin{aligned} K_\alpha &= (z-w)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (z-w)^\alpha = \alpha + (z-w) \frac{\partial}{\partial z}, \\ \Lambda_\beta &= (z-w)^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial w} (z-w)^\beta = -\beta + (z-w) \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned}$$

höchst einfach gelöst. Es gilt nämlich

$$(7) \quad \begin{aligned} K_\alpha E(z, w; \alpha, \beta) &= \alpha E(z, w; \alpha+1, \beta-1), \\ \Lambda_\beta E(z, w; \alpha, \beta) &= -\beta E(z, w; \alpha-1, \beta+1) \end{aligned}$$

und demzufolge

$$(8) \quad (\Lambda_{\beta-1} K_\alpha + \alpha(\beta-1)) E(z, w; \alpha, \beta) = (K_{\alpha-1} \Lambda_\beta + \beta(\alpha-1)) E(z, w; \alpha, \beta) = 0.$$

<sup>2)</sup> MAASS, H.: Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen. Sitzgaber. Heidelberg. Akad. Wiss. 1949, Math.-naturwiss. Kl., 1. Abh., 42 S.

Eine einfache Umrechnung ergibt

$$(9) \quad \begin{aligned} \Lambda_{\beta-1} K_{\alpha} + \alpha(\beta-1) &= K_{\alpha-1} \Lambda_{\beta} + \beta(\alpha-1) \\ &= -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (\alpha-\beta) i y \frac{\partial}{\partial x} - (\alpha+\beta) y \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (8) sind also identisch. Der Fortschritt gegenüber den früheren Entwicklungen<sup>3)</sup> ist bemerkenswert: Wir können uns auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränken.

Es bezeichne  $\{\alpha, \beta\}$  die lineare Schar der analytischen Funktionen  $f(z, w)$ , die in der Halbebene  $w = \bar{z}$   $\Im z > 0$  regulär sind und die von dem Differentialoperator (9) annulliert werden. Zur Abkürzung werde

(10)  $f(z, w) \mid S = f(Sz, Sw) (cz+d)^{-\alpha} (cw+d)^{-\beta}$  für  $f(z, w) \in \{\alpha, \beta\}$  und reelle Substitutionen  $S$  mit der zweiten Zeile  $c, d$  und positiver Determinante gesetzt. Mit

$$(cz+d)^{-\alpha} = e^{-\alpha \log(cz+d)}, \quad (cw+d)^{-\beta} = e^{-\beta \log(cw+d)}$$

werden hier diejenigen in der Halbebene  $\Im z > 0$  bzw.  $\Im w < 0$  regulär-analytischen Funktionen bezeichnet, die man erhält, wenn man für  $\log(cz+d)$  bzw.  $\log(cw+d)$  die durch

$$-\pi < \arg(cz+d) \leq \pi \quad \text{bzw.} \quad -\pi \leq \arg(cw+d) < \pi$$

gekennzeichneten Hauptwerte nimmt.

Es sei  $G$  eine Gruppe von reellen Substitutionen  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit der Determinante 1. Unter einer automorphen Form vom Typus  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  soll nun eine Funktion  $f(z, w)$  mit folgenden Eigenschaften verstanden werden:

1.  $f(z, w)$  liegt in der linearen Schar  $\{\alpha, \beta\}$ .

2. Für alle  $S \in G$  gilt

$$f(z, w) \mid S = v(S) f(z, w), \quad |v(S)| = 1,$$

wobei  $v$  ein Multiplikatorsystem zur Gruppe  $G$  bezeichnet. Es gehört zur Dimension  $\beta - \alpha$  im Sinne der PETERSSONschen Terminologie<sup>4)</sup>.

3. Ist  $A^{-1} \infty$  Fixpunkt einer beliebigen parabolischen Substitution aus  $G$ , so gilt in der oberen Halbebene ( $x$  reell,  $y > 0$ )

$$f(z, w) \mid A^{-1} = O(y^K) \quad \text{für } y \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in  $x$  mit einer gewissen Konstanten  $K$ .

Eine Rechtfertigung dieses Formenbegriffs liegt in der Transformationsinvarianz: Für beliebige reelle Substitutionen  $L$  mit der Determinante 1 ist

$$(11) \quad \{G; \alpha, \beta, v\} \mid L = \{L^{-1} G L; \alpha, \beta, v^L\},$$

wenn  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  zugleich die lineare Schar der Formen des angegebenen Typus und  $v^L$  das mit  $L$  transformierte Multiplikatorsystem bezeichnet. Außerdem gilt, wie nicht anders zu erwarten war,

$$(12) \quad \begin{aligned} K_{\alpha} \{G; \alpha, \beta, v\} &\subset \{G; \alpha+1, \beta-1, v\}, \\ \Lambda_{\beta} \{G; \alpha, \beta, v\} &\subset \{G; \alpha-1, \beta+1, v\}. \end{aligned}$$

Ist  $\alpha(\beta-1) \neq 0$  bzw.  $\beta(\alpha-1) \neq 0$ , so wird  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  durch  $K_{\alpha}$  bzw.  $\Lambda_{\beta}$  sogar umkehrbar eindeutig auf  $\{G; \alpha+1, \beta-1, v\}$  bzw.  $\{G; \alpha-1, \beta+1, v\}$

<sup>4)</sup> PETERSSON, H.: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I. Math. Ann. 115, 23–67 (1937).

abgebildet. Invariant gegenüber  $K_\alpha$  und  $\Lambda_\beta$  sind nicht die „Einzelgewichte“  $\alpha$  und  $\beta$ , wohl aber die „Gewichtssumme“  $\alpha + \beta$  und die Restklassen von  $\alpha$  und  $\beta$  mod 1. Im Rahmen dieser Transformationstheorie können die verschiedenartigen Beziehungen zwischen indefiniten quadratischen Formen und automorphen Formen gut verstanden werden.

Das Interesse des Arithmetikers ist vor allem auf die FOURIER-Entwicklungen der automorphen Formen in den parabolischen Fixpunkten gewisser Substitutionsgruppen  $G$  gerichtet. Ist

$$\begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, \quad v \begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2\pi i \kappa}, \quad 0 \leq \kappa < 1,$$

so gestatten die Formen  $f(z, w) \in \{G; \alpha, \beta, v\}$  Entwicklungen der Art

$$(13) \quad f(z, w) = a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \sum_{n+\kappa \neq 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\kappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x},$$

wobei über alle ganz rationalen  $n \neq -\kappa$  summiert wird. Hierin ist

$$(14) \quad u(y, \gamma) = \frac{y^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log y)^n}{n!} (1-\gamma)^{n-1},$$

$$W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W\left(\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2} (2y)\right) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Mit  $W_{l,m}(y)$  wird wie üblich die von WHITTAKER eingeführte Lösung der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung in reduzierter Form bezeichnet [s. Fußnote 5)]. Die Entwicklungskoeffizienten  $a_0$  und  $b_0$  verschwinden im Falle  $\kappa > 0$ .

Die HECKESchen Untersuchungen über Modulformen und DIRICHLET-Reihen<sup>6)</sup> lassen sich auf den hier diskutierten Formtypus verallgemeinern. Im einfachsten Fall ergibt sich folgender Sachverhalt: Vorgegeben seien  $\alpha, \beta$  beliebig reell oder komplex und  $\gamma = \pm 1$ . Ist  $\gamma = 1$ , so soll nicht zugleich  $\alpha = \beta = 0$  oder 1 sein. Mit Hilfe der MELLIN-Transformation wird dann eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Formen  $f(z, w)$ , die durch die Bedingungen

1.  $f(z, w) \in \{\alpha, \beta\}$ ,
2.  $f(z, w) = O(y^{\kappa_1})$  für  $y \rightarrow \infty$ ,  $f(z, w) = O(y^{-\kappa_2})$  für  $y \rightarrow 0$  mit geeigneten Konstanten  $\kappa_1, \kappa_2$  gleichmäßig in  $x$ ,
3.  $f(z+1, w+1) = f(z, w)$ ,
4.  $f\left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{w}\right) = \gamma (-iz)^{\alpha} (iw)^{\beta} f(z, w)$

gekennzeichnet sind, und den Paaren analytischer Funktionen  $\varphi(s), \psi(s)$  hergestellt, die folgende Eigenschaften besitzen:

1.  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  sind meromorphe Funktionen, die in gewissen Halbebenen durch DIRICHLET-Reihen dargestellt werden:

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n^s}.$$

<sup>5)</sup> MAGNUS, O., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, speziell Kap. 6. Springer-Verlag 1948.

<sup>6)</sup> HECKE, E.: Über die Bestimmung DIRICHLETScher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. 112, 664–699 (1936).

## 2. Wird

$$(15) \quad \Gamma(s; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} W(y; \alpha, \beta, 1) y^{s-1} dy.$$

$$\xi(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s; \alpha, \beta) \varphi(s) + (2\pi)^{-s} \Gamma(s; \beta, \alpha) \psi(s),$$

$$(16) \quad \eta(s) = (2\pi)^{-s-1} \left( \Gamma(s+1; \alpha, \beta) - \frac{\alpha-\beta}{2} \Gamma(s; \alpha, \beta) \right) \varphi(s) \\ - (2\pi)^{-s-1} \left( \Gamma(s+1; \beta, \alpha) - \frac{\beta-\alpha}{2} \Gamma(s; \beta, \alpha) \right) \psi(s)$$

gesetzt, so sind

$$(17) \quad \xi(s) - a_0 \left( \frac{1}{s(s+1-\alpha-\beta)} + \frac{\gamma}{(\alpha+\beta-s)(1-s)} \right) + b_0 \left( \frac{1}{s} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta-s} \right)$$

und

$$(18) \quad \eta(s) + a_0 \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \left( \frac{1}{s(s+1-\alpha-\beta)} - \frac{\gamma}{(\alpha+\beta-s)(1-s)} \right) - b_0 \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \left( \frac{1}{s} - \frac{\gamma}{\alpha+\beta-s} \right)$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten  $a_0$  und  $b_0$  ganze Funktionen von  $s$  von endlichem Geschlecht.

3.  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  genügen den Funktionalgleichungen

$$(19) \quad \xi(\alpha + \beta - s) = \gamma \xi(s), \quad \eta(\alpha + \beta - s) = -\gamma \eta(s).$$

Die durch  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  eindeutig bestimmten Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  sind die Entwicklungskoeffizienten von  $f(z, w)$ :

$$(20) \quad f(z, w) = a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \sum_{n \neq 0} a_n W(2\pi |n| y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n) e^{2\pi i n x}.$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß

$$\Gamma(s; \alpha, \beta) = 2^{\frac{s-\beta}{2}} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F\left(\beta, 1-\alpha; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right)$$

ist, wobei  $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$  die hypergeometrische Funktion bezeichnet.

Die entsprechende Behandlung von Funktionalgleichungssystemen führt zu einem allgemeinen Ergebnis, aus welchem durch Spezialisierung bekannte Sätze über DIRICHLET-Reihen mit Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit Modulformen<sup>6)</sup>, Wellenfunktionen<sup>7)</sup> und Wellenformen der Dimension  $-1$ <sup>3)</sup> gewonnen werden können. Zu den Funktionalgleichungssystemen für die Teilreihen, die aus den Zetafunktionen der indefiniten quadratischen Formen<sup>8)</sup> durch Einführung von Kongruenzbedingungen entstehen, erhält man nun einen einfachen Zugang, wenn man die von SIEGEL<sup>3)</sup> angegebenen Transformationsformeln für die zugehörigen automorphen Formen verwendet. Zu einfachen Formeln gelangt man, wenn man zunächst die durch die Signatur  $n, m-n$  der indefiniten quadratischen Form bestimmten Gewichte

$$\alpha = \frac{n}{2}, \quad \beta = \frac{m-n}{2}$$

in zulässiger Weise geeignet reduziert. Entweder läßt sich eine der Zahlen  $\alpha, \beta \bmod 1$  in 0 oder  $k = \alpha - \beta \bmod 2$  in 0 oder 1 überführen. Der allgemeine

<sup>6)</sup> MAASS, H.: Über eine neue Art von nicht-analytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung DIRICHLETScher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. 121, 141—183 (1949).

<sup>8)</sup> SIEGEL, C. L.: Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen I und II. Math. Z. 43, 682—708 (1938); 44, 398—426 (1939).



Formelapparat wird so weit entwickelt, daß die Durchführung dieses Verfahrens keine Mühe mehr bereitet. Doch soll die explizite Aufstellung der Funktionalgleichungen hier unterbleiben, da sich das Interesse nach der von SIEGEL eingeleiteten Entwicklung von den Zetafunktionen auf die Modulfunktionen als das kräftigere analytische Hilfsmittel in der Theorie der indefiniten quadratischen Formen verlagert hat.

Es bezeichne  $M(Q)$  die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe zur Stufe  $Q$  und  $v$  ein im parabolischen Fixpunkt  $\infty$  unverzweigtes Multiplikatorsystem zur Gruppe  $M(Q)$  und zur Dimension  $-k = \beta - \alpha$ . Mit  $\kappa = 0$  gilt dann für  $f(z, w) \in \{M(Q); \alpha, \beta, v\}$  eine Entwicklung der Art (13). Jeder solchen Form kann also ein Paar von DIRICHLET-Reihen

$$(22) \quad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n^s}$$

zugeordnet werden. Ist  $k$  ganz rational und  $v = 1$ , so läßt sich das Problem der EULERSchen Produktentwicklung mit den von HECKE<sup>9)</sup> und PETERSSON<sup>10)</sup> entwickelten Methoden auch jetzt befriedigend behandeln, wenn man die lineare Schar  $\{M(Q); \alpha, \beta, 1\}$  in Teilscharen geeignet aufspaltet. Hier ist zu beachten, daß  $\{M(Q); \alpha, \beta, 1\}$  endlichen Rang hat, was man mit einer SIEGELschen Schlußweise ähnlich wie für Wellenfunktionen<sup>7)</sup> beweist. Zunächst hat man nach dem klassischen Vorbild<sup>8)</sup> eine Zerlegung der vollen Schar in die „Teilscharen zum Teiler und Charakter  $\chi$ “, die mit  $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$  bezeichnet werden sollen, vorzunehmen. Die weitere Zerfällung wird durch einen neuen Operator  $\Theta$  bestimmt, der die Beziehungen zwischen Formen und DIRICHLET-Reihen vereinfacht. Der durch

$$(23) \quad X f(z, w) = f(-w, -z)$$

definierte Operator  $X$  bildet  $\{\alpha, \beta\}$  umkehrbar eindeutig auf  $\{\beta, \alpha\}$  und allgemein  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  umkehrbar eindeutig auf  $\{G^*; \beta, \alpha, v^*\}$  ab, wobei

$$G^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Insbesondere gilt also

$$(24) \quad X \{M(Q); \alpha, \beta, 1\} = \{M(Q); \beta, \alpha, 1\}.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf also  $k = \alpha - \beta \geq 0$  angenommen werden. Die Operatoren  $K$  und  $\Lambda$  mögen auf  $\{\alpha, \beta\}$  dieselbe Wirkung haben wie  $K_\alpha, \Lambda_\beta$ . Da die Scharen  $\{\alpha, \beta\}$  nicht elementfremd sind, sind  $K f(z, w)$  und  $\Lambda f(z, w)$  erst dann eindeutig erklärt, wenn genau feststeht, aus welcher Schar  $\{\alpha, \beta\}$  die Funktion  $f(z, w)$  ausgewählt ist. Wir setzen nun

$$(25) \quad \Theta = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} X \Lambda^k,$$

wobei  $\Gamma(\beta)$  endlich, also  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$  sein muß. Mit Hilfe der Relation  $KX = -X\Lambda$  ergibt sich leicht  $\Theta^2 = 1$ .  $\Theta$  bildet die Teilscharen  $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$  auf sich ab. Wir können also eine Zerlegung

$$(26) \quad \mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta) = \mathfrak{F}^+(t, \chi, Q, \alpha, \beta) + \mathfrak{F}^-(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$$

<sup>9)</sup> HECKE, E.: Über Modulfunktionen und die DIRICHLETSchen Reihen mit EULERScher Produktentwicklung I und II. Math. Ann. 114, 1–28, 316–351 (1937).

<sup>10)</sup> PETERSSON, H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer RIEMANNschen Funktionalgleichung durch DIRICHLET-Reihen mit EULERScher Produktentwicklung I, II, III. Math. Ann. 116, 401–412 (1939); 117, 39–64, 277–300 (1940/41).



vornehmen, so daß  $\mathfrak{F}^+$  und  $\mathfrak{F}^-$  aus Eigenfunktionen des Operators  $\Theta$  zum Eigenwert  $+1$  bzw.  $-1$  bestehen. Die DIRICHLET-Reihen (22) unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor, wenn die zugehörige Form  $f(z, w)$  in  $\mathfrak{F}^+$  oder  $\mathfrak{F}^-$  liegt. Darin liegt die Bedeutung des Operators  $\Theta$ . Auf die Scharen  $\mathfrak{F}^+$  und  $\mathfrak{F}^-$  läßt sich die HECKESche Theorie der  $T_n$ -Operatoren ohne besondere Modifikationen übertragen. Bezüglich der EULER-Produkte sind dieselben Resultate zu erzielen wie im klassischen Fall<sup>9) 10)</sup>. Dieser Hinweis mag hier genügen.

Die vorliegende Differentialgleichungstheorie kann in beschränktem Umfang auf die SIEGELSchen Modulfunktionen verallgemeinert werden. Darüber soll später berichtet werden.

### § 1. Differentialoperatoren.

Wir untersuchen hier die formalen Grundregeln für das Rechnen mit den eingeführten Differentialoperatoren. Die Wirkung der Operatoren  $K_\alpha, \Lambda_\beta$  auf die EISENSTEIN-Reihen  $E(z, w; \alpha, \beta)$  ist leicht festzustellen, da die Ableitungen nach  $z$  und  $w$  im Bereich der absoluten Konvergenz gliedweise gebildet werden können. So ergeben sich ohne weiteres die Relationen (7) und (8). Bei der Umrechnung der Operatoren auf die Variablen

$$(27) \quad x = \frac{1}{2}(z + w), \quad y = \frac{1}{2i}(z - w)$$

sind die Formeln

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

zu verwenden. Es gilt also

$$(29) \quad (z - w)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$$(30) \quad \begin{aligned} K_\alpha &= \alpha + (z - w) \frac{\partial}{\partial z} = \alpha + y \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \Lambda_\beta &= -\beta + (z - w) \frac{\partial}{\partial w} = -\beta + y \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

folglich

$$(31) \quad \begin{aligned} \Lambda_{\beta-1} K_\alpha &= (z - w)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} - \beta (z - w) \frac{\partial}{\partial z} + \alpha (z - w) \frac{\partial}{\partial w} + \alpha(1 - \beta), \\ K_{\alpha-1} \Lambda_\beta &= (z - w)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} - \beta (z - w) \frac{\partial}{\partial z} + \alpha (z - w) \frac{\partial}{\partial w} + \beta(1 - \alpha), \end{aligned}$$

woraus

$$(32) \quad \begin{aligned} \Lambda_{\beta-1} K_\alpha + \alpha(\beta - 1) &= K_{\alpha-1} \Lambda_\beta + \beta(\alpha - 1) \\ &= (z - w)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} - \beta (z - w) \frac{\partial}{\partial z} + \alpha (z - w) \frac{\partial}{\partial w} \\ &= -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (\alpha - \beta) i y \frac{\partial}{\partial x} - (\alpha + \beta) y \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

erhält. In der komplexen Mannigfaltigkeit der Punkte  $(z, w)$  bezeichne  $\mathfrak{H}$  die „obere Halbebene“  $w = \bar{z}$ ,  $\Im m z > 0$ .  $\{\alpha, \beta\}$  besteht also aus den Funktionen  $f(z, w)$ , die in  $\mathfrak{H}$  regulär sind und von dem Operator (32) annulliert werden. Da es sich hier um eine elliptische Differentialgleichung spezieller Art handelt, so ist die Analytizität von  $f(z, w)$  in  $\mathfrak{H}$  sicher dann gewährleistet, wenn die Funktion nach den Variablen  $x, y$  im Reellen zweimal stetig differenzierbar ist.

**Hilfssatz 1:** 1. Es ist stets

$$(33) \quad K_{\alpha} \{ \alpha, \beta \} \subset \{ \alpha + 1, \beta - 1 \}, \quad \Lambda_{\beta} \{ \alpha, \beta \} \subset \{ \alpha - 1, \beta + 1 \}.$$

2. Ist  $\alpha(\beta - 1) \neq 0$  bzw.  $\beta(\alpha - 1) \neq 0$ , so wird  $\{ \alpha, \beta \}$  durch  $K_{\alpha}$  bzw.  $\Lambda_{\beta}$  umkehrbar eindeutig auf  $\{ \alpha + 1, \beta - 1 \}$  bzw.  $\{ \alpha - 1, \beta + 1 \}$  abgebildet.

Beweis: Für  $f \in \{ \alpha, \beta \}$  ist

$$(\Lambda_{\beta-1} K_{\alpha} + \alpha(\beta - 1))f = (K_{\alpha-1} \Lambda_{\beta} + \beta(\alpha - 1))f = 0.$$

Wendet man hierauf  $K_{\alpha}$  bzw.  $\Lambda_{\beta}$  an, so ergibt sich

$$(K_{\alpha} \Lambda_{\beta-1} + \alpha(\beta - 1))(K_{\alpha} f) = (\Lambda_{\beta} K_{\alpha-1} + \beta(\alpha - 1))(\Lambda_{\beta} f) = 0,$$

also

$$K_{\alpha} f \subset \{ \alpha + 1, \beta - 1 \}, \quad \Lambda_{\beta} f \subset \{ \alpha - 1, \beta + 1 \};$$

denn  $K_{\alpha} f$  und  $\Lambda_{\beta} f$  sind sicher in  $\mathfrak{S}$  regulär.

Die durch  $K_{\alpha}$  bzw.  $\Lambda_{\beta}$  vermittelte Abbildung von  $\{ \alpha, \beta \}$  ist im Falle  $\alpha(\beta - 1) \neq 0$  bzw.  $\beta(\alpha - 1) \neq 0$  umkehrbar eindeutig, da es eine inverse Abbildung gibt, nämlich  $\frac{1}{\alpha(1-\beta)} \Lambda_{\beta-1}$  bzw.  $\frac{1}{\beta(1-\alpha)} K_{\alpha-1}$ . Daraus ergibt sich schließlich auch, daß jede Funktion aus  $\{ \alpha + 1, \beta - 1 \}$  bzw.  $\{ \alpha - 1, \beta + 1 \}$  als Bild einer Funktion aus  $\{ \alpha, \beta \}$  vorkommt.

**Hilfssatz 2:** Für reelle Substitutionen  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit der Determinante 1 ist

$$(34) \quad \{ \alpha, \beta \} | S = \{ \alpha, \beta \}.$$

Beweis: Es sei  $\hat{z} = Sz$ ,  $\hat{w} = Sw$ . Die Operatoren  $\hat{K}_{\alpha}$ ,  $\hat{\Lambda}_{\beta-1}$  mögen aus  $K_{\alpha}$ ,  $\Lambda_{\beta-1}$  entstehen, wenn man hierin  $z, w$  durch  $\hat{z}, \hat{w}$  ersetzt. Mit Hilfe von

$$\hat{z} - \hat{w} = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{z}} = (cz + d)^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{w}} = (cw + d)^2 \frac{\partial}{\partial w}$$

ergibt sich dann die Operatorenidentität

$$(35) \quad \hat{\Lambda}_{\beta-1} \hat{K}_{\alpha} (cz + d)^{\alpha} (cw + d)^{\beta} = (cz + d)^{\alpha} (cw + d)^{\beta} \Lambda_{\beta-1} K_{\alpha}.$$

Zum Beweis führen wir die linke Seite von (35) über in

$$\begin{aligned} & \left( (1 - \beta + (\hat{z} - \hat{w}) \frac{\partial}{\partial \hat{w}}) \left( \alpha + (\hat{z} - \hat{w}) \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) (cz + d)^{\alpha} (cw + d)^{\beta} \right) \\ &= \left( 1 - \beta + (z - w) \frac{cw + d}{cz + d} \frac{\partial}{\partial w} \right) \left( \alpha + (z - w) \frac{cz + d}{cw + d} \frac{\partial}{\partial z} \right) (cz + d)^{\alpha} (cw + d)^{\beta}. \end{aligned}$$

Die Identität mit der rechten Seite von (35) ist nun leicht zu bestätigen. Sei  $f(z, w) \in \{ \alpha, \beta \}$ , also

$$(\hat{\Lambda}_{\beta-1} \hat{K}_{\alpha} + \alpha(\beta - 1))f(\hat{z}, \hat{w}) = 0.$$

Hieraus folgt

$$(cz + d)^{\alpha} (cw + d)^{\beta} (\Lambda_{\beta-1} K_{\alpha} + \alpha(\beta - 1))(cz + d)^{-\alpha} (cw + d)^{-\beta} f(\hat{z}, \hat{w}) = 0$$

oder

$$(\Lambda_{\beta-1} K_{\alpha} + \alpha(\beta - 1))(f(z, w) | S) = 0,$$

mithin  $f(z, w) | S \in \{ \alpha, \beta \}$ ; denn  $f(z, w) | S$  ist in  $\mathfrak{S}$  sicher regulär. Da es zu der Operation  $f(z, w) \rightarrow f(z, w) | S$  eine inverse gibt, ist  $\{ \alpha, \beta \} | S$  mit  $\{ \alpha, \beta \}$  identisch, q. e. d.

**Hilfssatz 3:** Sei  $f(z, w) \in \{\alpha, \beta\}$  und  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine reelle Substitution mit der Determinante 1. Dann ist

$$(36) \quad (K_\alpha f(z, w))|S = K_\alpha(f(z, w)|S), \quad (\Lambda_\beta f(z, w))|S = \Lambda_\beta(f(z, w)|S).$$

Beweis: Wir setzen wieder  $\hat{z} = Sz$ ,  $\hat{w} = Sw$  und finden

$$\begin{aligned} (K_\alpha f(z, w))|S &= (cz + d)^{-\alpha-1} (cw + d)^{-\beta+1} \left( \alpha + (\hat{z} - \hat{w}) \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) f(\hat{z}, \hat{w}) \\ &= (cz + d)^{-\alpha-1} (cw + d)^{-\beta+1} \left( \alpha + (z - w) \frac{cz + d}{cw + d} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\hat{z}, \hat{w}) \\ &= \left( \alpha + (z - w) \frac{\partial}{\partial z} \right) (cz + d)^{-\alpha} (cw + d)^{-\beta} f(\hat{z}, \hat{w}) = K_\alpha(f(z, w)|S). \end{aligned}$$

Analog erschließt man die zweite Relation.

**Hilfssatz 4:** Sei  $f(z, w) \in \{\alpha, \beta\}$  und  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine reelle Substitution mit der Determinante 1. Dann ist

$$(37) \quad (X f(z, w))|S = X(f(z, w)|S^*) \quad \text{mit } S^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Beweis: Da die Differentialgleichung

$$(\Lambda_{\beta-1} K_\alpha + \alpha(\beta-1)) f(z, w) = 0$$

in sich übergeht, wenn man gleichzeitig  $\alpha, \beta$  durch  $\beta, \alpha$  und  $x$  durch  $-x$  ersetzt, so gilt offenbar

$$(38) \quad X\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (X f(z, w))|S &= f(-w, -z)|S \\ &= f\left(\frac{a(-w) - b}{-c(-w) + d}, \frac{a(-z) - b}{-c(-z) + d}\right) (-c(-z) + d)^{-\beta} (-c(-w) + d)^{-\alpha} \\ &= X(f(z, w)|S^*). \end{aligned}$$

**Hilfssatz 5:** Es sei  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$  und  $k = \alpha - \beta$  ganz rational  $\geq 0$ .

Mit  $\Theta = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} X \Lambda^k$  ist dann  $\Theta\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$  und  $\Theta^2 = 1$ .

Beweis: Nach (38) und Hilfssatz 1 ist

$$\Theta\{\alpha, \beta\} = X \Lambda^k \{\alpha, \beta\} \subset X\{\alpha - k, \beta + k\} = \{\beta + k, \alpha - k\} = \{\alpha, \beta\}.$$

Zum Beweis der Relation  $\Theta^2 = 1$  benötigen wir die Vertauschungsregel

$$(39) \quad KX = -X\Lambda.$$

Wegen  $X^2 = 1$  ist sie gleichwertig mit  $XKX = -\Lambda$ . Für  $g(x, y) \in \{\alpha, \beta\}$  gilt nun in der Tat

$$\begin{aligned} X K_\beta X g(x, y) &= X \left( \beta + y \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) g(-x, y) \\ &= - \left( -\beta + y \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) g(x, y) = -\Lambda_\beta g(x, y). \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\Theta^2 &= \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 (\mathbf{X} \Lambda^k)^2 = (-1)^k \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \mathbf{K}^k \Lambda^k \\ &= (-1)^k \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \mathbf{K}_{\alpha-1} \mathbf{K}_{\alpha-2} \dots \mathbf{K}_\beta \Lambda_{\alpha-1} \Lambda_{\alpha-2} \dots \Lambda_\beta \\ &= (\alpha-1)^2 (\alpha-2)^2 \dots \beta^2 \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 = 1,\end{aligned}$$

wobei berücksichtigt wurde, daß  $\mathbf{K}_{\beta+v} \Lambda_{\alpha-1-v}$  auf die Schar  $\{\beta+v+1, \alpha-1-v\}$  dieselbe Wirkung hat wie der Operator  $-(\beta+v)(\alpha-1-v)$ . Wegen  $\Theta^2 = 1$  wird  $\{\alpha, \beta\}$  durch  $\Theta$  auf sich abgebildet.

## § 2. Automorphe Formen.

Für  $\Im z > 0$ ,  $\Im w < 0$  und reelle  $c, d \neq 0$ , 0 ist

$$(cz + d)^s = e^{s \log(cz + d)}, \quad (cw + d)^\beta = e^{\beta \log(cw + d)}$$

und

$$\begin{aligned}\log(cz + d) &= \log|cz + d| + i \arg(cz + d), \quad -\pi < \arg(cz + d) \leq \pi \\ \log(cw + d) &= \log|cw + d| + i \arg(cw + d), \quad -\pi \leq \arg(cw + d) < \pi\end{aligned}$$

mit reellen  $\log|cz + d|$ ,  $\log|cw + d|$  gesetzt worden. Offenbar ist

$$\log(cz + d) + \log(cw + d) \text{ reell für } w = \bar{z}.$$

Folglich treten in den Transformationsformeln, die das Verhalten der Funktionen

$$(cz + d)^s (cw + d)^\beta = (cz + d)^{s-\beta} \cdot (cz + d)^\beta (cw + d)^\beta$$

und  $(cz + d)^{s-\beta}$  gegenüber reellen Substitutionen  $z \rightarrow Sz$ ,  $w \rightarrow Sw$  beschreiben, dieselben Faktorsysteme  $\sigma^{(s-\beta)}(M, S)$  (in der PETERSSONschen Bezeichnung<sup>4)</sup>) auf. Sind  $S_r = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix}$  reelle Substitutionen mit der Determinante 1 und ist  $S_3 = S_1 S_2$ , so gilt also

$$\begin{aligned}(40) \quad & (c_1 S_2 z + d_1)^s (c_1 S_2 w + d_1)^\beta (c_2 z + d_2)^s (c_2 w + d_2)^\beta \\ &= \sigma(S_1, S_2) (c_3 z + d_3)^s (c_3 w + d_3)^\beta \quad \text{mit } \sigma = \sigma^{(s-\beta)}.\end{aligned}$$

Allgemein kann nun

$$(41) \quad f|(S_1 S_2) = \sigma(S_1, S_2) (f|S_1)|S_2 \quad \text{für } f \in \{\alpha, \beta\}$$

bewiesen werden.

Es sei  $G$  eine Gruppe reeller Substitutionen und  $f$  eine nicht identisch verschwindende Funktion aus  $\{\alpha, \beta\}$ . Mit gewissen Koeffizienten  $v(S)$  vom Betrag 1 sei

$$(42) \quad f|S = v(S) f \quad \text{für } S \in G.$$

Die Formel (41) ergibt dann

$$v(S_1 S_2) = \sigma(S_1, S_2) v(S_1) v(S_2) \quad \text{für } S_1, S_2 \in G.$$

Die Zahlwerte  $v(S)$  bilden also ein Multiplikatorsystem zur Gruppe  $G$  und zur Dimension  $\beta - \alpha$ . In der üblichen Weise bestätigt man, daß sich die transformierte Funktion  $f|A^{-1}$  nach der Regel

$$(43) \quad (f|A^{-1})|S = v^{A^{-1}}(S) f|A^{-1} \quad \text{für } S \in A G A^{-1}$$

umsetzt. Dabei ist  $A$  eine beliebige reelle Substitution mit der Determinante 1 und

$$(44) \quad v^{A^{-1}}(S) = v(A^{-1}SA) \frac{\sigma(A^{-1}SA, A^{-1})}{\sigma(A^{-1}, S)}.$$

Nach Hilfssatz 3 und 4 ist außerdem

$$(45) \quad (K_\alpha f) | S = v(S) K_\alpha f, \quad (\Lambda_\beta f) | S = v(S) \Lambda_\beta f \quad \text{für } S \in G$$

und

$$(46) \quad (X f) | S = v^*(S) X f \quad \text{für } S \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$(47) \quad v^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} a-b & \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die FOURIER-Entwicklungen der in  $\{\alpha, \beta\}$  gelegenen periodischen Funktionen.

**Hilfssatz 6:** Es sei  $g_\varepsilon(y) e^{i\varepsilon x} \in \{\alpha, \beta\}$  und  $g_\varepsilon(y) = O(y^K)$  für reelles  $y \rightarrow \infty$  mit einer gewissen Konstanten  $K$  im Falle  $\varepsilon \neq 0$ . Dann ist

$$g_0(y) = a u(y, \alpha + \beta) + b, \quad g_\varepsilon(y) = a W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon = \pm 1$$

mit den durch (14) erklärten Funktionen.  $a$  und  $b$  bezeichnen beliebige Konstanten.

Beweis: Im Falle  $\varepsilon = 0$  wird behauptet, daß 1 und  $u(y, \alpha + \beta)$  ein Hauptsystem der Differentialgleichung

$$(48) \quad y g_0''(y) + (\alpha + \beta) g_0'(y) = 0$$

bilden. Das ist leicht zu bestätigen. Sei nun  $\varepsilon = \pm 1$ . Für  $g_\varepsilon(y)$  ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$(49) \quad y g_\varepsilon''(y) + (\alpha + \beta) g_\varepsilon'(y) + ((\alpha - \beta)\varepsilon - y) g_\varepsilon(y) = 0,$$

die sich in einfacher Weise auf die WHITTAKERSche Differentialgleichung — eine spezielle reduzierte Form der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung — zurückführen läßt [s. KAMKE<sup>11)</sup>, 2 · 273 (9)]. Es gilt nämlich

$$g_\varepsilon(y) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W\left(\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}, 2y\right),$$

wobei  $W(l, m, y)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$(50) \quad 4 y^2 W'' = (y^2 - 4ly + 4m^2 - 1) W$$

bezeichnet. Diese besitzt das Hauptsystem  $W_{l,m}(y)$ ,  $W_{-l,m}(-y)$  [s.<sup>6)</sup>, S. 116]. Für  $y \rightarrow \infty$  geht die erste Funktion exponentiell gegen 0 und die zweite exponentiell gegen  $\infty$ . Mithin ist

$$(51) \quad g_\varepsilon(y) = a y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W\left(\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}, 2y\right).$$

Zur Abkürzung ist hierfür

$$(52) \quad g_\varepsilon(y) = a W(y; \alpha, \beta, \varepsilon)$$

geschrieben worden.

<sup>11)</sup> KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungen und Lösungsmethoden I. Leipzig 1942.

Wir bestimmen die Wirkungen der Operatoren  $K_\alpha$ ,  $\Lambda_\beta$ ,  $X$  auf die in Hilfssatz 6 genannten Funktionen:

**Hilfssatz 7:** 1.  $X \cdot 1 = 1$ ,  $X u(y, \alpha + \beta) = u(y, \alpha + \beta)$ ,

$$X W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} = W(y; \beta, \alpha, -\varepsilon) e^{-i\varepsilon x} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$2. K_\alpha 1 = \alpha, K_\alpha u(y, \alpha + \beta) = (1 - \beta) u(y, \alpha + \beta) + 1,$$

$$K_\alpha W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} = \begin{cases} -W(y; \alpha + 1, \beta - 1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1, \\ -\alpha(\beta - 1) W(y; \alpha + 1, \beta - 1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

$$3. \Lambda_\beta 1 = -\beta, \Lambda_\beta u(y, \alpha + \beta) = (\alpha - 1) u(y, \alpha + \beta) - 1,$$

$$\Lambda_\beta W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} = \begin{cases} (\alpha - 1) \beta W(y; \alpha - 1, \beta + 1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1, \\ W(y; \alpha - 1, \beta + 1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

**Beweis:** Die behauptete Wirkung von  $X$  ist elementar zu prüfen, ebenso die von  $K_\alpha$  und  $\Lambda_\beta$  auf die Funktionen  $1$ ,  $u(y, \alpha + \beta)$ . Darauf braucht nicht mehr eingegangen zu werden. Für die restlichen Transformationsformeln benötigen wir einige Identitäten, die zwischen den Lösungen  $W(l, m, y)$  der WHITTAKERSchen Differentialgleichung (50) zu verschiedenen Parameterwerten  $l, m$  bestehen. Zunächst bestätigt man leicht, daß

$$y W'(l, m, y) \pm (l - \frac{1}{2} y) W(l, m, y)$$

eine Lösung vom Typus  $W(l \pm 1, m, y)$  ist. Wählt man speziell  $W(l, m, y) = W_{l,m}(y)$ , so zeigt das asymptotische Verhalten dieser Funktion, daß  $W(l \pm 1, m, y)$  bis auf einen konstanten Faktor mit  $W_{l \pm 1, m}(y)$  identisch ist. Dieser Faktor kann mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung

$$W_{l,m}(y) \approx e^{-\frac{y}{2}} y^l \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! y^n} \prod_{r=1}^n [m^2 - (l + \frac{1}{2} - r)^2] \right)$$

[s.<sup>5)</sup> S. 116] ermittelt werden, wenn man hierin hinreichend viele Glieder berücksichtigt. So ergibt sich

$$(53) \quad y W'_{l,m}(y) - (l - \frac{1}{2} y) W_{l,m}(y) = - (m^2 - (l - \frac{1}{2})^2) W_{l-1,m}(y),$$

$$(54) \quad y W'_{l,m}(y) + (l - \frac{1}{2} y) W_{l,m}(y) = - W_{l+1,m}(y).$$

Damit erhalten wir nun

$$K_\alpha W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) e^{i\varepsilon x}$$

$$= \left( \alpha + y \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) e^{i\varepsilon x}$$

$$= y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{ 2y W'_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) + \right. \\ \left. + \varepsilon \left( \frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2} - y \right) W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) \right\} e^{i\varepsilon x}$$

$$= \begin{cases} -y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{\alpha-\beta+2}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1, \\ -\alpha(\beta - 1) W_{\frac{\beta-\alpha-2}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -W(y; \alpha + 1, \beta - 1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1, \\ -\alpha(\beta - 1) W(y; \alpha + 1, \beta - 1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_\beta W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} &= -X K_\beta X W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} \\
&= -X K_\beta W(y; \beta, \alpha, -\varepsilon) e^{-i\varepsilon x} \\
&= \begin{cases} X W(y; \beta+1, \alpha-1, -\varepsilon) e^{-i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1, \\ \beta(\alpha-1) X W(y; \beta+1, \alpha-1, -\varepsilon) e^{-i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} W(y; \alpha-1, \beta+1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1, \\ \beta(\alpha-1) W(y; \alpha-1, \beta+1, \varepsilon) e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

**Hilfssatz 8:** Es sei  $g(x, y) \subset \{\alpha, \beta\}$ ,  $g(x+Q, y) = e^{2\pi i \kappa} g(x, y)$  ( $Q > 0$ ,  $0 \leq \kappa < 1$ ) und  $g(x, y) = O(y^K)$  für reelles  $y \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $0 \leq x \leq Q$  mit einer gewissen Konstanten  $K$ . Dann läßt sich  $g(x, y)$  in eine FOURIER-Reihe

$$g(x, y) = a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \sum_{n+\kappa \neq 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\kappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}$$

entwickeln, die für reelle  $x$  und  $y > 0$  absolut konvergiert. Die Koeffizienten  $a_0$  und  $b_0$  verschwinden im Falle  $\kappa > 0$ . Umgekehrt stellt jede solche FOURIERreihe eine Funktion mit den genannten Eigenschaften dar.

Beweis: Es sei  $g(x, y) \subset \{\alpha, \beta\}$  und  $g(x+Q, y) = e^{2\pi i \kappa} g(x, y)$ . Dann gibt es eine FOURIER-Entwicklung

$$g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+\kappa}(y) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x},$$

die sicher absolut konvergiert, da  $g(x, y)$  mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Offenbar ist

$$A_{n+\kappa}(y) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \subset \{\alpha, \beta\} \quad \text{für alle } n,$$

also auch

$$A_{n+\kappa} \left( \frac{Qy}{2\pi|n+\kappa|} \right) e^{i\varepsilon x} \subset \{\alpha, \beta\} \quad \text{für } n+\kappa \neq 0$$

mit  $\varepsilon = \operatorname{sgn}(n+\kappa)$  und

$$A_{n+\kappa}(y) \subset \{\alpha, \beta\} \quad \text{für } n+\kappa = 0,$$

was nur im Falle  $\kappa = 0$  möglich ist. Wächst  $g(x, y)$  gleichmäßig in  $x$  für  $y \rightarrow \infty$  höchstens wie eine Potenz von  $y$ , so gilt dies auch für die FOURIER-Koeffizienten

$$A_{n+\kappa}(y) = \frac{1}{Q} \int_0^Q g(x, y) e^{-\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} dx.$$

Hilfssatz 6 liefert nun

$$A_0(y) = a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 \quad (\text{im Falle } \kappa = 0)$$

$$A_{n+\kappa}(y) = a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\kappa)\right) \quad \text{für } n+\kappa \neq 0.$$

Die Betrachtung ist leicht umzukehren, wenn man die asymptotische Entwicklung

$$(55) \quad W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) \sim 2^{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}} y^{-\frac{\alpha+\beta+(\beta-\varepsilon)}{2}} e^{-y} \quad \text{für } y \rightarrow \infty$$

beachtet.

Wir wenden uns nun den Formenscharen  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  zu, wobei  $|v| = 1$  sei. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann auch  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$  vorausgesetzt werden, wenn dies aus beweistechnischen Gründen bequem ist. Die Formen  $f(z, w) \in \{G; \alpha, \beta, v\}$  sind durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet:

1.  $f(z, w) \in \{\alpha, \beta\}$ ,

2.  $f(z, w) | S = v(S) f(z, w)$  für  $S \in G$ ,

3. Ist  $\infty$  parabolischer Fixpunkt von  $A G A^{-1}$  und erzeugt  $\begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (mit  $Q > 0$ ) die Gruppe der parabolischen Substitutionen  $\subset A G A^{-1}$  mit dem Fixpunkt  $\infty$ , so gibt es eine Entwicklung

$$(56) \quad f(z, w) | A^{-1} = a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \sum_{n+\kappa \neq 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\kappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x},$$

wobei

$$v A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2\pi i \kappa}, \quad 0 \leq \kappa < 1$$

gesetzt ist.

Die Gleichwertigkeit dieser Bedingungen mit den in der Einleitung formulierten ist mit Hilfe von (43), Hilfssatz 2 und 8 ohne weiteres festzustellen.

**Satz 1:** Für reelle Substitutionen  $L$  mit der Determinante 1 ist

$$\{G; \alpha, \beta, v\} | L = \{L^{-1} G L; \alpha, \beta, v^L\}.$$

Beweis: Sei  $f(z, w) \in \{G; \alpha, \beta, v\}$ . Dann ist nach Hilfssatz 2  $f(z, w) | L \in \{\alpha, \beta\}$  und nach (44)  $(f(z, w) | L) | S = v^L(S) f(z, w) | L$  für  $S \in L^{-1} G L$ . Weiter sei  $\infty$  parabolischer Fixpunkt von  $B L^{-1} G L B^{-1}$ ;  $\begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  erzeuge die Gruppe der parabolischen Substitutionen  $\subset B L^{-1} G L B^{-1}$  mit dem Fixpunkt  $\infty$ . Wird  $A = B L^{-1}$  gesetzt, so gilt für  $f(z, w) | A^{-1}$  und folglich auch für

$$(f(z, w) | L) | B^{-1} = \frac{1}{\sigma(L, B^{-1})} f(z, w) | A^{-1}$$

eine Entwicklung der Art (56). Damit ist

$$\{G; \alpha, \beta, v\} | L \subset \{L^{-1} G L; \alpha, \beta, v^L\}$$

bewiesen. Hierin ersetzt man  $L$  durch  $L^{-1}$ , sodann  $G, v$  durch  $L^{-1} G L, v$ . Dies ergibt

$$\{L^{-1} G L; \alpha, \beta, v^L\} | L^{-1} \subset \{G; \alpha, \beta, v\}$$

oder

$$\{L^{-1} G L; \alpha, \beta, v^L\} \subset \{G; \alpha, \beta, v\} | L,$$

mithin

$$\{G; \alpha, \beta, v\} | L = \{L^{-1} G L; \alpha, \beta, v^L\}.$$

**Satz 2:** 1. Es ist stets

$$K_\alpha \{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha + 1, \beta - 1, v\}, \quad \Lambda_\beta \{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha - 1, \beta + 1, v\}.$$

2. Ist  $\alpha(\beta - 1) \neq 0$  bzw.  $\beta(\alpha - 1) \neq 0$ , so wird  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  durch  $K_\alpha$  bzw.  $\Lambda_\beta$  umkehrbar eindeutig auf  $\{G; \alpha + 1, \beta - 1, v\}$  bzw.  $\{G; \alpha - 1, \beta + 1, v\}$  abgebildet.



Beweis: Sei  $f(z, w) \in \{G; \alpha, \beta, v\}$ . Nach Hilfssatz 1 liegt dann  $K_x f(z, w)$  in  $\{\alpha + 1, \beta - 1\}$  und  $\Lambda_\beta f(z, w)$  in  $\{\alpha - 1, \beta + 1\}$ . Auch gegenüber den Substitutionen aus  $G$  zeigen die Funktionen nach (45) das richtige Verhalten. Aus (56) folgt schließlich, wenn Hilfssatz 3 und 7 beachtet wird,

$$(57) \quad \begin{aligned} (K_x f(z, w)) | A^{-1} &= (1 - \beta) a_0 u(y, \alpha + \beta) + a_0 + \alpha b_0 \\ &- \sum_{n+\kappa > 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha + 1, \beta - 1, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \\ &- \alpha(\beta - 1) \sum_{n+\kappa < 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha + 1, \beta - 1, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}, \end{aligned}$$

$$(58) \quad \begin{aligned} (\Lambda_\beta f(z, w)) | A^{-1} &= (\alpha - 1) a_0 u(y, \alpha + \beta) - a_0 - \beta b_0 \\ &+ \beta(\alpha - 1) \sum_{n+\kappa > 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha - 1, \beta + 1, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \\ &+ \sum_{n+\kappa < 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha - 1, \beta + 1, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}. \end{aligned}$$

Damit ist Teil 1 von Satz 2 bewiesen. Nun ist wie beim Hilfssatz 1 weiter zu schließen.

**Satz 3:** Es sei  $k = \alpha - \beta$  ganz rational  $\geq 0$  und  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$

Dann ist

$$\Theta\{G; \alpha, \beta, v\} = \{G^*; \alpha, \beta, v^*\}$$

$$\text{mit } G^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } v^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} a-b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wegen (46) und Hilfssatz 4 ist

$$(59) \quad X\{G; \alpha, \beta, v\} = \{G^*; \beta, \alpha, v^*\}.$$

Satz 2 ergibt also

$$\Theta\{G; \alpha, \beta, v\} = X\Lambda^k\{G; \alpha, \beta, v\} = X\{G; \beta, \alpha, v\} = \{G^*; \alpha, \beta, v^*\}.$$

Wiederholte Anwendung der Formeln (57) und (58) für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ergibt

**Satz 4:** Die Funktion  $f(z, w) \in \{\alpha, \beta\}$  gestatte die FOURIER-Entwicklung

$$(60) \quad \begin{aligned} f(z, w) &= a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \\ &+ \sum_{n+\kappa \neq 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\kappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}. \end{aligned}$$

Dann ist für  $h \geq 0$ :

$$(61) \quad \begin{aligned} K^h f(z, w) &= (-1)^h \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-h)} a_0 u(y, \alpha + \beta) + \\ &+ \left( \sum_{v=0}^{h-1} (-1)^v \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\beta-v) \Gamma(\alpha+v+1)} \right) a_0 + \frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha)} b_0 \\ &+ (-1)^h \sum_{n+\kappa > 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha+h, \beta-h, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \\ &+ (-1)^h \frac{\Gamma(\alpha+h) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-h)} \sum_{n+\kappa < 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha+h, \beta-h, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Lambda^k f(z, w) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-h)} a_0 u(y, \alpha + \beta) \\
 (62) \quad &+ \left( \sum_{v=0}^{h-1} (-1)^{h-v} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\alpha-v) \Gamma(\beta+v+1)} \right) a_0 + (-1)^h \frac{\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\beta)} b_0 \\
 &+ \frac{\Gamma(\beta+h) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-h)} \sum_{n+\kappa > 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha-h, \beta+h, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \\
 &+ \sum_{n+\kappa < 0} a_{n+\kappa} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha-h, \beta+h, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}.
 \end{aligned}$$

Die  $\Gamma$ -Quotienten  $\frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $\frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha+v+1)}$  usw. stellen in diesen Formeln jeweils die Werte der analytischen Funktionen  $\frac{\Gamma(z+h)}{\Gamma(z)}$ ,  $\frac{\Gamma(z+h)}{\Gamma(z+v+1)}$  usw. an der Stelle  $z = \alpha$  dar.

Mit Hilfe der zweiten Entwicklung in Satz 4 kann nun auch die Wirkung des Operators  $\theta$  auf die FOURIER-Reihen bestimmt werden. Man braucht nur auf  $\Lambda^k f(z, w)$  mit  $k = \alpha - \beta$  den Operator  $\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \times$  anzuwenden. Der Einfachheit halber setzen wir  $\kappa = 0$ .

**Satz 5:** Es sei  $k = \alpha - \beta$  ganz rational  $\geq 0$ ,  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$  und

$$\begin{aligned}
 f(z, w) &= a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \\
 (63) \quad &+ \sum_{n \neq 0} a_n W\left(\frac{2\pi|n|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x}
 \end{aligned}$$

die FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion aus  $\{\alpha, \beta\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \theta f(z, w) &= \\
 a_0 u(y, \alpha + \beta) &+ \left( \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^{(k-v)} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-v) \Gamma(\beta+v+1)} \right) a_0 + (-1)^k b_0 \\
 (64) \quad &+ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} W\left(\frac{2\pi n}{Q} y; \alpha, \beta, 1\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x} + \\
 &+ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n W\left(\frac{2\pi n}{Q} y; \alpha, \beta, -1\right) e^{-\frac{2\pi i n}{Q} x}.
 \end{aligned}$$

Hierin ist insbesondere

$$(65) \quad \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^{k-v} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-v) \Gamma(\beta+v+1)} = 0 \quad \text{für } k \equiv 0(2),$$

was man direkt bestätigen oder auch aus  $\theta^2 = I$  folgern kann.

### § 3. Spezielle Typen automorpher Formen.

Die Reduktionsformeln von Satz 4 sollen hier speziell auf solche Formenscharen  $\{G; \alpha, \beta, v\}$  angewendet werden, die eine Beziehung zu den klassischen automorphen Formen oder den Wellenformen von der Dimension 0 oder  $-1$  aufweisen. Es wird also vorausgesetzt, daß eine der Zahlen  $\alpha, \beta, \alpha - \beta$  ganz rational ist. In diesen Fällen lassen sich die WHITTAKERSCHEN Funktionen auf

BESSELSche Funktionen und Exponentialfunktionen zurückführen. Das soll zunächst gezeigt werden. Nach Fußnote <sup>9)</sup>, S. 118 ist

$$(66) \quad W_{l,m}(y) = \frac{y^l e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2} - l\right)} \int_0^\infty t^{m-l-\frac{1}{2}} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{y}\right)^{m+l-\frac{1}{2}} dt$$

für  $y > 0$ ,  $\Re(m + 1/2 - l) > 0$ . Mit  $k = \alpha - \beta$  wird also

$$(67) \quad \begin{aligned} W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) &= y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{k\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) \\ &= \frac{2^{\frac{k\varepsilon}{2}} y^{\frac{k\varepsilon-\alpha-\beta}{2}} e^{-y}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}-1} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{2y}\right)^{\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}-1} dt. \end{aligned}$$

Die Substitution  $t = y(u-1)$  führt auf

$$(68) \quad \begin{aligned} W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) &= \frac{2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}\right)} \int_1^\infty (u-1)^{\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}-1} (u+1)^{\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}-1} e^{-yu} du \\ &= \frac{2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{\varepsilon y}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}\right)} \int_1^\infty (u^2-1)^{\beta-1} (u+\varepsilon)^k e^{-y(u+\varepsilon)} du. \end{aligned}$$

Ist  $k$  ganz rational  $\geq 0$ , so ergibt sich

$$(69) \quad \begin{aligned} W(y; \beta+k, \beta, \varepsilon) &= (-1)^k \frac{2^{1-\beta-\frac{k}{2}} e^{\varepsilon y}}{\Gamma\left(\beta + \frac{k(1-\varepsilon)}{2}\right)} \frac{d^k}{dy^k} \int_1^\infty (u^2-1)^{\beta-1} e^{-y(u+\varepsilon)} du \\ &= (-1)^k 2^{\frac{1-k}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta + \frac{k(1-\varepsilon)}{2}\right)} e^{\varepsilon y} \frac{d^k}{dy^k} e^{-\varepsilon y} y^{\frac{1}{2}-\beta} K_{\beta-\frac{1}{2}}(y) \end{aligned}$$

mit

$$(70) \quad K_{\beta-\frac{1}{2}}(y) = \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}y\right)^{\beta-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta)} \int_1^\infty (u^2-1)^{\beta-1} e^{-yu} du \quad [\text{S. } 12], 6 \cdot 3],$$

für  $k=0$ , 1 also

$$(71) \quad W(y; \beta, \beta, \varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} y^{\frac{1}{2}-\beta} K_{\beta-\frac{1}{2}}(y),$$

$$(72) \quad W(y; 1+\beta, \beta, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta + \frac{1-\varepsilon}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-\beta} (K_{\beta+\frac{1}{2}}(y) + \varepsilon K_{\beta-\frac{1}{2}}(y)),$$

wobei

$$y K'_{\beta-\frac{1}{2}}(y) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) K_{\beta-\frac{1}{2}}(y) = -y K_{\beta+\frac{1}{2}}(y) \quad [\text{S. } 12], 3 \cdot 71]$$

<sup>10)</sup> WATSON, G. N.: A treatise on the theory of BESSEL functions. Cambridge 1922.

berücksichtigt wurde. Da stets

$$W_{l,m}(y) = W_{l,-m}(y)$$

ist, so gilt für  $y > 0$ ,  $\Re(\alpha + \beta + k\varepsilon) < 2$  auch

$$(73) \quad \begin{aligned} W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) &= y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{k\varepsilon}{2}, \frac{1-\alpha-\beta}{2}}(2y) \\ &= \frac{2^{\frac{k\varepsilon}{2}} y^{\frac{k\varepsilon-\alpha-\beta}{2}} e^{-y}}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}\right)} \int_0^\infty t^{-\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{2y}\right)^{\frac{k\varepsilon-\alpha-\beta}{2}} dt. \end{aligned}$$

Das Integral hat für  $\beta = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\Re \alpha < 1$  bekanntlich den Wert  $\Gamma(1 - \alpha)$ . Allgemein ergibt sich damit

$$(74) \quad W(y; \alpha, 0, 1) = W(y; 0, \alpha, -1) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{-y}.$$

Wir reduzieren nun die Formenscharen  $\{G; \alpha, \beta, v\}$ , für welche  $\alpha$  oder  $\beta$  ganz rational ist. Da der Operator  $X$  die gegebene Schar nach (59) auf elementare Art umkehrbar eindeutig auf die Schar  $\{G^*; \beta, \alpha, v^*\}$  abbildet, brauchen wir nur den Fall ganz rationaler  $\beta$  darzustellen. Dabei berücksichtigen wir (74) und Satz 2 4.

**Satz 6:** Es sei  $\beta$  reell,  $h = |\beta|$  eine natürliche Zahl und  $f(z, w)$  eine automorphe Form aus  $\{G; \alpha, \beta, v\}$ , die eine FOURIER-Entwicklung

$$(75) \quad \begin{aligned} f(z, w) &= a_0 u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \\ &+ \sum_{n+s \neq 0} a_{n+s} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\kappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \end{aligned}$$

gestalte.

1. Ist  $\beta > 0$ , so stellt

$$(76) \quad \begin{aligned} K^h f(z, w) &= \left( \sum_{v=0}^{h-1} (-1)^v \frac{\Gamma(h) \Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(h-v) \Gamma(\alpha+v+1)} \right) a_0 + \frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha)} b_0 + \\ &+ (-1)^h 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{n+s > 0} a_{n+s} e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} z} \end{aligned}$$

eine automorphe Form der Dimension  $-(\alpha + \beta)$  zur Gruppe  $G$  und zum Multiplikatorsystem  $v$  im klassischen Sinne dar.

2. Ist  $\beta < 0$ , so wird

$$(77) \quad \begin{aligned} \Lambda^h f(z, w) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-h)} a_0 u(y, \alpha + \beta) \\ &- \left( \sum_{v=0}^{h-1} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(h-v)}{\Gamma(\alpha-v)} \right) a_0 + \Gamma(h+1) b_0 \\ &+ (-1)^h \frac{\Gamma(h+1) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-h)} 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{n+s > 0} a_{n+s} e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} z} \\ &+ \sum_{n+s < 0} a_{n+s} W\left(\frac{2\pi|n+\kappa|}{Q} y; \alpha + \beta, 0, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $W(y; \alpha, 0, -1)$  hängt mit der „unvollständigen Gammafunktion“ [s.<sup>5)</sup> S. 125] zusammen, ist also keine elementare Transzendente.

Folglich wird die ausgeführte Reduktion im allgemeinen keine gewöhnliche automorphe Form ergeben, falls  $\beta < 0$  ist.

Die Behandlung der Fälle  $\alpha - \beta \equiv 0 \pmod{1}$  erfolgt mit Hilfe der Sätze 2, 4 und der Formeln (71), (72). Wegen der Gleichwertigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$  darf  $\alpha - \beta \geq 0$  angenommen werden.

**Satz 7:** Es sei  $\alpha - \beta$  ganz rational  $\geq 0$ . Die automorphe Form  $f(z, w) \in \{G; \alpha, \beta, v\}$  gestatte eine FOURIER-Entwicklung von der in Satz 6 angegebenen Art. Wird  $h = \left\lfloor \frac{\alpha - \beta}{2} \right\rfloor$  gesetzt, so stellt

$$y^{\beta+h} \Lambda^h f(z, w)$$

eine automorphe Wellenform zur Gruppe  $G$ , Dimension  $2h + \beta - \alpha$ , Wellenzahl  $\beta + h$  und zum Multiplikatorsystem  $v$  dar. Es gilt

$$(78) \quad y^{\beta+h} \Lambda^h f(z, w) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(\alpha-h)} a_0 u(y, \alpha + \beta) y^{\beta+h} + \\ + \left\{ \left( \sum_{v=0}^{h-1} (-1)^{h-v} \frac{\Gamma(x) \Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\alpha-v) \Gamma(\beta+v+1)} \right) a_0 + (-1)^h \frac{\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\beta)} b_0 \right\} y^{\beta+h} + g(z, w),$$

wobei

$$\begin{aligned} 1. \text{ für } \alpha - \beta \equiv 0 \pmod{2}: g(z, w) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{Q}{2\pi} \right)^{\beta+h-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta+2h)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n+\kappa > 0} |n + \kappa|^{\frac{1}{2}-\beta-h} a_{n+\kappa} \times \\ \times y^{\frac{1}{2}} K_{\beta+h-\frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n+\kappa|}{Q} y \right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{Q}{2\pi} \right)^{\beta+h-\frac{1}{2}} \sum_{n+\kappa < 0} |n + \kappa|^{\frac{1}{2}-\beta-h} a_{n+\kappa} \times \\ \times y^{\frac{1}{2}} K_{\beta+h-\frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n+\kappa|}{Q} y \right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x}, \\ 2. \text{ für } \alpha - \beta \equiv 1 \pmod{2}: g(z, w) = \\ = \left( \frac{Q}{2\pi} \right)^{\beta+h-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta+h) \Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-h)} \sum_{n+\kappa > 0} |n + \kappa|^{\frac{1}{2}-\beta-h} a_{n+\kappa} \times \\ \times y^{\frac{1}{2}} \left( K_{\beta+h+\frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n+\kappa|}{Q} y \right) + K_{\beta+h-\frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n+\kappa|}{Q} y \right) \right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \\ + \left( \frac{Q}{2\pi} \right)^{\beta+h-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta+h)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha-h)} \sum_{n+\kappa < 0} |n + \kappa|^{\frac{1}{2}-\beta-h} a_{n+\kappa} \times \\ \times y^{\frac{1}{2}} \left( K_{\beta+h+\frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n+\kappa|}{Q} y \right) - K_{\beta+h-\frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n+\kappa|}{Q} y \right) \right) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)}{Q} x} \end{aligned}$$

#### § 4. Automorphe Formen und DIRICHLET-Reihen.

Auf Grund der bekannten Potenzreihenentwicklungen der WHITTAKERSchen Funktion [s.<sup>5)</sup>, S. 116] ist leicht festzustellen, daß

$$(79) \quad W(y; \alpha, \beta, 1) = O(y^{-K}) \quad \text{für reelles } y \rightarrow 0$$

und gewisse Konstanten  $K$  gilt. Es reicht z. B.,  $K > \Re \frac{\alpha + \beta}{2} + \left| \Re \frac{\alpha + \beta}{2} \right| - 1$  zu wählen. Nach (55) ist außerdem

$$(80) \quad W(y; \alpha, \beta, 1) = O(y^{-\beta} e^{-\nu}) \quad \text{für reelles } y \rightarrow \infty.$$

Die MELLIN-Transformierte von  $W(y; \alpha, \beta, 1)$ :

$$(81) \quad \Gamma(s; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} W(y; \alpha, \beta, 1) y^{s-1} dy$$

ist also in der Halbebene  $\Re s > K$  regulär. Mit Hilfe der Darstellung (68) ergibt sich

$$\Gamma(s; \alpha, \beta) = 2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta)} \int_1^{\infty} (u-1)^{\beta-1} (u+1)^{\alpha-1} u^{-s} du.$$

Die Substitution  $u = (1+v)(1-v)^{-1}$  führt auf

$$\Gamma(s; \alpha, \beta) = 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{s-\alpha-\beta} (1+v)^{-s} dv.$$

Damit ist ein Zusammenhang mit der hypergeometrischen Funktion

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 v^{b-1} (1-v)^{c-b-1} (1-vz)^{-a} dv$$

hergestellt. Es folgt nun

$$\Gamma(s; \alpha, \beta) = 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1-\alpha)} \frac{\Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F(s, \beta; s+1-\alpha; -1).$$

Beachten wir noch

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F\left(b, c-a; c; \frac{z}{z-1}\right),$$

so ergibt sich schließlich

$$(82) \quad \Gamma(s; \alpha, \beta) = 2^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1-\alpha)} \frac{\Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F\left(\beta, 1-\alpha; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right),$$

woraus erhellt, daß  $\Gamma(s; \alpha, \beta)$  eine meromorphe Funktion von  $s$  ist, die nur in den Stellen  $\alpha + \beta - n$  und  $1 - n$  ( $n$  = natürliche Zahl) Pole haben kann.

Wir betrachten die Sonderfälle, die den speziellen Formenscharen in § 3 entsprechen. Aus (82) folgt unmittelbar

$$(83) \quad \Gamma(s; \alpha, 0) = 2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(s).$$

Im Falle  $\beta = \alpha$  liefert (82) mit

$$F\left(a, 1-a; c; \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{1-c} \sqrt{\pi} \Gamma(c)}{\Gamma\left(\frac{c+a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{c+1-a}{2}\right)}$$

zunächst

$$\Gamma(s; \alpha, \alpha) = 2^{s-\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+1-2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}+1-\alpha\right)}.$$

Die LEGENDRESche Relation

$$\Gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ergibt dann

$$(84) \quad \Gamma(s; \alpha, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{s-\alpha-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \alpha\right).$$

Eliminiert man aus (72) mit Hilfe von (71) die BESSEL-Funktionen, so erhält man die Relation

$$W(y; 1 + \beta, \beta, \varepsilon) = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2} \Gamma\left(\beta + \frac{1-\varepsilon}{2}\right)} (y W(y; \beta + 1, \beta + 1, 1) + \varepsilon W(y; \beta, \beta, 1))$$

und damit

$$\int_0^\infty W(y; 1 + \beta, \beta, \varepsilon) y^{s-1} dy = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2} \Gamma\left(\beta + \frac{1-\varepsilon}{2}\right)} (\Gamma(s+1; \beta+1, \beta+1) + \varepsilon \Gamma(s; \beta, \beta)).$$

Für die Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung sind die Darstellungen (84) einzutragen. Entsprechend den Werten  $\varepsilon = \pm 1$  resultiert

$$(85) \quad \Gamma(s; \beta+1, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{s-\beta-1} \left( \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \beta\right) + \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \beta\right) \right),$$

$$(86) \quad \Gamma(s; \beta, \beta+1) = \frac{1}{\beta \sqrt{2\pi}} 2^{s-\beta-1} \left( \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \beta\right) - \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \beta\right) \right).$$

Im folgenden benötigen wir ein einfaches Prinzip, um die Identität zweier Funktionen aus  $\{\alpha, \beta\}$  festzustellen. Diesem Zweck dient

**Hilfssatz 9:** Eine Funktion  $g(x, y) \subset \{\alpha, \beta\}$  verschwindet genau dann identisch, wenn

$$g(0, y) = \left( \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

ist.

Beweis: Wir gehen mit dem Potenzreihenansatz

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) x^n$$

in die Differentialgleichung, der  $g(x, y)$  genügt, und erhalten für die Funktionen  $g_n(y)$  die Rekursionsformel

$$(n+2)(n+1)y g_{n+2} + (\beta - \alpha) i(n+1) g_{n+1} + y g_n'' + (\alpha + \beta) g_n' = 0,$$

aus der die Behauptung folgt.

Wir wenden uns nun dem Hauptproblem zu.

**Satz 8:** Es seien fest gegeben: zwei reelle oder komplexe Zahlen  $\alpha, \beta$ , eine reelle Zahl  $\lambda > 0$ , eine natürliche Zahl  $q$ , eine  $N$ -reihige quadratische Matrix  $(c_{\mu\nu})$ , deren Quadrat gleich der Einheitsmatrix ist und ganz rationale Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_N$ . Die Anordnung sei so gewählt, daß  $b_\mu = 0(q)$  für  $\mu \leq t$  und  $b_\mu \not\equiv 0(q)$  für  $\mu > t$  gilt. Schließlich werde vorausgesetzt, daß das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} b_\nu^{(t)} = b_0^{(\mu)}, \quad b_0^{(t)} = 0 \quad (1 \leq \mu \leq N, t < t \leq N)$$

nur trivial lösbar ist, falls  $\alpha = \beta = 0$  oder 1 und  $t > 0$  ist.

Wir betrachten nun Funktionensysteme

$$I \quad f_1(z, w), f_2(z, w), \dots, f_N(z, w),$$

die folgenden Bedingungen genügen:

$$1. \quad f_v(z, w) \subset \{\alpha, \beta\} \quad (1 \leq v \leq N).$$

2. Gleichmäßig in  $x$  ist

$$f_v(z, w) = O(y^{\kappa_1}) \text{ für } y \rightarrow \infty, f_v(z, w) = O(y^{-\kappa_2}) \text{ für } y \rightarrow 0 \quad (1 \leq v \leq N),$$

wobei  $\kappa_1, \kappa_2$  positive Konstanten bezeichnen.  $x, y$  sind hier reell anzunehmen, außerdem  $y > 0$ .

$$3. \quad f_v\left(z + \frac{\lambda}{q}, w + \frac{\lambda}{q}\right) = e^{\frac{2\pi i b_v}{q}} f_v(z, w) \quad (1 \leq v \leq N).$$

$$4. \quad f_\mu\left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{w}\right) = (-iz)^{\alpha} (iw)^{\beta} \sum_{v=1}^N c_{\mu v} f_v(z, w) \quad (1 \leq \mu \leq N).$$

Jedem Funktionensystem dieser Art läßt sich mit Hilfe der MELLIN-Transformation ein Funktionensystem

$$II \quad \varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_N(s); \psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_N(s)$$

mit folgenden Eigenschaften umkehrbar eindeutig zuordnen:

1. Die Funktionen  $\varphi_v(s), \psi_v(s)$  sind meromorph und lassen sich in gewissen Halbebenen in DIRICHLET-Reihen der Art

$$(87) \quad \varphi_v(s) = \sum_{\substack{n=b_v(q) \\ n>0}} \frac{a_n^{(v)}}{n^s}, \quad \psi_v(s) = \sum_{\substack{n=b_v(q) \\ n<0}} \frac{a_n^{(v)}}{|n|^s} \quad (1 \leq v \leq N)$$

entwickeln.

2. Wird

$$\begin{aligned} \xi_v(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \alpha, \beta) \varphi_v(s) + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \beta, \alpha) \psi_v(s), \\ \eta(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left( \Gamma(s+1; \alpha, \beta) - \frac{\alpha-\beta}{2} \Gamma(s; \alpha, \beta) \right) \varphi_v(s) \\ &\quad - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left( \Gamma(s+1; \beta, \alpha) - \frac{\beta-\alpha}{2} \Gamma(s; \beta, \alpha) \right) \psi_v(s) \end{aligned}$$

gesetzt, so sind

$$\begin{aligned} \xi_\mu(s) &= \frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} - \sum_{v=1}^N c_{\mu v} \frac{a_0^{(v)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} + \frac{b_0^{(\mu)}}{s} + \sum_{v=1}^N c_{\mu v} \frac{b_0^{(v)}}{(\alpha+\beta-s)} \\ \text{und} \\ \eta_\mu(s) &+ \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \left\{ \frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} - \sum_{v=1}^N c_{\mu v} \frac{a_0^{(v)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} - \frac{b_0^{(\mu)}}{s} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^N c_{\mu v} \frac{b_0^{(v)}}{(\alpha+\beta-s)} \right\} \end{aligned}$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten  $a_0^{(\mu)}$  und  $b_0^{(\mu)}$  ganze Funktionen von  $s$  von endlichem Geschlecht ( $1 \leq \mu \leq N$ ).

3. Die Konstanten  $a_0^{(\mu)}, b_0^{(\mu)}$  genügen den Bedingungen

$$a_0^{(\mu)} = b_0^{(\mu)} = 0 \quad (t < \mu \leq N).$$



4. Die Funktionen  $\varphi_\mu(s)$ ,  $\psi_\mu(s)$  genügen den Funktionalgleichungen

$$\xi_\mu(\alpha + \beta - s) = \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \xi_\nu(s), \quad \eta_\mu(\alpha + \beta - s) = - \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \eta_\nu(s) \quad (1 \leq \mu \leq N).$$

Beweis: Eine etwas längere aber elementare Rechnung zeigt, daß durch die Einschränkungen, die im Falle  $\alpha = \beta = 0$  oder 1 gemacht worden sind, gerade diejenigen Fälle ausgeschieden worden sind, in welchen die Konstanten  $a_0^{(\mu)}$ ,  $b_0^{(\mu)}$  durch die Forderungen II, 2. und 3. nicht mehr eindeutig bestimmt sind.

Wir gehen von einem Funktionensystem I aus. Den Bedingungen 1., 2. und 3. zufolge gibt es FOURIER-Entwicklungen der Art

$$f_\nu(z, w) = a_0^{(\nu)} u(y, \alpha + \beta) + b_0^{(\nu)} + \sum_{\substack{n=b_\nu(q) \\ n \neq 0}} a_n^{(\nu)} W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y; \alpha, \beta \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n}{\lambda} x}.$$

Da der Multiplikator von  $f_\nu(z, w)$  ( $\nu > t$ ) bezüglich der Translation  $x \rightarrow x + \frac{\lambda}{q}$  von 1 verschieden ist, so genügen die Koeffizienten  $a_n^{(\mu)}$ ,  $b_0^{(\mu)}$  jedenfalls den Bedingungen II, 3. Setzt man in der Koeffizientenformel

$$a_n^{(\nu)} W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f_\nu(z, w) e^{-\frac{2\pi i n}{\lambda} x} dx$$

speziell  $y = \frac{c}{|n|}$  ( $c$  geeignete positive Konstante), so erhält man wegen I, 2.:

$$a_n^{(\nu)} = O(|n|^{c_\nu}) \quad \text{für } |n| \rightarrow \infty.$$

Die mit den Koeffizienten  $a_n^{(\nu)}$  gebildeten DIRICHLET-Reihen (87) konvergieren also in gewissen Halbebenen und stellen dort analytische Funktionen dar.

Zur Abkürzung werde nun

$$(88) \quad F_\nu(y) = \sum_{\substack{n=b_\nu(q) \\ n \neq 0}} a_n W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right),$$

$$(89) \quad G_\nu(y) = \sum_{\substack{n=b_\nu(q) \\ n \neq 0}} n a_n y W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right),$$

$$(90) \quad H_\nu(y) = G_\nu(y) - \lambda \frac{\alpha - \beta}{4\pi} F_\nu(y),$$

$$(91) \quad F_\nu^*(y) = a_0^{(\nu)} u(y, \alpha + \beta) + b_0^{(\nu)} + F_\nu(y),$$

$$(92) \quad H_\nu^*(y) = G_\nu(y) - \lambda \frac{\alpha - \beta}{4\pi} F_\nu^*(y)$$

gesetzt. Nach Hilfssatz 9 ist das System der Transformationsformeln I, 4. gleichwertig mit den Gleichungen

$$f_\mu\left(\frac{i}{y}, -\frac{i}{y}\right) = y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} f_\nu(iy, -iy),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f_\mu\left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{w}\right) (-iz)^{-\alpha} (iw)^{-\beta}\right)_{x=0} = \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \left(\frac{\partial f_\nu(z, w)}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, kann hierfür

$$(93) \quad \begin{aligned} F_{\mu}^* \left( \frac{1}{y} \right) &= y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} F_{\nu}^*(y), \\ H_{\mu}^* \left( \frac{1}{y} \right) &= -y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} H_{\nu}^*(y) \end{aligned}$$

geschrieben werden oder, wenn man auf die ungesterten Funktionen zurückgeht,

$$(94) \quad \begin{aligned} F_{\mu} \left( \frac{1}{y} \right) &= y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} F_{\nu}(y) + \\ &+ y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} (a_0^{(\nu)} u(y, \alpha + \beta) + b_0^{(\nu)}) - a_0^{(\mu)} u \left( \frac{1}{y}, \alpha + \beta \right) - b_0^{(\mu)}, \\ H_{\mu} \left( \frac{1}{y} \right) &= -y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} H_{\nu}(y) + \\ &+ \lambda \frac{\alpha - \beta}{4\pi} \left\{ y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} (a_0^{(\nu)} u(y, \alpha + \beta) + b_0^{(\nu)}) + \right. \\ &\left. + a_0^{(\mu)} u \left( \frac{1}{y}, \alpha + \beta \right) + b_0^{(\mu)} \right\}. \end{aligned}$$

In bekannter Weise ist nun

$$(95) \quad \xi_{\mu}(s) = \int_0^{\infty} F_{\mu}(y) y^{s-1} dy = \int_1^{\infty} F_{\mu}(y) y^{s-1} dy + \int_1^{\infty} F_{\mu} \left( \frac{1}{y} \right) y^{-s-1} dy,$$

$$(96) \quad \eta_{\mu}(s) = \int_0^{\infty} H_{\mu}(y) y^{s-1} dy = \int_1^{\infty} H_{\mu}(y) y^{s-1} dy + \int_1^{\infty} H_{\mu} \left( \frac{1}{y} \right) y^{-s-1} dy$$

zu bilden. Berücksichtigt man hier die Transformationsformeln (94), so ergibt sich nach einigen elementaren Integrationen

$$(97) \quad \begin{aligned} \xi_{\mu}(s) &= \int_1^{\infty} F_{\mu}(y) y^{s-1} dy + \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \int_1^{\infty} F_{\nu}(y) y^{\alpha+\beta-s-1} dy + \\ &+ \frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} + \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \frac{a_0^{(\nu)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} - \frac{b_0^{(\mu)}}{s} - \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \frac{b_0^{(\nu)}}{(\alpha+\beta-s)}, \\ \eta_{\mu}(s) &= \int_1^{\infty} H_{\mu}(y) y^{s-1} dy - \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \int_1^{\infty} H_{\nu}(y) y^{\alpha+\beta-s-1} dy + \\ (98) \quad &+ \lambda \frac{\alpha - \beta}{4\pi} \left\{ -\frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} + \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \frac{a_0^{(\nu)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} + \right. \\ &\left. + \frac{b_0^{(\mu)}}{s} - \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \frac{b_0^{(\nu)}}{(\alpha+\beta-s)} \right\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (88), (89) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \xi_{\mu}(s) &= \sum_{\substack{n=b_{\mu}(q) \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n^{(\mu)} \int_0^{\infty} W \left( \frac{2\pi |n|}{\lambda} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n \right) y^{s-1} dy \\ &= \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^s \sum_{\substack{n=b_{\mu}(q) \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{a_n^{(\mu)}}{|n|^s} \int_0^{\infty} W(y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n) y^{s-1} dy \\ &= \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^s \Gamma(s; \alpha, \beta) \varphi_{\mu}(s) + \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^s \Gamma(s; \beta, \alpha) \psi_{\mu}(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \eta_\mu(s) &= \int_0^\infty G_\mu(y) y^{s-1} dy - \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \xi_\mu(s) \\
 &= \sum_{\substack{n=b_\mu(q) \\ n \neq 0}} n a_n \int_0^\infty y W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) y^{s-1} dy - \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \xi_\mu(s) \\
 &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \sum_{\substack{n=b_\mu(q) \\ n \neq 0}} \frac{n a_n}{|n|^{s+1}} \int_0^\infty y W(y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n) y^{s-1} dy - \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \xi_\mu(s) \\
 &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \Gamma(s+1; \alpha, \beta) \varphi_\mu(s) - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \Gamma(s+1; \beta, \alpha) \psi_\mu(s) - \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \xi_\mu(s) \\
 &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left( \Gamma(s+1; \alpha, \beta) - \frac{\alpha-\beta}{2} \Gamma(s; \alpha, \beta) \right) \varphi_\mu(s) - \\
 &\quad - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left( \Gamma(s+1; \beta, \alpha) - \frac{\beta-\alpha}{2} \Gamma(s; \beta, \alpha) \right) \psi_\mu(s).
 \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\xi_\mu(s)$ ,  $\eta_\mu(s)$  haben also die in II, 2. angegebene Bedeutung. Die Bedingungen II, 2. und 4. können nun auf Grund der Darstellungen (97), (98) unmittelbar geprüft werden. Satz 8 ist damit in einer Richtung bewiesen. Die Umkehrung ergibt sich in der üblichen Weise, wenn man von der zu (81) inversen Transformationsformel

$$(99) \quad W(y; \alpha, \beta, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} y^{-s} \Gamma(s; \alpha, \beta) ds$$

gehörigen Gebrauch macht.

Hinsichtlich der speziellen in § 3 behandelten Formentypen sei noch folgendes bemerkt:

1. Es mögen gewöhnliche automorphe Formen zugrunde liegen. In diesem von HECKE<sup>6)</sup> diskutierten Fall ist also  $\beta = 0$  und  $\psi_\nu(s) = 0$  für alle  $\nu$ . Folglich wird

$$\begin{aligned}
 \xi_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \alpha, 0) \varphi_\nu(s) = 2^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \varphi_\nu(s), \\
 \eta_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left( \Gamma(s+1; \alpha, 0) - \frac{\alpha}{2} \Gamma(s; \alpha, 0) \right) \varphi_\nu(s) \\
 &= 2^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left( s - \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma(s) \varphi_\nu(s).
 \end{aligned}
 \quad (100)$$

Die Funktionalgleichungssysteme II, 4. besagen also dasselbe.

2. Die Formen seien vom Typus der automorphen Wellenfunktionen. Dann ist  $\alpha = \beta$ , mithin

$$\begin{aligned}
 \xi_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \alpha, \alpha) (\varphi_\nu(s) + \psi_\nu(s)) \\
 &= \frac{2^{-\frac{s-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \alpha\right) (\varphi_\nu(s) + \psi_\nu(s)), \\
 \eta_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \Gamma(s+1; \alpha, \alpha) (\varphi_\nu(s) - \psi_\nu(s)) \\
 &= \frac{2^{-\frac{s-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1 - \alpha\right) (\varphi_\nu(s) - \psi_\nu(s)).
 \end{aligned}
 \quad (101)$$

Der Funktionalgleichungstypus ist also mit dem in <sup>7)</sup> angegebenen vergleichbar.

3. Sind die Formen vom Typus der automorphen Wellenformen zur Dimension  $-1$ , ist also  $\alpha = \beta + 1$  und  $\beta \neq 0$ , so ist eine etwas längere Umrechnung erforderlich, um zu einem Funktionalgleichungstypus zu gelangen, der mit dem in <sup>3)</sup> diskutierten vergleichbar ist. Wird

$$(102) \quad \begin{aligned} \xi_v^*(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \beta\right) (\beta \varphi_v(s) + \psi_v(s)), \\ \eta_v^*(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \beta\right) (\beta \varphi_v(s) - \psi_v(s)) \end{aligned}$$

gesetzt, so lassen sich mit Hilfe von (85) und (86) die Beziehungen

$$(103) \quad \begin{aligned} \eta_v(s) - \frac{\lambda}{2\pi} \left(s - \beta - \frac{1}{2}\right) \xi_v(s) &= \frac{2^{-\beta-2}}{\sqrt{2\pi}} (\eta_v^*(s) - \xi_v^*(s)), \\ \beta \frac{\lambda}{2\pi} \xi_v(s) &= \frac{2^{-\beta-2}}{\sqrt{2\pi}} (\eta_v^*(s) + \xi_v^*(s)) \end{aligned}$$

ableiten. Man erkennt nun ohne weiteres, daß die Funktionalgleichungen II, 4. mit dem System

$$(104) \quad \eta_\mu^*(2\beta + 1 - s) = \sum_{v=1}^N c_{\mu v} \xi_v^*(s) \quad (1 \leq v \leq N)$$

äquivalent sind.

### § 5. Die Theorie der $T_n$ -Operatoren.

Die Verallgemeinerung der HECKESchen Operatoretheorie auf die Formenscharen

$$\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta) = \{\mathbf{M}(Q); \alpha, \beta, 1\}$$

bietet keine besonderen Schwierigkeiten, so daß wir uns auf einige grundsätzliche Bemerkungen und eine kurze Skizzierung der wesentlichen Gedanken beschränken können. Das Interesse ist hier auf diejenigen Formenscharen  $\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$  gerichtet, die außer EISENSTEIN-Reihen noch sog. Spitzenformen enthalten. Das sind solche Formen, die in den parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereichs zur Gruppe  $\mathbf{M}(Q)$  verschwinden. Besteht nämlich  $\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$  nur aus EISENSTEIN-Reihen, so sind die den Formen entsprechenden DIRICHLET-Reihen mit  $L$ -Reihenprodukten der Art  $(t_1 t_2)^{-1} L(s, \chi_1) L(s - \alpha - \beta + 1, \chi_2)$  linear äquivalent. Die Frage nach den EULER-Produkten ist damit bereits beantwortet. Hinsichtlich der Existenz von Spitzenformen hat man nur lückenhafte Kenntnisse. Man weiß nur, daß die „analytischen Formenscharen“ [in  $\mathfrak{F}(Q, \alpha, 0)$  gelegen] im allgemeinen Spitzenformen enthalten und daß gewisse andere Scharen, auf die man von seiten der indefiniten quadratischen Formen geführt wird<sup>2)</sup>, sicher keine enthalten.

Damit Operatoren sinnvoll definiert werden können, muß  $k = \alpha - \beta$  ganz rational vorausgesetzt werden; es sei außerdem  $k \geq 0$  und  $\alpha + \beta > 2$ . Dann sind die EISENSTEIN-Reihen

$$(105) \quad E_k(z, w; \beta, (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_1 = a_1(Q) \\ (m_1, m_2) \neq (0, 0)}} (m_1 z + m_2)^{-z} (m_1 w + m_2)^{-\beta}$$

absolut konvergent und  $\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$  läßt sich in die von den EISENSTEIN-Reihen und den Spitzenformen erzeugten Teilscharen  $\mathfrak{E}(Q, \alpha, \beta)$  bzw.  $\mathfrak{S}(Q, \alpha, \beta)$  zerlegen:

$$(106) \quad \mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta) = \mathfrak{E}(Q, \alpha, \beta) + \mathfrak{S}(Q, \alpha, \beta).$$

Wir setzen  $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ , wobei  $n$  eine zu  $Q$  teilerfremde natürliche Zahl sei, und bezeichnen mit  $V_n$  ein volles System von Substitutionen  $n$ -ter Ordnung  $S \equiv S_n \pmod{Q}$ , die sich nicht um einen linken Faktor aus  $M = M(1)$  unterscheiden. Sodann wird  $T(n) = T_n$  durch

$$(107) \quad f|T_n = n^{\alpha+\beta-1} \sum_{S \in V_n} f|S \quad \text{für } f \in \mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$$

erklärt.  $f$  heißt eine Form zum Teiler  $t$ , wenn in der FOURIER-Entwicklung von  $f$  nur solche Exponenten vorkommen, die mit  $Q$  den größten gemeinsamen Teiler  $t$  haben:

$$(108) \quad f(z, w) = a'(0) y^{1-\alpha-\beta} + a''(0) + \sum_{\left(\frac{n}{Q}, \frac{t}{t}\right)=1} a(n) W\left(\frac{2\pi|n|t}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x}.$$

Für die lineare Schar dieser Formen wird ein Operator  $T_q^t$ , wobei sich  $q$  aus Primteilern von  $Q$  zusammensetzt, durch

$$(109) \quad f|T_q^t = q^{\alpha+\beta-1} \sum_{t \bmod Q} f\left|\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & q \end{pmatrix}\right. \quad (Q = t t_1)$$

erklärt. Es genügt  $(q, t_1) = 1$  anzunehmen, da  $T_q^t$  im Falle  $(q, t_1) > 1$  jede Form zum Teiler  $t$  in 0 überführt. Eine beliebige natürliche Zahl  $m$  kann eindeutig in  $m = nq$  zerlegt werden, wenn  $n$  den größten zu  $Q$  teilerfremden Faktor bezeichnet. Wir setzen dann

$$(110) \quad T_m^t = T_n T_q^t.$$

Die Substitutionen

$$(111) \quad R_a \in M \quad \text{mit} \quad R_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{Q}, \quad (a, Q) = 1$$

definieren eine endliche Gruppe von Operatoren für die Schar  $\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$ .

Ist

$$(112) \quad f|R_a = \chi(a) f \quad \text{für } (a, Q) = 1,$$

so heißt  $f$  eine Form zum Charakter  $\chi$ .  $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$  bestehe aus den Formen zum Teiler  $t$  und Charakter  $\chi$ . Wegen

$$(113) \quad \mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta) = \sum_{t, \chi} \mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$$

genügt es, die Teilscharen zum Teiler  $t$  und Charakter  $\chi$  zu betrachten; sie sind gegenüber den Operatoren  $T_m^t = T^t(m)$  invariant. Bezüglich  $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$  ist

$$(114) \quad T^t(m_1) T^t(m_2) = \sum_{\substack{d|m_1, m_2 \\ d>0}} T^t\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) \chi(d) d^{\alpha+\beta-1}.$$

Nun ist der Operator

$$(115) \quad \Theta = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} X \wedge^t$$

heranzuziehen, insbesondere also  $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$  vorauszusetzen. Nach Satz 5 führt  $\theta$  die Formenschar zum Teiler  $t$  in sich über. Auf Grund von Hilfssatz 3 und 4 ergibt sich leicht die Vertauschbarkeit von  $\theta$  mit  $R_s$  und  $T_m^t$ .  $\theta$  führt also auch die Formenschar zum Charakter  $\chi$  in sich über. Außerdem sind die Teilscharen  $\mathfrak{F}^+(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$  und  $\mathfrak{F}^-(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ , die sich aus den Eigenfunktionen  $\subset \mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$  bezüglich  $\theta$  zum Eigenwert  $+1$  bzw.  $-1$  zusammensetzen, invariant gegenüber den Operatoren  $T_m^t$ . Im folgenden bezeichnet  $\mathfrak{F}$  eine beliebige gegenüber den Operatoren  $T_m^t$  invariante Teilschar aus einer der Formenscharen

$$(116) \quad \mathfrak{F}^\pm = \mathfrak{F}^\pm(t, \chi, Q, \alpha, \beta).$$

Wir betrachten eine Form  $f \in \mathfrak{F}$  mit der FOURIER-Entwicklung (108). Kennzeichnend für  $\theta f = \pm f$  sind nach Satz 5 die Beziehungen

$$(117) \quad \begin{aligned} a(-n) &= \pm \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} a(n) \quad \text{für } n > 0, \\ a'(0) &= \pm a'(0), \quad a''(0) = \pm (-1)^k a''(0). \end{aligned}$$

Die der Form  $f$  zugeordneten DIRICHLET-Reihen (22) unterscheiden sich also wirklich nur um einen konstanten Faktor, so daß eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$(118) \quad f(z, w) \rightleftharpoons \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(n t)^s} \quad \text{für } f \in \mathfrak{F}$$

besteht. Das Produkt  $n t$  an Stelle von  $n$  entspricht der modifizierten Bezeichnung in (108). Die Summationsbeschränkung  $\left(n, \frac{Q}{t} = 1\right)$  können wir fallen lassen, wenn wir  $a(n) = 0$  für  $\left(n, \frac{Q}{t}\right) > 1$  setzen; das soll fortan geschehen.

Bezeichnen  $b'(0)$ ,  $b''(0)$ ,  $b(n)$  die Entwicklungskoeffizienten der Form  $f \mid T_m^t$ , so läßt sich mit Hilfe eines speziellen Repräsentantensystems  $V_n$

$$(119) \quad b(N) = \sum_{\substack{d \mid m, N \\ d > 0}} a\left(\frac{mN}{d^2}\right) \chi(d) d^{\alpha+\beta-1} \quad \text{für } m \geq 1, N \neq 0,$$

$$(120) \quad \begin{aligned} b'(0) &= a'(0) \chi(m) \sum_{\substack{d \mid m \\ d > 0}} \chi(d) d^{\alpha+\beta-1}, \\ b''(0) &= a''(0) \sum_{\substack{d \mid m \\ d > 0}} \chi(d) d^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

beweisen. Die Formen  $f^e$  ( $e = 1, 2, \dots, \kappa$ ) mit den Entwicklungen

$$(121) \quad f^e = a_1^e(0) y^{1-\alpha-\beta} + a_2^e(0) + \sum_{n \neq 0} a^e(n) W\left(\frac{2\pi|n|t}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x}$$

mögen eine Basis von  $\mathfrak{F}$  bilden. Da  $\mathfrak{F}$  bezüglich  $T_m^t$  invariant ist, bestehen Gleichungen

$$(122) \quad f^e \mid T_m^t = \sum_{\sigma=1}^{\kappa} \lambda_{e\sigma}(m) f^\sigma \quad (1 \leq e \leq \kappa)$$

mit gewissen Zahlkoeffizienten  $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ . Berechnen wir beiderseits die Entwicklungskoeffizienten, so ergeben sich die sog. Grundgleichungen

$$(123) \quad \sum_{\substack{d/m, N \\ d > 0}} a^{\varrho} \left( \frac{mN}{d^3} \right) \chi(d) d^{\alpha + \beta - 1} = \sum_{\sigma=1}^N \lambda_{\varrho\sigma}(m) a^{\sigma}(N)$$

für  $N \neq 0$ ,  $m > 0$ ,  $\varrho = 1, 2, \dots, \kappa$ . Die Gleichungen gelten auch noch für  $m < 0$ , wenn wir

$$(124) \quad \lambda_{\varrho\sigma}(-m) = \pm \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \lambda_{\varrho\sigma}(m) \quad \text{für } m > 0$$

setzen, wobei das obere oder untere Zeichen gelten soll, je nachdem  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{F}^+$  oder  $\mathfrak{F}^-$  liegt. Das System (123) gestattet eine Auflösung nach den  $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ ; man erhält

$$(125) \quad \Lambda(m) = (\lambda_{\varrho\sigma}(m)) = \sum_{\nu=1}^N a^{\nu}(m) B^{\nu} \quad \text{für } m \neq 0$$

mit gewissen konstanten Matrizen  $B^{\nu}$ . Bei geeigneter Definition von  $\lambda'_{\varrho\sigma}(0)$  und  $\lambda''_{\varrho\sigma}(0)$  stellen

$$(126) \quad f_{\varrho\sigma} = \lambda'_{\varrho\sigma}(0) y^{1-\alpha-\beta} + \lambda''_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{n \neq 0} \lambda_{\varrho\sigma}(n) W \left( \frac{2\pi |n| t}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n \right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x}$$

für  $1 \leq \varrho, \sigma \leq \kappa$  Formen dar, die mit den  $f^{\nu}$  linear äquivalent sind. Für die Matrizen  $\Lambda(m)$  gilt eine zu (114) analoge Multiplikationsregel. Man benutzt sie, um für die Funktionenmatrix

$$(127) \quad \Phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m) (m t)^{-s}$$

die EULERSche Produktentwicklung

$$(128) \quad \Phi(s) = t^{-s} \prod_p (\Lambda(1) - \Lambda(p) p^{-s} + \chi(p) p^{\alpha + \beta - 1 - 2s} \Lambda(1))^{-1}$$

abzuleiten.

Es bleibt noch das „Hauptachsentheorem“, die Frage nach der simultanen Transformation der  $\Lambda(n)$  auf Diagonalgestalt zu behandeln. Nach einer zu Beginn des Paragraphen gemachten Bemerkung kann man sich dabei auf die Schar der in  $\mathfrak{F}$  gelegenen Spitzenformen beschränken. Das entscheidende Hilfsmittel ist wieder das PETERSSONSche Metrisierungsprinzip. Wir erklären ein Skalarprodukt für zwei Spitzenformen  $f, g \in \{\mathbf{M}(Q); \alpha, \beta, v\}$  durch

$$(129) \quad (f, g) = \iint_{\mathfrak{B}} f \bar{g} y^{\alpha + \beta - 2} dx dy,$$

wobei  $\mathfrak{B}$  einen Fundamentalbereich zur Gruppe  $\mathbf{M}(Q)$  bezeichnet. Wieder gilt

$$(130) \quad (f | T_n, g) = \chi(n) (f, g | T_n),$$

wenn  $f$  und  $g$  Spitzenformen  $\in \{\mathbf{M}(Q); \alpha, \beta, 1\}$  zum Charakter  $\chi$  bezeichnen und  $(n, Q) = 1$  ist. Die weiteren Untersuchungen verlaufen nun völlig in den vorgezeichneten Bahnen.

(Eingegangen am 1. April 1952).

## Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II.

Von

WALTER THIMM in Bonn.

### § 1. Eliminationssätze.

1.1. Es werden dieselben Bezeichnungen wie im Teil I dieser Arbeit [Math. Ann. 125, 145—164 (1952)] Nr. 1.1., verwendet.

*Definition I.*  $t$  sei ein System von  $k$  komplexen Parametern.

$$(1) \quad (y)_n = A(x)_n$$

sei eine nicht ausgeartete lineare Transformation der Variablen  $(x)_n$ .

$$(2) \quad H(y_{s+1}/(y)_s, t) = 0$$

sei eine algebroide Gleichung für  $y_{s+1}$ .  $H$  sei ein Polynom von  $y_{s+1}$ , dessen Koeffizienten im Punkte  $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$  analytisch sind und dort verschwinden mit Ausnahme des höchsten Koeffizienten, der 1 ist.  $H$  sei im Punkte  $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$  irreduzibel.

$$(3) \quad y_{s+i} = \frac{G_i(y_{s+1}/(y)_s, t)}{H' y_{s+1}/(y)_s, t}, \quad i = 2, 3, \dots, n-s, \quad H' = \frac{\partial H}{\partial y_{s+1}}.$$

$G_i$  sei ein Polynom von  $y_{s+1}$  mit im Punkte  $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$  analytischen Koeffizienten.  $G_i$  sei überall dort 0, wo  $H$  und  $H'$  zugleich verschwinden.  $y_{s+i}$  sei auch in diesen Punkten stetig.

Die Formeln (1), (2), (3) sind die kanonische Darstellung einer im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $M^{(s)}(t)$ . Wir sagen:  $M^{(s)}(t)$  hängt „parametrisch“ von  $t$  ab. Die Zahl  $s$  heiße Dimension von  $M^{(s)}(t)$ .

Der Punkt  $\{(y')_s, t'\}$  heiße regulär für  $M^{(s)}(t)$ , wenn die Diskriminante von  $H$  in ihm nicht verschwindet. Durch die algebroide Gleichung (2) werden im regulären Punkte Zweige  $y_{s+1}^{(\lambda)}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, \Lambda$ , bestimmt. Setzen wir  $y_{s+1}^{(\lambda)}$  in die rechten Seiten der Formeln (3) ein, so erhalten wir Funktionen  $y_{s+i}^{(\lambda)}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-s$ , die zusammen mit  $y_{s+1}^{(\lambda)}$  eine Reihe zugeordneter Zweige im Sinne der Definition VIII, Teil I, bilden.

Ist  $F((x)_n, t)$  analytisch im Punkte  $\{O, t_0\}$ , so werde das Produkt:  $\prod_{\lambda=1}^{\Lambda}$   
 $F(y_1, y_2, \dots, y_s, y_{s+1}^{(\lambda)}, \dots, y_n^{(\lambda)}, t)$  als Norm von  $F$  bezüglich  $M^{(s)}(t)$  bezeichnet.

### 1.2. Satz 1.

$t$  sei ein einziger komplexer Parameter. Die Funktionen  $F_j((x)_n, t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , seien analytisch im Punkte  $\{O, t_0\}$ . Die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen:  $F_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , erfüllen in der Umgebung des Punktes  $\{O, t_0\}$  endlich viele im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeiten, die sich in zwei Gruppen einteilen lassen:

1. Die Mannigfaltigkeiten der Art A erfüllen identisch die Gleichung  $t = t_0$ .
2. Die Mannigfaltigkeiten der Art B hängen parametrisch von  $t$  ab.



Alle Lösungsmannigfaltigkeiten besitzen kanonische Darstellungen nach Definition I, und zwar ist bei den Mannigfaltigkeiten der Art A  $k = 0$  und bei den Mannigfaltigkeiten der Art B  $k = 1$  zu setzen.

*Beweis:* Der Beweis geschieht nach der Beweismethode für den 2. WEIERSTRASSschen Satz, vgl. OSGOOD, Lb., S. 132, also durch vollständige Induktion nach  $m$ , der Anzahl der Gleichungen  $F_j = 0$ . Man verwende zusätzlich nur die Schlußweise im Abschnitt 3.3. des Teiles I. Sie sorgt dafür, daß der Parameter  $t$  nicht in die lineare Transformation, die eventuell vor Anwendung des WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatzes erforderlich ist, einbezogen zu werden braucht und liefert die Mannigfaltigkeiten der Art A.

### 1.3. Satz 2.

$t$  bezeichne ein System von  $k$  komplexen Parametern.  $T$  sei ein Gebiet des Parameterraumes.  $U$  sei eine Umgebung des Punktes  $O$ . Die Funktionen  $F_j((x)_n, t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , seien analytisch im Gebiet  $\{U, T\}$ . Für den allgemeinen Punkt  $t_0$  aus  $T$  (Definition IV, Teil I) besteht folgendes Ergebnis:

Es gibt eine Umgebung  $U_0$  von  $O$ ,  $U_0 \subset U$ , und eine Umgebung  $T_0$  von  $t_0$ , derart, daß die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen  $F_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , im Gebiet  $\{U_0, T_0\}$  zu endlich vielen im Punkte  $\{0, t_0\}$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten gehören, die parametrisch von  $t$  abhängen und kanonische Darstellungen nach Definition I besitzen.

*Beweis:* Die Methode des Beweises ist dieselbe wie beim 2. WEIERSTRASSschen Satz. Während bei einem Parameter  $t$  die Anwendung des WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatzes durch Division der Funktionen durch eine Potenz von  $t$  ermöglicht wird, ist dies Verfahren bei mehreren Parametern nicht zu benutzen. Dafür verwende man die Schlußweise im Abschnitt 3.5. des Teiles I, die den Übergang zu einem Nachbarpunkte in  $T$  benutzt.

## § 2. Meromorphe Abbildungen.

2.1.  $\Delta_m$  sei eine  $m$ -dimensionale, im Punkte  $O$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeit des  $R_n$ . Die Funktion:

$$t = \Phi(x)_n = \frac{p(x)_n}{q(x)_n}$$

sei meromorph im Punkte  $O$  ( $p$  und  $q$  analytisch in  $O$ ).

Wenn  $p$  und  $q$  gleichzeitig auf  $\Delta_m$  identisch verschwinden, nennen wir  $\Phi(x)_n$  „vollständig unbestimmt auf  $\Delta_m$ “.

### 2.2. Hilfssatz 1.

$\Delta_m$  sei eine im Punkte  $O$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeit des  $R_n$ . Die Funktion  $t = \Phi(x)_n$  sei meromorph in  $O$ . Es gibt 3 Möglichkeiten für das Verhalten von  $t$  auf  $\Delta_m$ :

1. Die Funktionswerte von  $t$  auf  $\Delta_m$  genügen einer algebraischen Gleichung.
2. Wenn der Nenner  $q$  von  $\Phi$  auf  $\Delta_m$  identisch 0 ist, während der Zähler  $p$  von  $\Phi$  nicht identisch auf  $\Delta_m$  verschwindet, werde  $t \equiv \infty$  auf  $\Delta_m$  gesetzt.
3.  $t$  ist vollständig unbestimmt auf  $\Delta_m$ , vgl. 2.1.

*Beweis:* Die kanonische Darstellung von  $\Delta_m$  im Punkte  $O$  werde durch die Formeln (1), (2), (3) von Definition I gegeben (bei  $k = 0$  und  $s = m$ ). Die Norm der Funktion  $tq(x) - p(x)$  bezüglich  $\Delta_m$  ist ein Polynom von  $t$ , dessen Koeffizienten im Punkte  $(y)_m = (O)_m$  analytisch sind.

$$a_0(y)_m t^r + a_1(y)_m t^{r-1} + \dots + a_r(y)_m = P(t/(y)_m).$$

Die Funktionswerte von  $t$  auf  $\Delta_m$  genügen der Gleichung:

$$P(t/(y)_m) = 0.$$

Das Polynom  $P$  verschwindet nur im Falle 3 identisch.

### 2.3. Definition II.

$t$  bezeichne ein System von  $k$  komplexen Parametern.  $M^{(e)}(t)$  sei eine im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeit, die parametrisch von  $t$  abhängt, vgl. Definition I.  $w$  sei eine im Punkte  $O$  meromorphe Funktion, die auf  $M^{(e)}(t)$  nicht vollständig unbestimmt ist. Die Funktion  $w$  heiße „endlich mehrdeutig“ auf  $M^{(e)}(t)$  in den beiden folgenden Fällen:

1.  $w = \infty$  auf  $M^{(e)}(t)$ , vgl. Aussage 2 in Hilfssatz 1.

2.  $w$  genügt auf  $M^{(e)}(t)$  einer algebroiden Gleichung der Form:

$$P(w/t) = c_0(t) w^r + c_1(t) w^{r-1} + \dots + c_r(t) = 0, \quad r \geq 1,$$

wobei die Koeffizienten  $c_r(t)$  im Punkte  $t = t_0$  analytisch sind.

Ein spezieller Fall werde besonders hervorgehoben:

Die Funktion  $w$  heiße „eindeutig“ auf  $M^{(e)}(t)$ ,

1. wenn  $w = \infty$  auf  $M^{(e)}(t)$  ist,

2. wenn die Werte von  $w$  auf  $M^{(e)}(t)$  durch eine in  $t_0$  meromorphe Funktion

von  $t$ :  $w = \frac{a(t)}{b(t)}$  bestimmt werden.

### 2.4. Hilfssatz 2.

Die Funktion  $w$  sei meromorph im Punkte  $O$ .  $M^{(e)}(t)$  sei eine im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeit, die parametrisch von  $t$  abhängt, vgl. Definition I. Bei beliebiger Spezialisierung  $t = t'$  aus einer Umgebung von  $t_0$  gehe  $M^{(e)}(t)$  in eine Mannigfaltigkeit  $M^{(e)}(t')$  über, die im Punkte  $O$  irreduzibel ist.

Wenn  $w$  endlich mehrdeutig auf  $M^{(e)}(t)$  ist, so ist  $w$  sogar eindeutig auf  $M^{(e)}(t)$ , vgl. Definition II.

*Beweis:* Für  $w = \infty$  auf  $M^{(e)}(t)$  ist die Behauptung nach Definition II trivial.

Nun genüge  $w$  auf  $M^{(e)}(t)$  einer algebroiden Gleichung:  $P(w/t) = 0$ . Durch rationale Rechenoperationen werde aus dem Polynom  $P$  ein Polynom  $P_1$  berechnet, das in allen Lösungen der Gleichung  $P = 0$  verschwindet und dessen Diskriminante  $\neq 0$  ist. Es ist zu beweisen, daß der Grad von  $P_1$   $r = 1$  ist.  $t = t'$  sei eine Spezialisierung aus der Umgebung von  $t_0$ , derart, daß die Diskriminante von  $P_1$  in  $t'$  nicht verschwindet. Die Gleichung  $P_1 = 0$  liefert für  $w$  im Punkte  $t'$   $r$  verschiedene Werte:  $w_1, w_2, \dots, w_r$ . Nach Voraussetzung ist  $M^{(e)}(t')$  irreduzibel im Punkte  $O$ . Setzen wir in die Funktion  $w$  die Systeme zugeordneter Zweige eines regulären Punktes von  $M^{(e)}(t')$  ein, so entstehen Funktionen  $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(e)}$ , die in der Umgebung von  $O$  analytisch zusammenhängen. Ist daher z. B.  $w^{(1)} = \text{const}$ , so gilt für die übrigen Funktionen dasselbe mit der gleichen Konstanten. Daraus folgt  $r = 1$ .

### 2.5. Hilfssatz 3.

Die Funktion  $w = \frac{p(x)_n}{q(x)_n}$  sei meromorph in  $O$ .  $M^{(e)}(t)$  sei eine im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeit, die parametrisch von  $t$  abhängt, vgl. Definition I. Es gebe einen Punkt  $\{(\bar{y}), \bar{t}\}$ , der für  $M^{(e)}(t)$  regulär ist und folgende Eigenschaft hat:

$y_{s+i}^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-s$ , sei ein System zugeordneter Zweige von  $M^{(s)}(t)$  im Punkte  $\{(y)_s, \bar{t}\}$ . Setzen wir diese Zweige in die Funktion  $w$  ein, so entstehe eine Funktion  $w_1$ , die nur von  $t$  abhängt und im Punkte  $\bar{t}$  meromorph sei.

$$w_1 = \frac{p(y_1, y_2, \dots, y_s, y_{s+1}^{(1)}, \dots, y_n^{(1)})}{q(y_1, y_2, \dots, y_s, y_{s+1}^{(1)}, \dots, y_n^{(1)})} = \frac{\bar{p}_1(t)}{\bar{q}_1(t)}.$$

Dann ist  $w$  endlich mehrdeutig auf  $M^{(s)}(t)$ .

*Beweis:*  $w$  ist nicht vollständig unbestimmt und nicht  $\equiv \infty$  auf  $M^{(s)}(t)$ .  $w$  genügt daher auf  $M^{(s)}(t)$  einer algebraischen Gleichung:

$$(1) \quad w^r + \frac{a_1((y)_s, t)}{a_0((y)_s, t)} w^{r-1} + \dots + \frac{a_r((y)_s, t)}{a_0((y)_s, t)} = 0,$$

wobei die Funktionen  $a_r$  im Punkte  $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$  analytisch sind. Weil  $M^{(s)}(t)$  im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzibel ist, kann das System zugeordneter Zweige  $y_{s+i}^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-s$ , in jedes andere derartige System  $y_{s+i}^{(2)}$  durch analytische Fortsetzung in der Umgebung des Punktes  $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$  überführt werden. Bei dieser analytischen Fortsetzung geht  $w_1$  in Funktionen  $w_2$  über, die ebenso wie  $w_1$  nur von  $t$  abhängen. Die Norm von  $w$  bezüglich  $M^{(s)}(t)$  ist daher ein Polynom von  $w$ , dessen Koeffizienten in der Umgebung von  $\{(y)_s, \bar{t}\}$  unabhängig von  $(y)_s$  sind; d. h. die Funktionen  $\frac{a_r((y)_s, t)}{a_0((y)_s, t)}$  sind in der Umgebung dieses Punktes von  $(y)_s$  unabhängig. Daraus folgt, daß sie von  $(y)_s$  gar nicht abhängen können und z. B. mit  $\frac{a_r((O)_s, t)}{a_0((O)_s, t)}$  übereinstimmen. Daraus ergibt sich nach Definition II die Behauptung.

### 2.6. Definition III.

$\Delta_m$  sei eine im Punkte 0 irreduzible analytische Mannigfaltigkeit. Die  $k$  Funktionen:

$$(1) \quad t_i = \frac{p_i(x)_n}{q_i(x)_n}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ p_i(0) = q_i(0) = 0,$$

seien meromorph im Punkte 0.

Die Funktionen  $q_i(x)_n$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , sollen auf  $\Delta_m$  nicht identisch verschwinden. Es sei  $(x^1)$  ein regulärer Punkt von  $\Delta_m$ . In der Umgebung von  $(x^1)$  besitzt  $\Delta_m$  eine Darstellung durch analytische Funktionen:

$$x_r = \varphi_r(y)_m, \quad r = 1, \dots, n.$$

Setzen wir diese Darstellung in die Abbildungsfunktionen  $t_i$  ein, so entstehen meromorphe Funktionen von  $(y)_m$ . Der Rang der Funktionalmatrix:

$$\left( \frac{\partial t_\lambda}{\partial y_\mu} \right), \quad \lambda = 1, \dots, k, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten heiße Rang der meromorphen Abbildung (1) auf  $\Delta_m$ . Wenn der Rang kleiner als  $m$  ist, heiße diese Abbildung ausgeartet.

### § 3. Fasern einer meromorphen Abbildung für den allgemeinen Punkt des Bildraumes.

#### 3.1. Das Gleichungssystem $(G)_k$ .

$\Delta_m$  sei eine im Punkte  $O$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeit;  $\Delta_m$  werde durch die Gleichungen:

$$\varphi_\nu(x)_n = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, N,$$

bestimmt, deren linke Seiten analytisch im Punkte  $O$  seien.  $A_k$  sei die meromorphe Abbildung:

$$t_i = \frac{p_i(x)_n}{q_i(x)_n}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

von  $\Delta_m$ . Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen steht das Gleichungssystem:

$$(G)_k \quad \begin{aligned} \varphi_\nu(x)_n &= 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, N, \\ q_i(x)_n t_i - p_i(x)_n &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

#### 3.2.

$t_0$  sei ein Punkt des Parameterraumes. Eventuell werden in  $t_0$  die folgenden Aussagen richtig sein.

*Aussage I.* Die Lösungen des Gleichungssystems  $(G)_k$  in der Umgebung des Punktes  $\{O, t_0\}$  erfüllen endlich viele im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible analytische Mannigfaltigkeiten, die parametrisch von  $t$  abhängen und kanonische Darstellungen nach Definition I besitzen.

Wir bezeichnen die im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduziblen Lösungsmannigfaltigkeiten des Gleichungssystems  $(G)_k$  mit  $L_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$ . Hier sei  $\sigma$  die Dimension (Definition I) und  $\lambda$  ein laufender Index. Es werde vorausgesetzt, daß keine Mannigfaltigkeit  $L_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$  ganz zu einer höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(G)_k$  gehöre; daraus folgt ihre eindeutige Bestimmtheit.

*Aussage II.*  $L^{(\sigma)}(t)$  sei eine beliebige Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(G)_k$  im Punkte  $\{O, t_0\}$ . Ihre kanonische Darstellung werde durch die Formeln (1), (2), (3) in Definition I (mit  $s = \sigma$ ) gegeben. Dann sei  $O_s$  der Punkt  $(y)_s = (0)_s$ . Es gebe eine Umgebung  $T'$  von  $t_0$ , derart daß die Monodromiegruppen von  $L^{(\sigma)}(t)$  in allen Punkten  $\{O_s, t'\}$  isomorph sind, wenn  $t'$  aus  $T'$  ist. Die Monodromiegruppe von  $L^{(\sigma)}(t)$  im Punkt  $\{O_s, t'\}$  stimme mit der Monodromiegruppe von  $L^{(\sigma)}(t')$  im Punkte  $O_s$  überein.

Der Satz 9 des 1. Teiles und Satz 2 zeigen, daß die Aussagen I und II im allgemeinen Punkt des  $t$ -Raumes zutreffen.

#### 3.3. Klasseneinteilung der Lösungsmannigfaltigkeiten von $(G)_k$ .

In  $t_0$  gelte Aussage I. Die Lösungsmannigfaltigkeiten  $L_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$ , vgl. 3.2., werden in 3 Klassen eingeteilt:

*Klasse I.* Zur ersten Klasse sollen diejenigen  $L_{\lambda'}^{(\sigma)}(t)$  gehören, auf denen für einen Wert von  $i$  die beiden Funktionen  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  gleichzeitig identisch verschwinden.

*Klasse II.* Eine Mannigfaltigkeit  $L_{\lambda''}^{(\sigma)}(t)$  sei in Klasse II enthalten, wenn sie nicht bei jeder Spezialisierung  $t = t'$  (aus einer Umgebung von  $t_0$ ) in eine Mannigfaltigkeit  $L_{\lambda'''}^{(\sigma)}(t')$  übergeht, die den Punkt  $O$  enthält.

**Klasse III.** Die Mannigfaltigkeit  $L_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$  gehöre nicht zur Klasse I. Bei jeder Spezialisierung  $t = t'$  (aus einer Umgebung von  $t_0$ ) entstehe aus ihr eine Mannigfaltigkeit  $L_{\lambda}^{(\sigma)}(t')$ , die den Punkt  $O$  enthält. Dann sei sie Element der Klasse III.

Die Lösungsmannigfaltigkeiten der ersten beiden Klassen sind ohne Interesse für unsere weiteren Untersuchungen.

### 3.4. Definition IV.

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte 0 irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ . In  $t_0$  seien die Aussagen I und II (vgl. 3.2.) richtig. Jede im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible analytische Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $(G)_k$ , die keiner höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit dieses Systems angehört und in Klasse III liegt (3.3.), werde Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t_0$  genannt und mit  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$  bezeichnet. In diesem Symbol seien  $\sigma$  die Dimension (vgl. Definition I) und  $\lambda$  ein laufender Index.

Bei beliebiger Spezialisierung  $t = t'$  aus einer Umgebung von  $t_0$  geht die Fasermannigfaltigkeit  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$  in eine analytische Mannigfaltigkeit  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(t')$  über, die wegen der Aussage II im Punkte  $O$  irreduzibel ist.  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(t')$  heiße Faser der Abbildung  $A_k$  im Punkte  $t'$ .

### 3.5. Definition V.

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte 0 irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ . Der Punkt  $t'$  heiße regulär-für  $A_k$ , wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:

R 1. In  $t'$  gelte die Aussage I, 3.2.

R 2. In  $t'$  sei die Aussage II richtig.

Wegen R 1 und R 2 können nach Definition IV im Punkte  $t'$  Fasermannigfaltigkeiten  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(t)$  bestimmt werden. Den Punkten einer Umgebung von  $t'$  werden nach derselben Definition Fasern zugeordnet. Ist  $\bar{t}$  ein beliebiger Punkt dieser Umgebung, so soll jede Faser  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(\bar{t})$  folgende Eigenschaften haben:

R 3. Für keinen Wert von  $i, i = 1, 2, \dots, k$ , sollen  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  auf  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(\bar{t})$  gleichzeitig identisch verschwinden.

R 4.  $F_{\lambda}^{(\sigma)}(\bar{t})$  soll zu keiner höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit  $L^{(\tau)}(\bar{t})$ ,  $\tau \geq \sigma$ , des Gleichungssystems  $(G)_k$  gehören, in dem die Parameter  $t$  durch die Koordinaten des Punktes  $\bar{t}$  ersetzt sind.

R 5.  $F_{\lambda_1}^{(\sigma)}(\bar{t})$  und  $F_{\lambda_2}^{(\sigma)}(\bar{t})$  sollen verschieden sein, falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist.

R 6. Setzen wir in eine Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $(G)_k$ , die zum Punkte  $\{O, t'\}$  und zur Klasse II gehört,  $t = \bar{t}$  ein, so entstehe eine analytische Mannigfaltigkeit, die nicht den Punkt  $O$  enthält.

### 3.6. Teilergebnis 1.

Der allgemeine Punkt des Parameterraumes ist regulär für die Abbildung  $A_k$  von  $\Delta_m$ .

*Beweis:* Der Beweis ergibt sich aus den Eigenschaften der Fasermannigfaltigkeiten und der Lösungsmannigfaltigkeiten der Klasse II.

### 3.7. Teilergebnis 2.

Die Anzahl der Fasern der Abbildung  $A_k$  von  $\Delta_m$  ist für die Punkte einer Umgebung eines regulären Punktes konstant.

*Beweis:* Diese Anzahl ist nach der Definition IV und wegen R 5 gleich der Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes.

#### § 4. Fasern für die Punkte einer analytischen Ebene.

##### 4.1. Die Gleichungssysteme $(H)_k$ und $(H')_k$ .

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ .  $E$  sei eine analytische Ebene des Parameterraumes und besitze die Darstellung:

$$(E) \quad t_i = t'_i + \tau_i z, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$t'$  ist ein fester Punkt des  $t$ -Raumes; die Konstanten  $\tau_i$  legen die Lage der Ebene fest. Durch Einsetzen der Größen  $t_i$  in die linken Seiten der Gleichungen  $(G)_k$ , vgl. 3.1., entsteht das Gleichungssystem:

$$(H)_k \quad \begin{aligned} \varphi_v(x)_n &= 0, \quad v = 1, 2, \dots, N, \\ q_i(x)(t'_i + \tau_i z) - p_i(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Um auch den unendlich fernen Punkt der Ebene  $E$  mit zu erfassen, setzen wir  $z = 1/z^*$  in die Gleichungen  $(H)_k$  ein und erhalten nach Multiplikation mit  $z^*$  das Gleichungssystem:

$$(H')_k \quad \begin{aligned} \varphi_v(x)_n &= 0, \quad v = 1, 2, \dots, N, \\ q_i(x)(z^* t'_i + \tau_i) - z^* p_i(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

##### 4.2. Die Kreisebereiche $B_\lambda$ .

Ist  $z_0$  ein beliebiger endlicher Punkt der Ebene  $E$ , so gibt es nach Satz 1 einen Kreisebereich mit  $z_0$  als Mittelpunkt,  $B(z_0)$  und dazu eine Umgebung  $U_0$  des Punktes  $O$ , derart, daß die Lösungen des Systems  $(H)_k$  in  $\{U_0, B(z_0)\}$  zu analytischen Mannigfaltigkeiten gehören, deren Eigenschaften Satz 1 beschreibt. Auch dem unendlich fernen Punkt von  $E$  kann ein Kreisebereich  $B(\infty)$  zugeordnet werden, nur ziehe man das Gleichungssystem  $(H')_k$  zu seiner Bestimmung heran, indem man  $z^* = 0$  nehme. Aus dem HEINE-BORELSchen Überdeckungssatz ergibt sich:

*Teilergebnis 3.* Es gibt endlich viele Kreisebereiche  $B_\lambda$  (Mittelpunkt  $z_\lambda$ ),  $\lambda = 1, 2, \dots, A$ , welche folgende Eigenschaften haben:

1. Die Vereinigungsmenge der  $B_\lambda$  überdeckt die Ebene  $E$  einschließlich des unendlich fernen Punktes.

2. Die Lösungen des Gleichungssystems  $(H)_k$  (bzw.  $(H')_k$ ), die zum topologischen Produkt von  $B_\lambda$  mit einer geeigneten Umgebung des Punktes  $O$  gehören, liegen auf endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten der Arten  $A$  und  $B$ , die im Punkte  $\{O, z_\lambda\}$  irreduzibel sind und dort kanonische Darstellungen nach Definition I besitzen.

4.3. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf einen bestimmten Kreisebereich  $B_\lambda$  mit dem Mittelpunkt  $z_\lambda$ .  $B_\lambda$  kann auch den unendlichfernen Punkt der Ebene  $E$  zum Mittelpunkt haben; in diesem Falle ersetze man in den Formeln  $z$  durch  $z^*$  ( $= 1/z$ ) und  $z_\lambda$  durch  $z^* = 0$ . Während die zu  $B_\lambda$  gehörenden Lösungsmannigfaltigkeiten der Art  $A$  (vgl. 1.2.) nicht weiter interessieren, teilen wir diejenigen der Art  $B$  in 3 Klassen ein, deren Definition dieselbe wie im § 3 ist.

*Definition VI.*  $A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten  $\Delta_m$ .  $E$  sei eine analytische Ebene

des  $t$ -Raumes. Es sei  $M_\mu^{(\sigma)}(z)$  ( $\sigma$  Dimension,  $\mu$  laufender Index) eine zum Bereich  $B_\lambda$  gehörende Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $(H)_k$  (oder falls  $B_\lambda$  den unendlichfernen Punkt von  $E$  enthält, des Gleichungssystems  $(H')_k$ ).  $M_\mu^{(\sigma)}(z)$  besitze die folgenden Eigenschaften:

1.  $M_\mu^{(\sigma)}(z)$  sei im Punkte  $\{O, z_\lambda\}$  irreduzibel und hänge parametrisch von  $z$  ab (Definition I).
2.  $M_\mu^{(\sigma)}(z)$  gehöre keiner höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $(H)_k$  bzw.  $(H')_k$  an.
3. Für keinen Wert von  $i$  sollen  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  gleichzeitig  $\equiv 0$  auf  $M_\mu^{(\sigma)}(z)$  sein.
4. Ist  $z = z'$  eine beliebige Spezialisierung aus  $B_\lambda$ , so enthalte  $M_\mu^{(\sigma)}(z')$  den Punkt  $O$ .

Unter diesen Voraussetzungen heiße  $M_\mu^{(\sigma)}(z)$  eine zu  $B_\lambda$  gehörige Fasermannigfaltigkeit der Abbildung  $A_k$  von  $\Delta_m$  von der Dimension  $\sigma$ .

#### 4.4. Definition VII.

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ .  $E$  sei eine analytische Ebene des  $t$ -Raumes.  $z'$  sei ein beliebiger Punkt von  $E$ .  $z'$  liege im Bereich  $B_\lambda$ .  $M^{(\sigma)}(z)$  sei eine zum Bereich  $B_\lambda$  gehörige Fasermannigfaltigkeit (vgl. Definition VI). Obgleich  $M^{(\sigma)}(z)$  im Punkte  $\{O, z_\lambda\}$  irreduzibel ist, kann es im Punkte  $\{O, z'\}$  reduzibel sein. Es sei  $M_x^{(\sigma)}(z)$  eine im Punkte  $\{O, z'\}$  irreduzible ( $\sigma$ -dimensionale) Teilmannigfaltigkeit von  $M^{(\sigma)}(z)$ , welche bei beliebiger Spezialisierung  $z = \bar{z}$  aus der Umgebung von  $z'$  in eine Mannigfaltigkeit  $M_x^{(\sigma)}(\bar{z})$  übergeht, die den Punkt  $O$  enthält, also zur Klasse III gehört. Dann heiße  $M_x^{(\sigma)}(z)$  Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z'$ .

Weil jede zum Bereich  $B_\lambda$  gehörige Fasermannigfaltigkeit zur Klasse III gehört (Definition VI), liefert sie wenigstens eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z'$ . Es braucht aber nicht jede in  $\{O, z'\}$  irreduzible Teilmannigfaltigkeit von  $M^{(\sigma)}(z)$  zur Klasse III zu gehören.

#### 4.5. Zur Rechtfertigung der Definition VII diene folgendes Resultat:

*Teilergebnis 4.* Der Punkt  $z'$  gehöre zu den Bereichen  $B_{\lambda_1}$  und  $B_{\lambda_2}$ . Als Punkt von  $B_{\lambda_1}$  werde  $z'$  mit den Fasermannigfaltigkeiten  $M_x^{(\sigma)}(z)$  und als Punkt von  $B_{\lambda_2}$  mit den Fasermannigfaltigkeiten  $N_\beta^{(\sigma)}(z)$  versehen. Diese beiden Reihen stimmen überein.

*Beweis:*  $M_x^{(\sigma)}(z)$  sei Teilmannigfaltigkeit der zum Bereich  $B_{\lambda_1}$  gehörigen Fasermannigfaltigkeit  $M^{(\sigma)}(z)$ , Definition VII. Wenn z. B.  $B_{\lambda_1}$  derjenige Bereich ist, der den unendlichfernen Punkt von  $E$  enthält, wende man in den zu  $B_{\lambda_2}$  gehörigen Fasermannigfaltigkeiten vor Durchführung der folgenden Überlegungen die Transformation  $z^* = 1/z$  an.

Da  $M_x^{(\sigma)}(z)$  im Punkte  $\{O, z'\}$  irreduzibel ist und bei beliebiger Spezialisierung von  $z$  den Punkt  $O$  enthält, muß es ganz auf einer zum Bereich  $B_{\lambda_2}$  gehörigen Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $(H)_k$  liegen:  $L^{(\tau)}(z)$ . Die Dimension  $\tau$  dieser Mannigfaltigkeit kann nicht größer als  $\sigma$  sein, da andernfalls  $M_x^{(\sigma)}(z)$  und daher  $M^{(\sigma)}(z)$  zu einer zum Bereich  $B_{\lambda_1}$  gehörigen höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit von  $(H)_k$  (bzw.  $(H')_k$ ) gehören



würden, im Widerspruch zur Bedingung 2 in Definition VI. Es ist also  $\tau = \sigma$ . In Klasse I kann  $L^{(\sigma)}(z)$  deswegen nicht liegen, weil für keinen Wert von  $i$   $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  gleichzeitig auf  $M_x^{(\sigma)}(z)$  identisch verschwinden. Wenn  $L^{(\sigma)}(z)$  Element der Klasse II wäre, gäbe es nur endlich viele Punkte  $\bar{z}$  in  $B_{\lambda_1}$ , für welche  $L^{(\sigma)}(\bar{z})$  durch den Punkt  $O$  geht. Das ist unvereinbar mit der Tatsache, daß  $M_x^{(\sigma)}(z)$  bei jeder Spezialisierung von  $z$  in der Umgebung von  $z'$  den Punkt  $O$  enthält.  $L^{(\sigma)}(z)$  ist daher eine zum Bereich  $B_{\lambda_1}$  gehörige Fasermannigfaltigkeit. Zerlegen wir  $L^{(\sigma)}(z)$  in die im Punkte  $\{O, z'\}$  irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten, so fällt eine von diesen mit  $M_x^{(\sigma)}(z)$  zusammen. Jede Mannigfaltigkeit  $M_x^{(\sigma)}(z)$  ist daher in der Reihe  $N_{\beta}^{(\sigma)}(z)$  enthalten. Die Umkehrung wird genau so bewiesen.

#### 4.6. Definition der singulären Punkte von $E$ .

$M^{(\sigma)}(z)$  sei eine zum Bereich  $B_{\lambda}$  gehörige Fasermannigfaltigkeit, vgl. Definition VI. Aus den Ergebnissen des Teiles I (Satz 9, Folgerung 1. Nr. 5.9.) folgt: Es gibt im Bereich  $B_{\lambda}$  endlich viele Punkte:  $\zeta_{\varrho}$ ,  $\varrho = 1, 2, \dots, P$ , derart, daß in der Punktmenge  $B_{\lambda}$ , die aus  $B_{\lambda}$  durch Herausnehmen der Punkte  $\zeta_{\varrho}$  entsteht, folgende Bedingung gilt: Die Mannigfaltigkeit  $M^{(\sigma)}(z)$  besitzt in allen Punkten  $\{O_{\sigma}, z'\}^1$  für  $z'$  aus  $B_{\lambda}$  isomorphe Monodromiegruppen. Die Monodromiegruppe von  $M^{(\sigma)}(z)$  im Punkte  $\{O_{\sigma}, z'\}$  ist isomorph zur Monodromiegruppe von  $M^{(\sigma)}(z')$  im Punkte  $O_{\sigma}$ . Die Punkte  $\zeta_{\varrho}$ ,  $\varrho = 1, 2, \dots, P$ , sollen singuläre Punkte von  $B_{\lambda}$  heißen. In derselben Weise definieren die übrigen Fasermannigfaltigkeiten von  $B_{\lambda}$  singuläre Punkte in  $B_{\lambda}$ .

In jedem Bereiche  $B_{\lambda}$  gibt es höchstens endlich viele singuläre Punkte. Jeden Punkt der Ebene  $E$ , der für einen Bereich  $B_{\lambda}$  singulär ist, nennen wir singulären Punkt von  $E$ . Die Ebene  $E$  enthält höchstens endlich viele singuläre Punkte.

#### 4.7. Analytische Fortsetzung der Fasermannigfaltigkeiten.

$z'$  sei ein nicht singulärer Punkt der Ebene  $E$ , der zum Bereich  $B_{\lambda}$  gehöre.  $M_x^{(\sigma)}(z)$  sei eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z'$ . Nach Definition VII ist  $M_x^{(\sigma)}(z)$  eine im Punkte  $\{O, z'\}$  irreduzible Teilmannigfaltigkeit einer zum Bereich  $B_{\lambda}$  gehörigen Fasermannigfaltigkeit  $M^{(\sigma)}(z)$ . Wegen der Isomorphie der Monodromiegruppen von  $M^{(\sigma)}(z)$  in den Punkten  $\{O_{\sigma}, \bar{z}\}^1$  für  $\bar{z}$  aus  $B_{\lambda}$  gibt es eine Umgebung von  $z': U(z')$ , derart, daß  $M_x^{(\sigma)}(z)$  in allen Punkten  $\{O_{\sigma}, \bar{z}\}$  für  $\bar{z}$  aus  $U(z')$  isomorphe also transitive Monodromiegruppen hat.  $M_x^{(\sigma)}(z)$  ist dann in den Punkten  $\{O, \bar{z}\}$ ,  $\bar{z} \in U(z')$ , irreduzibel.

Daraus folgt, daß  $M_x^{(\sigma)}(z)$  Fasermannigfaltigkeit aller Punkte von  $U(z')$  ist. Wir können daher jedem nicht singulären Punkt  $z'$  von  $B_{\lambda}$  eine Umgebung  $U(z')$  so zuordnen, daß die Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $z'$  gleichzeitig Fasermannigfaltigkeiten der Punkte von  $U(z')$  sind.

Die den nicht singulären Punkten  $z^1$  und  $z^2$  von  $E$  zugeordneten Umgebungen  $U(z^1)$  und  $U(z^2)$  sollen einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Die Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $z^1$  seien  $M_x^{(\sigma)}(z)$  und die des Punktes  $z^2$ :  $N_{\beta}^{(\sigma)}(z)$ . In den Punkten des Durchschnittes müssen diese Reihen übereinstimmen, wie Teilergebnis 4 beweist. Es gibt also eine Mannigfaltigkeit  $N_{\beta_1}^{(\sigma)}(z)$ ,

<sup>1)</sup> Zur Definition von  $O_{\sigma}$  vgl. Aussage II, 3.2.



die im Durchschnitt  $U(z^1) \cap U(z^2)$  mit  $M_x^{(o)}(z)$  identisch ist<sup>1)</sup>. Wir nennen  $N_{z^1}^{(o)}(z)$  die analytische Fortsetzung von  $M_x^{(o)}(z)$ . Man erkennt jetzt leicht, daß  $M_x^{(o)}(z)$  nach allen nicht singulären Punkten der Ebene  $E$  fortgesetzt werden kann. Setzen wir  $M_x^{(o)}(z)$  auf verschiedenen, die singulären Punkte vermeidenden Wegen vom nichtsingulären Punkte  $z^1$  zum nichtsingulären Punkte  $z^2$  analytisch fort, so können wir zu verschiedenen Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $z^2$  gelangen.

Weil die analytische Fortsetzung auf einem bestimmten, keine singulären Punkte enthaltenden Wege zwischen  $z^1$  und  $z^2$  eindeutig ist, folgt:

**Teilergebnis 5.** Die Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten der meromorphen Abbildung  $A_k$  von  $\Delta_m$  ist in allen nichtsingulären Punkten der Ebene  $E$  gleich groß.

### § 5. Fasergesamtheit der meromorphen Abbildung $A_k$ von $\Delta_m$ .

#### 5.1. Teilergebnis 6.

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ .  $t_0$  sei ein regulärer Punkt von  $A_k$ , Definition V. Die analytische Ebene  $E$  gehe durch den Punkt  $t_0$  und besitze die Parameterdarstellung:

$$(E) \quad t_i = t'_i + z \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Insbesondere sei:

$$t'_i = t'_i + z_0 \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

a) Aus einer Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t_0$ , vgl. Definition IV, entsteht durch Einsetzen der Parameterdarstellung  $(E)$  eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z_0$ , vgl. Definition VII.

b) Jede Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z_0$  kann durch Einsetzen der Parameterdarstellung  $(E)$  aus einer Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t_0$  erhalten werden.

**Beweis:** 1.  $F^{(o)}(t)$  sei eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t_0$ . Durch Einsetzen der Parameterdarstellung  $(E)$  entsteht aus ihr eine Lösungsmannigfaltigkeit  $M^{(o)}(z)$  des Gleichungssystems  $(H)_k$ , vgl. 4.1.  $M^{(o)}(z)$  ist im Punkte  $\{O, z_0\}$  irreduzibel, da andernfalls die aus ihr durch Spezialisierung  $z = z_0$  gewonnene Mannigfaltigkeit:  $M^{(o)}(z_0) = F^{(o)}(t_0)$  im Punkte  $O$  reduzibel wäre. Das ist ein Widerspruch zur Eigenschaft R 2 des regulären Punktes  $t_0$ , Definition V.  $M^{(o)}(z)$  liegt auf keiner höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(H)_k$ . Andernfalls müßte auch  $M^{(o)}(z_0)$ , also  $F^{(o)}(t_0)$  einer höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $(G)_k$  (vgl. 3.1.), in das  $t = t_0$  eingesetzt ist, angehören. Das widerspricht der Eigenschaft R 4 des regulären Punktes  $t_0$ .  $M^{(o)}(z)$  gehört nicht zur Klasse I (vgl. 3.3.), da für keinen Wert von  $i$   $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  auf  $F^{(o)}(t_0)$  gleichzeitig identisch verschwinden, vgl. Eigenschaft R 3 von  $t_0$ .  $M^{(o)}(z)$  liegt nicht in der Klasse II, da  $F^{(o)}(t)$  bei jeder Spezialisierung von  $t$  den Punkt  $O$  enthält, also auch bei den Spezialisierungen  $(E)$ .  $M^{(o)}(z)$  liegt also in Klasse III und ist nach Definition VII eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z_0$ .

2.  $M^{(o)}(z)$  sei eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z_0$ , vgl. Definition VII. Da  $M^{(o)}(z)$  im Punkte  $\{O, z_0\}$  irreduzibel ist und dem Gleichungssystem  $(H)_k$

<sup>1)</sup> Dabei können ihre kanonischen Darstellungen ganz verschieden sein.

genügt, gibt es eine im Punkte  $\{O, t_0\}$  irreduzible Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(G)_k: L^{(\sigma)}(t)$ , die nach Einsetzen der Parameterdarstellung  $(E)$   $M^{(\sigma)}(z)$  ganz enthält. Ihre Dimension  $\tau$  muß  $\sigma$  sein, da  $M^{(\sigma)}(z)$  zu keiner höherdimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(H)_k$  gehört, vgl. die Definitionen VI und VII.  $L^{(\sigma)}(t)$  gehört nicht zur Klasse I, da für keinen Wert von  $i$   $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  auf  $M^{(\sigma)}(z)$  gleichzeitig identisch verschwinden. Bei der Spezialisierung  $t = t_0$  geht  $L^{(\sigma)}(t)$  in eine analytische Mannigfaltigkeit  $L^\sigma(t_0)$  über, die  $M^{(\sigma)}(z_0)$  enthält, also durch den Punkt  $O$  geht. Daher kann wegen der Eigenschaft R 6 des regulären Punktes  $t_0$   $L^\sigma(t)$  nicht zur Klasse II gehören. Es ist also  $L^{(\sigma)}(t)$  eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t_0$ . Damit ist das Teilergebnis 6 bewiesen.

### 5.2. Definition VIII.

Es sei  $A_k$  eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_n$ .  $t_0$  sei ein regulärer Punkt von  $A_k$ , vgl. Definition V. Vermöge der Definition IV werden dem Punkte  $t_0$  ( $\sigma$ -dimensionale) Fasermannigfaltigkeiten zugeordnet. Durch den Punkt  $t_0$  werde das Büschel von analytischen Ebenen gelegt:

$$(E) \quad t_i = t_i^0 + z \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Den Punkten jeder solchen Ebene werden ( $\sigma$ -dimensionale) Fasermannigfaltigkeiten gemäß der Definition VII zugeordnet. Teilergebnis 6 zeigt, daß in der Umgebung von  $t_0$  die Fasermannigfaltigkeiten der Punkte dieser Ebenen aus den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $t_0$  durch Einsetzen der Parameterdarstellung  $(E)$  gewonnen werden können. Die Vereinigungsmenge aller ( $\sigma$ -dimensionalen) Fasermannigfaltigkeiten werde „Fasergesamtheit  $\mathfrak{F}^{(\sigma)}(t)$ “ genannt.

$f(\sigma)$  sei die Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes  $t_0$ . Die Teilergebnisse 5 und 6 zeigen, daß  $f(\sigma)$  auch die Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten in den nicht singulären Punkten (Definition in 4.6.) jeder Ebene des Büschels  $(E)$  ist.  $f(\sigma)$  werde Faseranzahl der Fasergesamtheit  $\mathfrak{F}^{(\sigma)}(t)$  genannt. Die Abhängigkeit der Zahl  $f(\sigma)$  von der Dimension  $\sigma$  wird im § 7 untersucht.

## § 6. Funktionen auf der Fasergesamtheit.

### 6.1. Satz 3.

Die Funktion  $w = \frac{p(x)_n}{q(x)_n}$  sei im Punkte  $O$  meromorph.  $A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_n$ . Es sei  $E$  eine analytische Ebene des  $t$ -Raumes mit den folgenden Eigenschaften:  $z$  sei die Koordinate auf der Ebene  $E$ . Die Abbildung  $A_k$  besitze in den Punkten von  $E$  ( $\sigma$ -dimensionale) Fasermannigfaltigkeiten, deren Bestimmung nach Definition VII geschieht.

Es gebe einen Punkt  $z'$  auf  $E$ , derart, daß die Funktion  $w$  auf allen Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $z'$  endlich mehrdeutig (vgl. Definition II), jedoch nicht  $= \infty$  ist. Dann ist  $w$  auf der Ebene  $E$  eine algebraische Funktion von  $z$ .

*Beweis:* a) Wie in Nr. 4.2. erklärt wurde, wird die Ebene  $E$  einschließlich des unendlich fernen Punktes mit endlich vielen Kreisbereichen  $B_1$  überdeckt, für welche die Fasermannigfaltigkeiten nach Definition VI berechnet werden.

Der Punkt  $z'$  gehöre zum Bereich  $B_\lambda$ . Jede zu  $B_\lambda$  gehörige Fasermannigfaltigkeit  $M^{(\sigma)}(z)$  liefert wenigstens eine Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $z'$ , vgl. Nr. 4.4., die nach Definition VII eine im Punkte  $\{0, z'\}$  irreduzible ( $\sigma$ -dimensionale) Teilmannigfaltigkeit von  $M^{(\sigma)}(z)$  ist. Da die Funktion  $w$  auf dieser endlich mehrdeutig ist, erfüllt sie auf  $M^{(\sigma)}(z)$  die Voraussetzungen zu Hilfssatz 3, aus welchem folgt, daß  $w$  auch auf  $M^{(\sigma)}(z)$  endlich mehrdeutig ist. Die Funktion  $w$  ist also auf allen Fasermannigfaltigkeiten des Bereiches  $B_\lambda$  endlich mehrdeutig.

b) Wenn die Bereiche  $B_\lambda$  und  $B_{\lambda'}$  einen nichtleeren Durchschnitt haben, so ist die Funktion  $w$  auf allen Fasermannigfaltigkeiten der Punkte des Durchschnittes von  $B_\lambda$  und  $B_{\lambda'}$  endlich mehrdeutig, woraus durch Wiederholung des Schlusses in a) folgt, daß  $w$  auch auf den Fasermannigfaltigkeiten des Bereiches  $B_{\lambda'}$  endlich mehrdeutig ist. Schließen wir so von Bereich zu Bereich weiter, so erhalten wir das Ergebnis: Die Funktion  $w$  ist auf den Fasermannigfaltigkeiten sämtlicher Punkte der Ebene  $E$  endlich mehrdeutig.

c)  $\bar{z}$  sei ein nicht singulärer Punkt der Ebene  $E$ , vgl. Nr. 4.6. Dann entstehen aus einer Fasermannigfaltigkeit  $M^\sigma(z)$  des Punktes  $\bar{z}$  durch Spezialisierungen  $z = z_1$  aus einer Umgebung von  $\bar{z}$  Mannigfaltigkeiten  $M^\sigma(z_1)$ , die im Punkte  $O$  irreduzibel sind, vgl. Nr. 4.7. Jede Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $\bar{z}$  erfüllt die Voraussetzung des Hilfssatzes 2. Nach diesem Satz ist die Funktion  $w$  daher auf den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $\bar{z}$  sogar eindeutig, d. h., in der Umgebung von  $\bar{z}$  durch  $f(\sigma)$  im Punkte  $\bar{z}$  meromorphe Funktionen von  $z$  gegeben:  $w = w_r(z)$ ,  $r = 1, 2, \dots, f(\sigma)$ . Dabei sei  $f(\sigma)$  die Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten in den nichtsingulären Punkten der Ebene  $E$ . Nun können die Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $\bar{z}$  nach allen nichtsingulären Punkten von  $E$  analytisch fortgesetzt werden, vgl. Nr. 4.7. Hieraus folgt, daß die Funktionen  $w_r(z)$  sich nach allen nichtsingulären Punkten von  $E$  analytisch fortsetzen lassen. Entfernen wir aus  $E$  die singulären Punkte, so entstehe die Punktmenge  $E'$ . Die Funktionen  $w_r$  können in  $E'$  unbeschränkt analytisch fortgesetzt werden. Es sei  $\varphi = \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{f(\sigma)})$  eine ganz rationale symmetrische Funktion der  $w_r$ . Die Funktion  $\varphi$  ist eindeutig in  $E'$  und verhält sich in allen Punkten von  $E'$  meromorph.

d) Es sei  $\zeta$  ein singulärer Punkt von  $E$ , und  $S^{(\sigma)}(z)$  sei eine Fasermannigfaltigkeit von  $\zeta$ . Auf  $S^{(\sigma)}(z)$  genügt die Funktion  $w$  einer algebraischen Gleichung vgl. b):

$$P(w/z) = c_0(z)w^r + c_1(z)w^{r-1} + \dots + c_r(z) = 0,$$

wobei die Koeffizienten  $c_r(z)$  im Punkte  $\zeta$  analytisch sind. Wir dürfen überdies annehmen, daß die Diskriminante von  $P$  nicht identisch null sei, sonst verschaffen wir uns aus  $P$  durch rationale Rechenoperationen ein Polynom mit dieser Eigenschaft. Es sei  $\bar{z}$  ein nichtsingulärer Punkt in der Umgebung von  $\zeta$ , in dem die Diskriminante von  $P$  nicht verschwindet und in dem die Funktionen  $w_r(z)$  analytisch sind. Mindestens eine dieser Funktionen genügt der Gleichung  $P(w/z) = 0$ . Die übrigen genügen anderen Gleichungen derselben Art, die von den weiteren Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $\zeta$  herkommen. Aus diesen Gleichungen folgt, daß es für jede Funktion  $w_r$  eine Potenz  $(z - \zeta)^{r_v}$  gibt, derart, daß  $(z - \zeta)^{r_v} w_r(z)$  beschränkt bleibt, wenn  $z$  gegen  $\zeta$  strebt. Dann gibt es auch für die symmetrische Funktion  $\varphi$  eine Potenz  $(z - \zeta)^r$ , derart, daß  $(z - \zeta)^r \varphi$  beschränkt bleibt, wenn  $z$  gegen  $\zeta$  strebt. Die Funktion  $\varphi$  ist daher auch im Punkte  $\zeta$  meromorph. Da  $\zeta$  ein beliebiger singulärer Punkt

von  $E$  ist, ist  $\varphi$  auf der Ebene  $E$  eindeutig und in allen Punkten meromorph, also eine rationale Funktion von  $z$ . Daraus folgt die Behauptung, wenn wir für  $\varphi$  die elementarsymmetrischen Funktionen der  $w$ , wählen.

### 6.2. Hauptsatz I.

$t$  bezeichne das System der  $k$  Variablen  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Es sei  $A_k$  eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $A_m$ , vgl. Definition III. Es gebe einen Punkt  $t_0$ , der für die Abbildung  $A_k$  regulär ist, vgl. Definition V, und in dem die Anzahl  $f(\sigma)$  der  $\sigma$ -dimensionalen Fasermannigfaltigkeiten (Definition VIII)  $\geq 1$  ist. Die Funktion  $w$  sei im Punkte  $O$  meromorph und eindeutig auf den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $t_0$ , Definition II. Dann ist  $w$  eine algebraische Funktion der Variablen  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .

*Beweis:* a) Wir führen zunächst eine einschränkende Voraussetzung ein, von der wir uns später frei machen werden:

Auf keiner Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t_0$  gelte  $w \equiv \infty$ .

b) Nach der Voraussetzung des Hauptsatzes gibt es  $f(\sigma)$  im Punkte  $t_0$  meromorphe Funktionen:

$$(1) \quad w_r = \frac{g_r(t)}{h_r(t)}, \quad r = 1, 2, \dots, f(\sigma),$$

welche die Werte der Funktion  $w$  auf den  $f(\sigma)$  Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $t_0$  bestimmen. Es sei  $t'$  ein Punkt in der Umgebung von  $t_0$ , 1. der regulär für die Abbildung  $A_k$  sei, 2. in dem keine Funktion  $h_r(t)$  verschwindet,  $r = 1, 2, \dots, f(\sigma)$ .

c)  $q = q(w_1, w_2, \dots, w_{f(\sigma)})$  sei eine ganz rationale, symmetrische Funktion der  $w$ . Ersetzen wir in der Funktion  $q$  die Argumente durch die Funktionen (1), so entsteht eine Funktion  $q(t)$ , die im Punkte  $t'$  analytisch ist. Es sei  $U(t')$  eine Umgebung von  $t'$ , in der  $q(t)$  analytisch ist.

d) Mittels des Büschels analytischer Ebenen durch den Punkt  $t'$  werde eine Fasergesamtheit  $\mathfrak{F}^{(\sigma)}(t)$  aufgebaut, vgl. Definition VIII.  $E$  sei eine Ebene dieses Büschels, und

$$(E) \quad t_i = t'_i + \tau_i z, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

sei ihre Parameterdarstellung. Nach dem Teilergebnis 6 erhalten wir die Fasermannigfaltigkeiten  $M_x^{(\sigma)}(z)$  des Punktes  $z = 0$  durch Einsetzen von (E) in die Fasermannigfaltigkeiten  $F_x^{(\sigma)}(t)$  des Punktes  $t'$ . Die Werte der Funktion  $w$  auf  $M_x^{(\sigma)}(z)$  gewinnen wir entsprechend durch Einsetzen von (E) in die Funktion  $w_x(t)$ , welche die Werte von  $w$  auf  $F_x^{(\sigma)}(t)$  bestimmt. Da  $w_x(t)$  im Punkte  $t'$  analytisch ist, erhalten wir so eine im Punkte  $z = 0$  analytische Funktion von  $z$ :  $w_x(z)$ . Die Funktion  $w$  ist daher eindeutig auf den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $z = 0$ . Nach Satz 3 ist  $w$  eine algebraische Funktion von  $z$ . Die symmetrische Funktion  $q$  ist folglich rational in  $z$ .

e) In der folgenden Weise gelingt es, den Definitionsbereich der Funktion  $q(t)$ , der zunächst nur eine Umgebung des Punktes  $t'$  ist, auf den ganzen (endlichen)  $t$ -Raum auszudehnen: Es sei  $t_1$  irgendein Punkt des endlichen  $t$ -Raumes, verschieden von  $t'$ . Es gibt eine eindeutig bestimmte analytische Ebene, die  $t_1$  mit  $t'$  verbindet. Auf ihr ist  $q$  eine rationale Funktion von  $z$ , die im Punkte  $t_1$  einen bestimmten Wert besitzt, den wir als Funktionswert von  $q$  im Punkte  $t_1$  definieren. Wegen des Teilergebnisses 6 stimmt diese Definition in der Umgebung von  $t'$  mit der in c) gegebenen überein.

f) Um die Eigenschaften von  $\varphi(t)$  zu studieren, nehmen wir eine Koordinaten-(Cremona)-transformation des endlichen  $t$ -Raumes in den Raum mit den Koordinaten  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}, z$  vor, indem wir setzen:

$$(2) \quad \begin{aligned} t_i &= t'_i + \tau_i z, & i &= 1, 2, \dots, k-1, \\ t_k &= t'_k + z. \end{aligned}$$

Die Umkehrung dazu lautet:

$$(3) \quad \begin{aligned} z &= t_k - t'_k, \\ \tau_i &= \frac{t_i - t'_i}{t_k - t'_k}, & i &= 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante von (2) hat den Wert  $z^{k-1}$ ; in der Tat hört die eindeutige Umkehrbarkeit von (2) längs der Hyperebene  $z=0$  auf. In allen anderen Punkten des (endlichen)  $\{\tau, z\}$ -Raumes ist die Transformation eindeutig analytisch umkehrbar. Durch Einsetzen von (2) in die Funktion  $\varphi(t)$  erhalten wir eine Funktion  $\varphi'(\tau, z)$ . Der Raum mit den Koordinaten  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}$  heiße  $\tau$ -Raum.

g) Es sei  $\tau^0$  ein beliebiger Punkt des  $\tau$ -Raumes. Wir legen im  $\tau$ -Raum eine Umgebung von  $\tau^0$  durch Ungleichungen:

$$(4) \quad |\tau_i - \tau_i^0| < \Delta, \quad (\Delta > 0), \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

beliebig fest und bestimmen dazu eine Zahl  $\delta > 0$  so, daß die Punkte mit den Koordinaten (2) in der Umgebung  $U(\tau')$  liegen, (vgl. c), wenn die  $\tau_i$  durch die Ungleichungen (4) und  $z$  durch:

$$(5) \quad |z| < \delta, \quad (\delta > 0),$$

beschrnt werden. Da  $\varphi(t)$  in  $U(\tau')$  analytisch ist, ist die Funktion  $\varphi'(\tau, z)$  analytisch, wenn  $\tau$  der Umgebung (4) und  $z$  der Umgebung (5) angehören. Eine beliebige Spezialisierung  $\tau = \tau^0$  bedeutet, daß eine analytische Ebene durch den Punkt  $\tau'$  festgelegt wird. Aus d) folgt daher: Bei beliebiger Spezialisierung  $\tau = \tau^0$  geht  $\varphi'(\tau, z)$  in eine rationale Funktion von  $z$ :  $\varphi'(\tau^0, z)$  über. Die Funktion  $\varphi'(\tau, z)$  erfüllt die Voraussetzungen zum Satz 1, Osgood, Lb., Seite 282. Nach diesem Satz hat  $\varphi'$  die Form:

$$(6) \quad \varphi'(\tau, z) = \frac{g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots + g_r z^r}{h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots + h_r z^r},$$

wobei die Funktionen  $g_r$  und  $h_r$  Funktionen von  $\tau$  sind, die im Punkte  $\tau^0$  analytisch sind. Es ist  $h_0(\tau^0) \neq 0$ .

h) Die Darstellung (6) zeigt, daß  $\varphi'$  sich in allen Punkten des folgenden Gebietes meromorph verhält:

$z$  ist beliebig,  $\tau$  variiert in einer Umgebung von  $\tau^0$ . Da  $\tau^0$  ein beliebiger endlicher Punkt des  $\tau$ -Raumes ist, können wir feststellen:  $\varphi'$  ist in allen endlichen Punkten des  $\{\tau, z\}$ -Raumes meromorph. Jetzt werde die Koordinatentransformation (2) rückgängig gemacht.  $\varphi(t)$  ist in allen endlichen Punkten des  $t$ -Raumes meromorph, allerdings mit Ausnahme eventuell derjenigen Punkte, die  $z=0$  entsprechen, da in diesen die eindeutige Umkehrbarkeit von (2) aufhört.  $z=0$  bedeutet  $t_k = t'_k$ .

i) Nun ist in der Transformation (1) die Koordinate  $t_k$  ausgezeichnet. Setzen wir  $t_{k-1} = t'_{k-1} + z$ ,  $t_i = t'_i + z \tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-2, k$ , so lautet das

Ergebnis derselben Überlegung:  $\varphi(t)$  ist in allen endlichen Punkten des  $t$ -Raumes meromorph nur eventuell mit Ausnahme der Punkte auf der Hyperebene  $t_{k-1} = t'_{k-1}$ . Dann wird  $t_{k-2} = t'_{k-2} + z$  gesetzt usw. Durch Zusammenfassung aller Teilergebnisse kommt schließlich heraus:  $\varphi(t)$  ist in allen endlichen Punkten des  $t$ -Raumes meromorph, eventuell mit Ausnahme des einzigen Punktes  $t'$ ; aber in  $t'$  ist  $\varphi(t)$  sogar analytisch, vgl. c).

k) Um das Verhalten der Funktion  $\varphi(t)$  in den unendlich fernen Punkten des  $t$ -Raumes zu studieren, legen wir den Raum der Funktionentheorie zugrunde und nehmen eine lineare Koordinatentransformation etwa von  $j$  der  $k$  Koordinaten vor:

$$(7) \quad t_1^* = \frac{1}{t_1 - \alpha_1}, \quad t_2^* = \frac{1}{t_2 - \alpha_2}, \quad \dots, \quad t_j^* = \frac{1}{t_j - \alpha_j}, \quad t_{j+1}^* = t_{j+1}, \quad \dots, \quad t_k^* = t_k.$$

Dabei soll  $\alpha_i$  von  $t'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, j$ , verschieden und sonst beliebig sein. Der Punkt  $t'$  wird dann in einen endlichen Punkt  $t''$  des  $t^*$ -Raumes überführt. Die Abbildung  $A_k$  gehe durch die Transformation (7) in die Abbildung  $A_k^*$  über.  $A_k^*$  ist ebenfalls eine meromorphe Abbildung von  $\Delta_m$ . Aus dem Gleichungssystem  $(G)_k$  (vgl. 3.1.) entstehe durch Einsetzen von (7) das Gleichungssystem  $(G^*)_k$ . Der Punkt  $t''$  ist ein regulärer Punkt der Abbildung  $A_k^*$ , denn aus jeder Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(G)_k$  in  $t'$  entsteht durch Einsetzen von (7) eine solche des Systems  $(G^*)_k$  in  $t''$ . Die Klasseneinteilung der Lösungsmannigfaltigkeiten, vgl. 3.3., bleibt unverändert, so daß jede Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t'$  in eine solche des Punktes  $t''$  übergeht. Die Funktion  $w$  ist daher auf den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes  $t''$  eindeutig. Die Werte von  $w$  auf diesen Fasermannigfaltigkeiten entstehen aus den Funktionen  $w_v$  (vgl. b) durch Einsetzen der Transformation (7). Die symmetrische Funktion  $\varphi'(t^*)$  entsteht aus  $\varphi(t)$  auf dieselbe Weise. Da die Abbildung  $A_k^*$  die gleichen Voraussetzungen wie  $A_k$  erfüllt, folgt aus den bisherigen Ergebnissen, daß  $\varphi'(t^*)$  in allen endlichen Punkten des  $t^*$ -Raumes meromorph ist. Daher ist die Funktion  $\varphi(t)$  auch in allen jenen unendlich fernen Punkten des  $t$ -Raumes meromorph, die durch die Transformation (7) in endliche Punkte überführt werden. An die Stelle der Transformation (7) kann jede andere Transformation treten, die unendlich ferne Punkte des  $t$ -Raumes in das Endliche holt. Zusammenfassend stellen wir fest: Die Funktion  $\varphi(t)$  ist meromorph in allen Punkten des  $t$ -Raumes der Funktionentheorie. Der WEIERSTRASSsche Satz (OSGOOD, Lb., Seite 275) lehrt: Die Funktion  $\varphi(t)$  ist rational in  $t$ . Nehmen wir für  $\varphi$  die elementarsymmetrischen Funktionen der  $w_v$ , so ergibt sich: Die Funktion  $w$  genügt einer algebraischen Gleichung in  $t_1, t_2, \dots, t_k$  vom Grade  $f(\sigma)$ .

m) Eine besondere Untersuchung erfordert noch der bisher ausgeschlossene Fall, daß  $w$  auf einer Fasermannigfaltigkeit des Punktes  $t' \equiv \infty$  ist, vgl. a). Um diesen Fall zu erledigen, ist eine Abänderung des Begriffes der Fasermannigfaltigkeit erforderlich, die darin besteht, die in 3.3. gegebene Definition der Klasse I durch die folgende zu ersetzen:

*Klasse I'.* Zur ersten Klasse sollen diejenigen Lösungsmannigfaltigkeiten des Systems  $(G)_k$  im Punkte  $t_0$  gehören, auf denen für einen Wert von  $i$  die beiden Funktionen  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  gleichzeitig identisch verschwinden oder der Nenner  $q(x)$  der meromorphen Funktion  $w$  identisch null ist.

Der letzte Absatz ist auch bei der Definition des regulären Punktes, vgl. Definition V, und den Definitionen der Fasermannigfaltigkeiten, Definitionen

IV, VI, und VII zu berücksichtigen. Im übrigen bleiben die Schlüsse unverändert. Es kann eintreten, daß nunmehr die Faseranzahl  $f'(\sigma)$  null wird, obgleich  $f(\sigma) \geq 1$  war; das bedeutet  $w = \infty$  auf der ganzen Fasergesamtheit  $\mathfrak{F}^{(\sigma)}(t)$ . Dieser Fall ist ein Spezialfall der Gleichung  $w = \text{const.}$  Allgemein bedeutet  $f'(\sigma) < f(\sigma)$ , daß  $w$  auf einer Teilgesamtheit von  $\mathfrak{F}^{(\sigma)}(t) \equiv \infty$  ist, während auf einer anderen Teilgesamtheit zwischen  $w$  und  $t$  eine algebraische Relation besteht. Die Fasergesamtheit  $\mathfrak{F}^{(\sigma)}(t)$  ist dann reduzibel.  $f(\sigma) - f'(\sigma)$  Werte der algebraischen Funktion fallen in den Punkt  $\infty$ . In diesem Sinne aufgefaßt, gilt der Hauptsatz I allgemein.

## § 7. Über die Faseranzahl.

### 7.1. Satz 4.

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ .  $f(\sigma)$  sei die durch Definition VIII eingeführte Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten eines regulären Punktes von  $A_k$ .

Es gilt  $f(\sigma) = 0$  für  $\sigma \neq m - k$ .

Über  $f(m - k)$  kann im allgemeinen keine Aussage gemacht werden. Diese Zahl kann auch 0 sein.

*Beweis:* a) Der Beweis werde durch vollständige Induktion nach  $k$  bei festgehaltener Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$  geführt<sup>1)</sup>. Wir beweisen die folgende Behauptung:

*Satz 4a.* Die Lösungen des Gleichungssystems  $(G)_k$ , vgl. 3.1., im topologischen Produkt einer Umgebung des Punktes  $O$  und einer Umgebung des allgemeinen Punktes (Definition IV, Teil I)  $(t_0)_k$  liegen auf endlich vielen im Punkte  $\{O, (t_0)_k\}$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten  $L^{(\sigma)}(t)_k$ , die parametrisch von  $(t)_k$  abhängen und kanonische Darstellungen nach Definition I besitzen. Ihre Dimensionen  $\sigma$  sind  $\geq m - k$ . Für  $\sigma > m - k$  verschwinden wenigstens für einen Wert von  $i$  auf  $L^{(\sigma)}(t)_k$  gleichzeitig  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  identisch.

*Beweis:* b) Für  $k = 0$  ist Satz 4a richtig.

Satz 4a sei bewiesen, wenn die Dimension des  $t$ -Raumes  $\leq k$  ist.  $A_{k+1}$  entstehe aus  $A_k$  durch Hinzufügen der meromorphen Funktion:

$$t_{k+1} = \frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)}, \quad p_{k+1}(0) = q_{k+1}(0) = 0.$$

Diese Abbildungsfunktion ergibt die weitere Gleichung:

$$(1) \quad q_{k+1}(x) t_{k+1} - p_{k+1}(x) = 0,$$

die das Gleichungssystem  $(G)_k$  zum System  $(G)_{k+1}$  ergänzt. Ist  $L^{(\sigma)}(t)_k$  eine Lösungsmannigfaltigkeit von  $(G)_k$ , die zu einem allgemeinen Punkte  $(t')_k$  gehört (vgl. Satz 2), so liegen die zu  $L^{(\sigma)}(t)_k$  gehörenden Lösungen der Gleichung (1) im topologischen Produkt einer Umgebung von  $O$  und einer Umgebung des allgemeinen Punktes  $(t_0)_{k+1}$  auf endlich vielen, im Punkte  $\{O, (t_0)_{k+1}\}$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten  $L^{(\sigma)}(t)_{k+1}$ , die von dem Parametersystem  $(t)_{k+1}$  abhängen und kanonische Darstellungen nach Definition I besitzen. Falls die Gleichung (1) durch  $L^{(\sigma)}(t)_k$  identisch erfüllt wird, ist

<sup>1)</sup> Daher bezeichnen wir Punkte des  $t$ -Raumes jetzt durch  $(t)_k$ .



$L^{(\tau)}(t)_{k+1}$  mit  $L^{(\sigma)}(t)_k$  identisch. In diesem Falle ist  $\tau = \sigma$ ;  $p_{k+1}$  und  $q_{k+1}$  sind dann auf  $L^{(\sigma)}(t)_k$  gleichzeitig identisch null. Andernfalls gilt  $\tau = \sigma - 1$ , also wegen der Induktionsvoraussetzung  $\tau \geq m - k - 1$ . Es ist zu beweisen: Für  $\tau > m - k - 1$  sind wenigstens für einen Wert von  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k+1$ , die Funktionen  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  auf  $L^{(\tau)}(t)_{k+1}$  gleichzeitig identisch 0. Für  $\tau = \sigma$  haben wir das soeben festgestellt. Für  $\tau = \sigma - 1$ , also  $\sigma > m - k$ , folgt es aus der Induktionsvoraussetzung.

### 7.2. Beispiel.

Ein Beispiel für  $f(m-k) = 0$  ist das folgende:  $\Delta_m$  sei der  $(x)_3$ -Raum. Die Abbildung  $A_3$  sei:

$$t_1 = \frac{x_2}{x_1}, t_2 = \frac{x_1}{x_2}, t_3 = \frac{x_2 x_4}{x_3}.$$

Der Rang dieser Abbildung in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten ist 3. Das System  $(G)_3$  ist:

$$(G)_3: x_2 - x_1 t_1 = 0, x_1 - t_2 x_3 = 0, x_2 x_4 - x_3 t_3 = 0.$$

Die Lösungsmannigfaltigkeiten sind:

$$x_2 = x_1 t_1, x_3 = \frac{1}{t_2} x_1, x_4 = \frac{t_3}{t_1 t_2}$$

und:  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ .

In der Klasseneinteilung von 3.3. gehört die erste Mannigfaltigkeit zur Klasse II und die zweite zur Klasse I. Es ist  $f(m-k) = f(1) = 0$ .

### 7.3. Hilfssatz 4.

Es sei  $A_k$  eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ . Die Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten eines regulären Punktes von  $A_k$   $f(\sigma)$  sei  $\geq 1$  für  $\sigma = m - k$ .  $F^{(m-k)}(t)_k$  sei eine Fasermannigfaltigkeit des allgemeinen Punktes  $(t_0)_k$ , vgl. Definition IV. Es gibt auf  $\Delta_m$  in beliebiger Nähe von  $O$  Punkte  $(x^i)$ , deren Umgebung auf  $\Delta_m$  von  $F^{(m-k)}(t)_k$  überdeckt wird. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die kanonische Darstellung von  $F^{(m-k)}(t)_k$  werde durch die Formeln (1), (2), (3) in Definition I gegeben.  $\{(\bar{y})_{m-k}, (\bar{t})_k\}$  sei ein regulärer Punkt dieser Mannigfaltigkeit. In der Umgebung dieses Punktes wird  $F^{(m-k)}(t)_k$  durch Potenzreihenentwicklungen gegeben:

$$y_{m-k+i} = \psi_i(y_1, y_2, \dots, y_{m-k}, t_1, t_2, \dots, t_k), \quad i = 1, 2, \dots, n+k-m.$$

Dann ist die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(y_{m-k+1}, y_{m-k+2}, \dots, y_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)} \neq 0.$$

*Beweis:* a) Nach dem Satz 2 bei OSGOOD, Lb., Seite 157, kann die Behauptung des Satzes folgendermaßen formuliert werden:

Es gibt keine Funktion  $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , die in einem Punkte der Umgebung von  $(y)_m = (O)_m$  analytisch ist und die auf  $F^{(m-k)}(t)_k$  identisch verschwindet.

b) Der Satz werde durch vollständige Induktion nach  $k$  bei festgehaltener Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$  bewiesen. Für  $k = 0$  ist er richtig. Er sei für Dimensionen  $\leq k$  bewiesen.  $A_{k+1}$  sei eine meromorphe Abbildung von  $\Delta_m$  mit  $f(m-k-1) \geq 1$ . Durch die  $k$  ersten Abbildungsfunktionen von  $A_{k+1}$  werde die Abbildung



$A_k$  erzeugt. Aus  $f(m-k-1) \geq 1$  für  $A_{k+1}$  folgt  $f(m-k) \geq 1$  für  $A_k$ . Es gibt eine Fasermannigfaltigkeit  $F^{(m-k)}(t)_k$  der Abbildung  $A_k$  mit folgender Eigenschaft: Unter den Lösungsmannigfaltigkeiten der Gleichung:

$$(1) \quad q_{k+1}(x) t_{k+1} - p_{k+1}(x) = 0,$$

die auf  $F^{(m-k)}(t)_k$  liegen, befindet sich die Fasermannigfaltigkeit

$$F^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$$

der Abbildung  $A_{k+1}$ .

c) Um einen *indirekten* Beweis zu führen, machen wir die folgende Annahme: Es gebe einen Punkt  $\{(y^0)_m, (t^0)_{k+1}\}$ , der auf  $F^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$  liegt, derart, daß die Funktion  $Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$  in diesem Punkte analytisch ist und auf einer in diesem Punkte irreduziblen Teilmannigfaltigkeit  $\bar{F}^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$  von  $F^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$  identisch verschwindet. Wegen der Voraussetzung der vollständigen Induktion ist  $Q(y)_m \equiv 0$  auf  $F^{(m-k)}(t)_k$ . Ohne die Allgemeinheit des Beweises einzuschränken, dürfen wir annehmen, daß  $Q(y)_m$  auf  $\bar{F}^{(m-k)}(t^0)_k$  nicht identisch verschwindet. Die Lösungen der Gleichung  $Q(y)_m = 0$  auf  $\bar{F}^{(m-k)}(t)_k$  in der Umgebung von  $\{(y^0)_m, (t^0)_k\}$  erfüllen analytische Mannigfaltigkeiten  $G^{(m-k-1)}(t)_k$ , die von  $t_{k+1}$  unabhängig sind. Die Mannigfaltigkeit  $\bar{F}^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$  liegt ganz auf einem  $G^{(m-k-1)}(t)_k$ , da sie im Punkte:  $\{(y^0)_m, (t^0)_{k+1}\}$  irreduzibel ist, der Gleichung  $Q(y)_m = 0$  genügt und zu  $F^{(m-k)}(t)_k$  gehört. Es sei  $(t')_k$  eine Spezialisierung von  $(t)_k$  aus der Umgebung von  $(t^0)_k$ , für die  $\bar{F}^{(m-k-1)}((t')_k, t_{k+1})$  von  $t_{k+1}$  wirklich abhängt. Dann muß diese Mannigfaltigkeit für jeden Wert von  $t_{k+1}$  auf  $G^{(m-k-1)}(t')_k$  liegen, was der Abhängigkeit von  $t_{k+1}$  widerspricht. Da also die Mannigfaltigkeit  $F^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$  von  $t_{k+1}$  unabhängig ist und der Gleichung (1) genügt, verschwinden auf ihr  $p_{k+1}$  und  $q_{k+1}$  gleichzeitig identisch;  $F^{(m-k-1)}(t)_{k+1}$  wäre dann keine Fasermannigfaltigkeit.

#### 7.4. Hilfssatz 5.

$A_k$  sei eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit  $\Delta_m$ .  $A_k$  besitze auf  $\Delta_m$  den Rang  $k$ ; es sei  $k < m$ .  $w$  sei eine im Punkte  $O$  meromorphe Funktion, die auf  $\Delta_m$  nicht vollständig unbestimmt und nicht  $\equiv \infty$  ist. Vgl. Definition III.

Der Rang der erweiterten Funktionalmatrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_\lambda}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial w}{\partial x_\mu} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad \mu = 1, 2, \dots, n,$$

auf  $\Delta_m$  sei  $k$ .

( $x^1$ ) sei ein Punkt von  $\Delta_m$ , in dem:

1.  $\Delta_m$  regulär ist,
2. die Abbildungsfunktionen  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , und  $w$  analytisch sind,
3. der Rang der Funktionalmatrix  $\left(\frac{\partial t_\lambda}{\partial x_\mu}\right)$  auf  $\Delta_m$  gleich  $k$  ist.

Dann besteht in der Umgebung von ( $x^1$ ) eine Gleichung:  $w = g(t)_k$ , wobei  $g$  im Punkte:  $(t^1) = A_k(x^1)$  analytisch ist.

*Beweis:*

Der Satz ist ein Spezialfall des Satzes 2 bei OSGOOD, Lb., Seite 157.

## 7.5. Hauptsatz II.

Es sei  $A_k$   $t_i = \frac{p_i(x)_n}{q_i(x)_n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , eine meromorphe Abbildung der im Punkte  $O$  irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten  $\Delta_m$ .

$\Delta_m$  werde durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\varphi_v(x)_n = 0, \quad v = 1, 2, \dots, N.$$

Der Rang von  $A_k$  auf  $\Delta_m$  sei  $k < m$ , so daß die Abbildung  $A_k$  ausgeartet ist (Definition III). Es gebe einen Punkt  $t_0$ , derart, daß die analytischen Gleichungen:

$$(G)_k \quad \begin{aligned} \varphi_v(x)_n &= 0, & v &= 1, 2, \dots, N, \\ q_i(x) t_i - p_i(x) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

im Punkte  $\{O, t_0\}$  eine Lösungsmannigfaltigkeit  $F^{(m-k)}(t)_k$  besitzen, die parametrisch von  $(t)_k$  abhängt (Definition I) und die weiteren Bedingungen erfüllt:

1. Auf  $F^{(m-k)}(t)_k$  verschwinden für keinen Wert von  $i$  gleichzeitig  $p_i(x)$  und  $q_i(x)$  identisch.

2. Bei jeder Spezialisierung  $t = t'$  aus einer Umgebung von  $t_0$  enthalte  $F^{(m-k)}(t')$  den Punkt  $O$ .

$w$  sei eine im Punkte  $O$  meromorphe Funktion, die auf  $\Delta_m$  nicht vollständig unbestimmt und nicht  $\equiv \infty$  ist, vgl. 2.1. Der Rang der Funktionalmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_\lambda}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial w}{\partial x_\mu} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k; \mu = 1, 2, \dots, n,$$

auf  $\Delta_m$  sei  $k$ .

Dann besteht auf  $\Delta_m$  zwischen  $w$  und  $t_1, t_2, \dots, t_k$  eine algebraische Relation.

*Beweis:* Aus den Voraussetzungen über  $A_k$  folgt  $f(m-k) \geq 1$ .  $F^{(m-k)}(t)_k$  sei eine Fasermannigfaltigkeit eines regulären Punktes  $t_0$ , vgl. Definition IV. Aus Hilfssatz 4 folgt, daß es in der Umgebung von  $O$  Punkte auf  $\Delta_m$  gibt, deren Umgebung auf  $\Delta_m$  von  $F^{(m-k)}(t)_k$  überdeckt wird.  $F^{(m-k)}(t)_k$  überdeckt daher auch Umgebungen von Punkten auf  $\Delta_m$ , welche die Voraussetzungen zu Hilfssatz 5 erfüllen. Hilfssatz 5 lehrt, daß die meromorphe Funktion  $w$  eindeutig auf  $F^{(m-k)}(t)_k$  ist. Daher ist der Hauptsatz I anwendbar. Aus diesem Satze ergibt sich die Behauptung.

7.6. Die einschränkenden Voraussetzungen über die Abbildung  $A_k$  im Hauptsatz II können im allgemeinen nicht entbehrt werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

$\Delta_m$  sei der Raum  $R_3$ .  $A_2$  sei die Abbildung:

$$t_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad t_2 = \frac{x_1 + x_2 x_3}{x_3}.$$

Ihr Rang ist 2.  $w$  sei die meromorphe Funktion:

$$w = \frac{x_1 + x_2 e^{x_3}}{x_3}.$$

Der Rang der erweiterten Matrix  $\begin{bmatrix} \frac{\partial t_k}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial w}{\partial x_\mu} \end{bmatrix}$  auf  $R_3$  ist 2. Es besteht zwischen

$w$  und  $t_1, t_2$  die nicht algebraische Relation:

$$w = t_1 + e^{t_2 - t_1}.$$

$A_2$  erfüllt nicht die Voraussetzungen zum Hauptsatz. Die Lösungsmannigfaltigkeiten der Gleichungen:

$$(G)_2 \quad x_1 - t_1 x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 x_3 - t_2 x_2 = 0$$

sind:

$$L_1^{(1)}: \quad x_1 = t_1 x_2, \quad x_3 = t_2 - t_1 \quad \text{und} \quad L_2^{(1)}: \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Die erste Mannigfaltigkeit gehört zu Klasse II und die zweite zu Klasse I.

#### Literatur.

OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II, Teil 1. Leipzig-Berlin 1929.  
(Zitiert als: OSGOOD, Lb.)

SEIFERT-THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934.

VAN KAMPEN: On the fundamental group of an algebraic curve. Amer. J. Math. 55 (1933).

(Eingegangen am 22. Oktober 1951.)

## Self-Dual Primitives for Modal Logic.

By

ALAN ROSE in Nottingham.

It has been shown by CHURCH<sup>1)</sup> that the logical constants  $t$  and  $f$  together with the conditioned disjunction function  $[p, q, r]$  with the same truth-table as  $(p \cdot q) \vee (r \cdot \sim q)$  form a complete set of independent connectives for the 2-valued Propositional Calculus and that these connectives are self-dual, the dual of a formula being obtained by writing it backwards and interchanging the letters  $t$  and  $f$ . This theorem has been extended to the  $m$ -valued Propositional Calculus<sup>2)</sup> and to the Theory of implication<sup>3)</sup>. We shall consider here the corresponding problem for modal logic<sup>4)</sup>. We shall take as primitives the logical constants  $n$  and  $i$  denoting a necessary statement and an impossible statement respectively and the function  $[r, p, s, q, r]$  with the same meaning as

$$(p \cdot \sim \Diamond \sim r) \vee (((p \cdot s) \vee (q \cdot \sim s)) \cdot \Diamond r \cdot \Diamond \sim r) \vee (q \cdot \sim \Diamond r),$$

where  $\Diamond P$  means:  $P$  is possible.

We shall show that if to the axioms of LEWIS<sup>5)</sup> we add the axioms

$$(a) \quad \sim \Diamond i$$

$$(b) \quad \sim \Diamond \sim n$$

then in S 2 and all stronger calculi we can define LEWIS's primitives by

$$\sim P = \text{df. } [P, i, P, n, P]$$

$$\Diamond P = \text{df. } [P, n, a, i, P]$$

$$P \cdot Q = \text{df. } [P, Q, P, i, P].$$

In order to justify these definitions we shall give an outline of a proof that in S 2 and all stronger calculi the formulae

$$(A) \quad \sim p = (i \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (((i \cdot p) \vee (n \cdot \sim p)) \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee (n \cdot \sim \Diamond p)$$

$$(B) \quad \Diamond p = (n \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (((n \cdot n) \vee (i \cdot \sim n)) \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee (i \cdot \sim \Diamond p)$$

$$(C) \quad p \cdot q = (q \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (((q \cdot p) \vee (i \cdot \sim p)) \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee (i \cdot \sim \Diamond p)$$

are derivable.

From (a) and (b) we deduce

$$(1) \quad p \vee n = n$$

$$(2) \quad p \vee i = p$$

$$(3) \quad p \cdot n = p$$

$$(4) \quad p \cdot i = i.$$

<sup>1)</sup> CHURCH, ALONZO: *Portugal Math.* 7, 87 (1948).

<sup>2)</sup> ROSE, ALAN: *Math. Ann.* 123, 76 (1951).

<sup>3)</sup> ROSE, ALAN: *J. Symbol Log.* (forthcoming).

<sup>4)</sup> LEWIS, C. I., and C. H. LANGFORD: *Symbolic Logic*, New York and London 1932.

<sup>5)</sup> *Op. cit.* p. 500.

Further in S 2 we can prove

$$(5) \quad \sim p \vee \sim \Diamond p = \sim p$$

$$(6) \quad p \cdot \Diamond p = p$$

$$(7) \quad \sim \Diamond \sim p \vee \Diamond p = \Diamond \sim p$$

$$(8) \quad \sim \Diamond \sim p \vee p = p.$$

In carrying out deductions we shall make use of these formulae and also of the fact that if  $P \leftrightarrow Q$  is a theorem of the 2-valued Propositional Calculus then  $P = Q$  is a theorem of S 2.

$$\begin{aligned} (A) \quad & (i \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (((i \cdot p) \vee (n \cdot \sim p)) \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee (n \cdot \sim \Diamond p) \\ & = (\sim p \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee \sim \Diamond p \text{ (by (2), (3), (4))} \\ & = (\sim p \cdot \Diamond \sim p) \vee \sim \Diamond p \\ & = \sim p \vee \sim \Diamond p \text{ (by (6))} \\ & = \sim p \text{ (by (5))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B) \quad & (n \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (((n \cdot n) \vee (i \cdot \sim n)) \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee (i \cdot \sim \Diamond p) \\ & = \sim \Diamond \sim p \vee (\Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \text{ (by (1), (2), (3), (4))} \\ & = \sim \Diamond \sim p \vee \Diamond p \\ & = \Diamond p \text{ (by (7))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C) \quad & (q \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (((q \cdot p) \vee (i \cdot \sim p)) \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \vee (i \cdot \sim \Diamond p) \\ & = (q \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (q \cdot p \cdot \Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \text{ (by (2), (4))} \\ & = (q \cdot \sim \Diamond \sim p) \vee (q \cdot p \cdot \Diamond \sim p) \text{ (by (6))} \\ & = q \cdot (\sim \Diamond \sim p \vee (p \cdot \Diamond \sim p)) \\ & = q \cdot (\sim \Diamond \sim p \vee p) \\ & = q \cdot p \text{ (by (8))} \\ & = p \cdot q. \end{aligned}$$

If the formula  $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sim \Psi(\sim p_1, \sim p_2, \dots, \sim p_n)$  is provable, then we say that  $\Psi$  is the *dual* of  $\Phi$ . We shall show that our primitives are self-dual, the dual of a formula being obtained by writing it backwards and interchanging the letters  $n$  and  $i$ .

To do this we must show that the formulae

$$(D) \quad i = \sim n$$

$$\begin{aligned} (E) \quad & (p \cdot \sim \Diamond \sim r) \vee (((p \cdot s) \vee (q \cdot \sim s)) \cdot \Diamond r \cdot \Diamond \sim r) \vee (q \cdot \sim \Diamond r) \\ & = \sim ((\sim q \cdot \sim \Diamond \sim r) \vee (((\sim q \cdot \sim s) \vee (\sim p \cdot \sim \sim s)) \cdot \Diamond \sim r \cdot \Diamond \sim \sim r) \\ & \quad \vee (\sim p \cdot \sim \Diamond \sim r)) \end{aligned}$$

are provable in S 2. We shall omit the proof of (D) and outline the method of proving (E).

In the 2-valued Propositional Calculus, if  $P, Q, R$  are mutually exclusive and the formula  $P \vee Q \vee R$  is a theorem then  $(P \cdot S) \vee (Q \cdot T) \vee (R \cdot U) \leftrightarrow (\sim P \vee S) \cdot (\sim Q \vee T) \cdot (\sim R \vee U)$  holds. But the formula  $\sim \Diamond \sim p \vee \sim \Diamond p \vee (\Diamond p \cdot \Diamond \sim p)$  is a theorem of S 2. Thus we have in S 2

$$\begin{aligned}
& \sim ((\sim q \cdot \sim \Diamond \sim \sim r) \vee (((\sim q \cdot \sim s) \vee (\sim p \cdot \sim \sim s)) \cdot \Diamond \sim r \cdot \Diamond \sim \sim r) \vee \\
& (\sim p \cdot \sim \Diamond \sim r)) \\
& = \sim ((\sim q \vee \Diamond r) \cdot ((\sim q \cdot \sim s) \vee (\sim p \cdot s) \vee \sim (\Diamond \sim r \cdot \Diamond r)) \cdot (\sim p \vee \Diamond \sim r)) \\
& = (q \cdot \sim \Diamond r) \vee ((q \vee s) \cdot (p \vee \sim s) \cdot (\Diamond \sim r \cdot \Diamond r)) \vee (p \cdot \sim \Diamond \sim r) \\
& = (p \cdot \sim \Diamond \sim r) \vee (((p \cdot s) \vee (q \cdot \sim s)) \cdot \Diamond r \cdot \Diamond \sim r) \vee (q \cdot \sim \Diamond r)
\end{aligned}$$

because  $(p \cdot s) \vee (q \cdot \sim s)$  is equivalent to  $(q \vee s) \cdot (p \vee \sim s)$ .

It remains for us to show that the primitives are independent.  $[r, p, s, q, r]$  cannot be defined in terms of the other primitives since these are constants. If we omit the constant  $n$ , we cannot define it in terms of the other primitives since the formula  $[i, i, i, i, i] = i$  is provable by means of (2) and (4). Similarly the independence of  $i$  can be deduced from (1) and (3).

It follows from our duality theorem that negation is self-dual. Thus the rule for obtaining the dual of a formula still holds if we make the abbreviation  $\sim P = \text{df. } [P, i, P, n, P]$ .

Since this paper was originally submitted, Professor Dr. B. L. VAN DER WAERDEN has found that the above 4-argument function can be replaced by the 3-argument self-dual function  $[p, q, r]$  with the same meaning as  $(\sim \Diamond r \cdot p \cdot q) \vee (\sim \Diamond \sim p \cdot q \vee r) \vee (\Diamond r \cdot \Diamond \sim p \cdot \sim q)$ . The Lewis primitives are then defined by

$$\sim P = \text{df. } [i, P, n]$$

$$\Diamond P = \text{df. } [P, i, P]$$

$$P \cdot Q = \text{df. } [P, Q, i].$$

I should like to express my gratitude to the referee, Professor Dr. P. BERNAYS, for much valuable advice on the preparation of this paper.

(Eingegangen am 21. April 1952.)

## Approximation analytischer Funktionen auf nichtgeschlossenen RIEMANNschen Flächen.

Von

HERBERT FLATHE in Münster (Westf.).

### Einleitung.

Die Frage nach den Bedingungen dafür, wann eine in einem Bereich  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion innerhalb von  $\mathfrak{B}$  approximiert werden kann durch Funktionen, die in einem  $\mathfrak{B}$  umfassenden Bereich  $\mathfrak{B}^*$  noch regulär, bzw. meromorph sind, ist in der klassischen Funktionentheorie für schlichte Bereiche durch den RUNGESchen Satz beantwortet worden und darüber hinaus allgemein für beliebige nichtgeschlossene RIEMANNsche Flächen durch Übertragung des RUNGESchen Verfahrens von H. BEHNKE und K. STEIN im Jahre 1948.

Während jedoch der klassische RUNGESche Satz in der schlichten Ebene bereits die Klasse der approximierenden Funktionen auf Polynome, bzw. rationale Funktionen einschränkt und in diesem Falle eine Anzahl von Verfahren zur Herstellung der Approximationsfunktionen vorliegt — eine umfassende Darstellung gibt das Lehrbuch von J. L. WALSH: *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain* (New York 1935) —, hat man auf allgemeinen nichtgeschlossenen RIEMANNschen Flächen nur einen Beweis für die Existenz approximierender Funktionen, der sich durch Anwendung der RUNGESchen Polverschiebung auf die RIEMANNschen Summen des CAUCHYSchen Integrals ergibt.

Die Gültigkeit der CAUCHYSchen Integralformel auf RIEMANNschen Flächen legt nun den Gedanken nahe, bestimmte Reihenentwicklungen zu suchen, die im Innern von  $\mathfrak{B}$  gegen die vorgegebene Funktion konvergieren und deren Partialsummen noch in einem größeren Bereich, bzw. der Gesamtfläche regulär sind — analog den Potenz- und Polynomreihenentwicklungen in der schlichten Ebene —, um auf diese Weise ein Verfahren zur Konstruktion von Approximationsfunktionen zu bekommen. Damit ein solches Verfahren von der speziell vorgegebenen, zu approximierenden Funktion  $f$  unabhängig wird, ist eine Isolierung der Eigenschaften von  $f$  anzustreben, wie sie z. B. in den Koeffizienten  $c_n$  einer gewöhnlichen Potenzreihe  $\sum c_n(z - a)^n$  verwirklicht ist. Außerdem sollen die Approximationsfunktionen in der ganzen Fläche regulär, möglichst eindeutig bestimmt sein und einen einfachen Aufbau aufweisen.

In II. wird ein solches Verfahren zunächst für spezielle Bereiche  $\mathfrak{R}$  einer nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$  angegeben, die bei geeigneter Transformation  $w = P(z)$  von  $\mathfrak{R}_z$  in  $R_w$  in mehrblättrige Kreise  $K$  übergehen. Eine in  $K$  eindeutige, reguläre Funktion  $f(w)$  besitzt dann innerhalb  $K$  eine im wesentlichen aus dem CAUCHYSchen Produkt zweier Reihen  $\sum c_n w^n$  und  $\sum B_n(w) w^n$  bestehende Entwicklung, in der die konstanten Koeffizienten  $c_n$  und nur diese von  $f(w)$  abhängen, während die Funktionen  $B_n(w)$  die Struktur der Fläche  $R_w$  ausdrücken. (Bei der gewöhnlichen Potenzreihenentwicklung ist die zweite Reihe identisch gleich 1.)

Approximationsfunktionen lassen sich dann zu beliebigem  $f(w)$  konstruieren, wenn man auf der Fläche  $R_w$  die (von  $f$  unabhängigen) Funktionen  $B_n(w)$  kennt. Es zeigt sich, daß lediglich die Kenntnis einer zu  $R_w$ , bzw.  $\mathfrak{R}_z$  gehörigen Elementarfunktion 1. Ordnung in zwei Variablen nötig ist, um die Koeffizientenfunktionen  $B_n(w)$  berechnen und damit das Verfahren anwenden zu können. Die durch  $f$  bestimmten Koeffizienten  $c_n$  sind von der Wahl dieser Elementarfunktion unabhängig. Eine Abschätzung ergibt sich unmittelbar aus der CAUCHYSchen Integralformel.

Die Partialsummen der soeben skizzierten Entwicklung lassen eine übersichtliche Schreibweise zu (Satz 2), die sich auf eine zur Fläche gehörige Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  stützt.

In III. werden diese Ergebnisse auf eine allgemeinere Klasse von Teilbereichen  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{R}$  ausgedehnt, was durch eine Verschärfung des verallgemeinerten RUNGESchen Satzes ermöglicht wird (Satz 3).

Über den Nachweis der Existenz approximierender Funktionen hinausgehend wird somit in dieser Arbeit für nichtgeschlossene RIEMANNsche Flächen ein lediglich auf der Kenntnis einer Elementarfunktion 1. Ordnung (bzw. einer Primfunktion) beruhendes und dadurch der Fläche angepaßtes Verfahren zur Approximation regulärer Funktionen angegeben, das die wesentlichen Forderungen, die man an ein solches stellt, erfüllt.

### I. Definitionen und vorbereitende Sätze über Funktionen auf nichtgeschlossenen RIEMANNschen Flächen.

1. Die Grundlage für die folgenden Überlegungen ist der Begriff der konkreten RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$ , einer der komplexen  $z$ -Ebene überlagerten, triangulierbaren und nur aus inneren Punkten bestehenden Fläche, die in isolierten Punkten verzweigt sein kann. Die Verzweigungspunkte endlicher Ordnung werden zur Fläche gerechnet. Jedem Flächenpunkt  $p(z) - z$  gibt die Koordinate des zugehörigen Grundpunktes an — ist ein ortsuniformisierender Parameter  $t$  zugeordnet, wodurch eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Umgebung von  $p$  auf eine schlichte Umgebung des Nullpunktes der  $t$ -Ebene vermittelt wird. Zur Triangulierung der RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$  können immer durch Strecken, Halbgeraden oder Kreisbogen (im metrischen Sinne) berandete Dreiecke (Elementardreiecke) genommen werden. Ist die Fläche durch endlich viele nur aus inneren Punkten von  $\mathfrak{R}$  bestehende abgeschlossene Dreiecke triangulierbar, so heißt sie *geschlossen*. Sonst spricht man von einer *nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}^1$* .

Die Existenz von unendlichen Folgen innerer Punkte einer nichtgeschlossenen Fläche  $\mathfrak{R}$ , die sich nicht gegen einen inneren Punkt häufen, ermöglicht es, von einem „Rand“ von  $\mathfrak{R}$  zu sprechen. Ist  $\mathfrak{M}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{R}$ , so soll ein Punkt  $p_0$  aus  $\mathfrak{M}$  innerhalb von  $\mathfrak{M}$  mit dem Rande von  $\mathfrak{R}$  *verbindbar* heißen, wenn es mindestens eine Folge  $p_0, p_1, p_2, \dots$  von Punkten aus  $\mathfrak{M}$  gibt, die keinen Häufungspunkt im Innern von  $\mathfrak{R}$  besitzt, so daß jeweils  $p_i$  mit  $p_{i+1}$  über lauter innere Punkte von  $\mathfrak{M}$  *verbindbar* ist.

<sup>1)</sup> Zu diesen Definitionen sowie zur Einführung weiterer Begriffe wie „Bereich“, „Gebiet“, „Teilbereich“ ( $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ ), „ganz im Innern“ ( $\mathfrak{B} \subset \subset \mathfrak{R}$ ), s. H. BEHNKE u. K. STEIN: Entwicklung analytischer Funktionen auf RIEMANNschen Flächen; Math. Ann. 120, 430—461 (1948).



Ein Teilbereich  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{R}$  heißt *relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängend*, wenn jedes endliche System geschlossener Kurven in  $\mathfrak{B}$ , das innerhalb  $\mathfrak{R}$  berandet, schon in  $\mathfrak{B}$  berandet.

2. Zu jeder nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}^2$ ) existiert eine *Primfunktion*  $\Omega(\zeta, z)$ , d. i. eine im Zylindergebiet

$$\mathfrak{Z}: \mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$$

reguläre<sup>3)</sup> multiplikative automorphe Funktion der beiden Variablen  $p(\zeta)$  und  $p(z)$ , welche die singularitätenfreie, irreduzible analytische Diagonalmannigfaltigkeit

$$\mathfrak{F}: p(\zeta) = p(z)$$

als Nullstellenfläche 1. Ordnung besitzt.  $\Omega(\zeta, z)$  ist in der Variablen  $p(z)$  eindeutig und bleibt ebenfalls eindeutig, wenn  $p(\zeta)$  eine  $\mathfrak{H}$  zerlegende Kurve durchläuft.<sup>4)</sup> Auf das Mehrdeutigkeitsverhalten soll hier nicht eingegangen werden, da im folgenden meistens die erste Variable  $p(\zeta)$  festgehalten wird. Man erhält dann eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige reguläre Primfunktion  $\Omega(a, z)$  der einen Variablen  $p(z)$ , die genau im Punkte  $p(z) = p(a)$  eine einfache Nullstelle in der Ortsuniformisierenden besitzt.

3. Auf  $\mathfrak{R}$  existiert auch stets eine *Elementarfunktion 1. Ordnung*  $A(\zeta, z)$ , d. i. eine in  $\mathfrak{Z}: \mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$  eindeutige meromorphe Funktion der beiden Variablen  $p(\zeta)$  und  $p(z)$ , deren Differential  $A(\zeta, z) d\zeta$  für  $p(\zeta) \neq p(z)$  endlich bleibt und für  $p(\zeta) = p(z)$  einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 aufweist.<sup>5)</sup> Die logarithmische Ableitung einer Primfunktion nach der Variablen  $p(\zeta)$  ergibt eine solche Elementarfunktion 1. Ordnung:

$$A(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \Omega(\zeta, z).$$

4. Mittels der Elementarfunktionen läßt sich die CAUCHYsche Integralformel auf RIEMANNsche Flächen verallgemeinern. Sei  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$  ein Bereich mit stückweise glattem Rand und  $f(z)$  eine in  $\mathfrak{B}$  eindeutige reguläre und auf dem Rande noch stetige Funktion, so gilt für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}$  die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Rd. } \mathfrak{B}} f(\zeta) A(\zeta, z) d\zeta.$$

Rückgang auf RIEMANNsche Summen und Anwendung des RUNGESchen Polverschiebungsverfahrens liefern den

**Approximationssatz** (RUNGEScher Satz auf RIEMANNschen Flächen): *Jede in  $\mathfrak{B}$  eindeutige reguläre Funktion  $f(z)$  ist dann und nur dann durch in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige reguläre Funktionen gleichmäßig im Innern von  $\mathfrak{B}$  approximierbar, wenn  $\mathfrak{B}$  relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängend ist<sup>6)</sup>.*

<sup>2)</sup>  $\mathfrak{R}$  bezeichne hinfert stets eine nichtgeschlossene RIEMANNsche Fläche.

<sup>3)</sup> Eine Funktion heißt in einem Punkte einer RIEMANNschen Fläche oder eines Zylindergebietes regulär, bzw. meromorph, wenn sie es dort bezüglich des ortsuniformisierenden Parameters ist.

<sup>4)</sup> s. K. STEIN: Primfunktionen und multiplikative automorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen RIEMANNschen Flächen und Zylindergebieten; Acta math. 83, 165—196, insbes. S. 184—186.

<sup>5)</sup> BEHNKE-STEIN: loc. cit., S. 456.

<sup>6)</sup> BEHNKE-STEIN: loc. cit., S. 445.

Dabei bedeutet gleichmäßige Approximierbarkeit im Innern von  $\mathfrak{B}$ , daß es zu jedem abgeschlossenen Teilbereich  $\mathfrak{B}^*$  von  $\mathfrak{B}$  und zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige reguläre Funktion  $g(z)$  gibt, so daß für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}^*$

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon$$

gilt.

## II. Entwicklung in speziellen Bereichen.

1. Auf einer nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$  sei eine aus einem endlichen Produkt von  $k$  Primfunktionen bestehende Funktion

$$(1) \quad P(z) = \Omega_1(z_1, z) \Omega_2(z_2, z) \dots \Omega_k(z_k, z)$$

gegeben. Die Punkte  $p_r(z_r)$ , ( $r = 1, \dots, k$ ), in denen die einzigen Nullstellen liegen, die  $P(z)$  im Innern von  $\mathfrak{R}$  besitzt, sollen alle voneinander verschieden sein. Die Punktmenge

$$\mathfrak{M} : |P(z)| < \mu, \quad (\mu > 0),$$

besteht für hinreichend kleines positives  $\mu$  aus  $k$  Umgebungen der Punkte  $p_r(z_r)$ , sowie i. a. aus weiteren Anteilen, deren Punkte sämtlich innerhalb von  $\mathfrak{M}$  mit dem Rande von  $\mathfrak{R}$  verbindbar sind.  $\mathfrak{M}$  kann zufolge des Prinzips vom Maximum und Minimum keinen Punkt enthalten, der innerhalb  $\mathfrak{M}$  weder mit einem der Punkte  $p_r(z_r)$  noch mit dem Rande von  $\mathfrak{R}$  verbindbar ist. Läßt man die mit dem Rande der Fläche verbindbaren Punkte von  $\mathfrak{M}$  außer Betracht und bezeichnet die restliche Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  mit  $\mathfrak{M}_\mu$ , so ist letztere, wenn  $\mu$  nur wenig von Null verschieden ist, ganz in den  $k$  Elementarumgebungen der Punkte  $p_r(z_r)$  enthalten. Mit wachsendem  $\mu$  dehnt sich der Bereich  $\mathfrak{M}_\mu$  aus und kann, falls nicht vorher eine Vereinigung mit einem oder mehreren der vom Rande der Fläche herkommenden Anteile von  $\mathfrak{M}$  stattfindet, zu einem Gebiet ganz im Innern der Fläche zusammenwachsen. In jedem Falle wird es eine kritische Zahl  $\mu_0 > 0$  geben — diese kann gegebenenfalls unendlich groß sein (wenn etwa  $\mathfrak{R}$  die offene Ebene und  $P(z)$  ein Polynom  $k$ -ten Grades ist) — derart, daß für  $\mu < \mu_0$  der Bereich  $\mathfrak{M}_\mu$  ganz im Innern von  $\mathfrak{R}$  existiert, jedoch für  $\mu > \mu_0$  mindestens einer der Punkte  $p_r(z_r)$  innerhalb von  $\mathfrak{M} : |P(z)| < \mu$  mit dem Rande von  $\mathfrak{R}$  verbindbar ist. Der letztere Fall sei im folgenden ausgeschlossen, indem stets  $\mu < \mu_0$  angenommen wird.

Der Betragbereich  $\mathfrak{M}_\mu \subseteq \mathfrak{R}$  ist relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängend<sup>7)</sup> und geht bei der durch

$$w = P(z)$$

vermittelten eineindeutigen und i. a. konformen Abbildung der gesamten Fläche  $\mathfrak{R}$  auf eine über der  $w$ -Ebene ausgebreitete zweite nichtgeschlossene RIEMANNsche Fläche  $R$  in einen in  $k$  Blättern über dem Grunckreis  $|w| < \mu$  liegenden Kreisbereich  $K_\mu$  über. Hinreichend kleine Umgebungen  $U_r(z_r)$  der Punkte  $p_r(z_r)$  werden dabei in schlichte Umgebungen  $U_r(0)$  der dem Nullpunkt der  $w$ -Ebene überlagerten Punkte  $p_r(0)$  transformiert<sup>8)</sup>, woraus folgt, daß  $w$  zugleich ortsuniformisierender Parameter in den Punkten  $p_r(0)$  von  $R$  ist. Die aus höchstens endlich vielen nur aus inneren Punkten von  $\mathfrak{R}$  bestehenden geschlossenen analytischen Kurven gebildete Berandung  $\mathfrak{C}_\mu$  von  $\mathfrak{M}_\mu$  erscheint

<sup>7)</sup> Dies folgt ebenfalls aus dem Prinzip vom Maximum.

<sup>8)</sup> Punkte, Umgebungen, Gebiete, Bereiche und Berandungen werden in der transformierten Fläche  $R$  zum Unterschiede von  $\mathfrak{R}$  mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

in  $R$  als Kreisberandung  $C_\mu$ , deren Grundpunkte die Kreisperipherie mit dem Radius  $\mu$  in der  $w$ -Ebene bilden.

Die folgenden Überlegungen sollen zunächst auf der transformierten Fläche  $R$  durchgeführt und dann in die ursprünglich gegebene Fläche rückübersetzt werden. Zu diesem Zwecke werde auf  $R$  neben der Variablen  $p(w)$  noch eine zweite Variable  $p(\omega)$  eingeführt, die gemäß  $\omega = P(\zeta) = \prod_{\nu=1}^k \Omega_\nu(z_\nu, \zeta)$  der Variablen  $p(\zeta)$  auf  $\mathfrak{H}$  entspricht.

2.  $f(z)$  sei eindeutig und regulär in  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\mu$  (der Index  $\mu$  werde vorübergehend unterdrückt) und auf dem Rande  $\mathfrak{C}$  noch stetig. Bei der Abbildung von  $\mathfrak{H}$  auf  $R$  überpflanzen sich die Funktionswerte, und die Funktion, jetzt einfach als  $f(w)$  bezeichnet, hat auf  $R$  in  $K$  mit dem Rand  $C$  dieselben Eigenschaften.

Gesucht ist eine in ganz  $R$  eindeutige reguläre Funktion  $S_n(w)$ , die mit  $f(w)$  in den  $k$  dem Nullpunkt überlagerten Punkten  $p_\nu(0)$  in  $K$  von  $(n+1)$ -ter Ordnung übereinstimmt. Eine solche erhält man, wenn  $A(\omega, w)$  eine zu  $R$  gehörige Elementarfunktion 1. Ordnung bedeutet, durch den Ansatz:

$$(2) \quad f(w) - S_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w^{n+1}}{\omega^{n+1}} f(\omega) A(\omega, w) d\omega, \quad (p(\omega) \text{ auf } C).$$

Diese Differenz verschwindet in den Punkten  $p_\nu(0)$  gerade von  $(n+1)$ -ter Ordnung, weil

$$\int_C f(\omega) A(\omega, w) \frac{d\omega}{\omega^{n+1}}$$

in jedem inneren Punkt  $p(w)$  aus  $K$  regulär ist, also auch in den Punkten  $p_\nu(0)$  endlich bleibt<sup>9)</sup>. Aus

$$(3) \quad S_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(1 - \frac{w^{n+1}}{\omega^{n+1}}\right) f(\omega) A(\omega, w) d\omega$$

ersieht man die Regularität von  $S_n(w)$  in ganz  $R$ , weil die von  $A(\omega, w)$  herrührenden Singularitäten im Integranden bei  $p(\omega) = p(w)$  durch das identische Verschwinden des Klammersausdrucks aufgehoben werden.

Mittels der Hilfsfunktion

$$(4) \quad H(\omega, w) = (\omega - w) A(\omega, w),$$

die sich in den beiden Variablen  $p(\omega)$  und  $p(w)$  im Zylindergebiet  $R_\omega \times R_w$  eindeutig meromorph verhält mit der Eigenschaft, daß das Differential  $H(\omega, w) d\omega$  in ganz  $R$  endlich bleibt, erhält man aus (3)

$$S_n(w) = \sum_{\lambda=0}^n w^\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\omega) H(\omega, w) \frac{d\omega}{\omega^{\lambda+1}}.$$

Die einzigen Singularitäten des Integranden in  $K$  in der Variablen  $p(\omega)$  liegen in den Punkten  $p_\nu(0)$ . Da die Umgebungen  $U_\nu(0)$  dieser Punkte schlicht sind, kann man unter Benutzung des CAUCHYschen Integralsatzes und der CAUCHY-

<sup>9)</sup> Zur Verwendung dieses HERMITESchen Integrals vgl. das Lehrbuch von J. L. WALSH: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain; Amer. Math. Soc., New York 1935, 50ff.

schen Integralformeln für die Ableitungen den Koeffizienten  $Q_\lambda(w)$  von  $w^\lambda$  in  $S_n(w)$  folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad Q_\lambda(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\omega) H(\omega, w) \frac{d\omega}{\omega^{\lambda+1}} \\
 &= \sum_{v=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} f(\omega) H(\omega, w) \frac{d\omega}{\omega^{\lambda+1}} \\
 &= \sum_{v=1}^k \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial \omega^\lambda} [f(\omega) H(\omega, w)]_{p(\omega)=p_v(0)},
 \end{aligned}$$

wobei  $C_v$  kleine, in den Umgebungen  $U_v(0)$  der Punkte  $p_v(0)$  liegende Kreise um  $p_v(0)$  bezeichnen sollen. Da die Umgebungen  $U_v(0)$  schlicht sind, ist  $H(\omega, w)$  im Zylinderbereich  $(\sum_{v=1}^k U_v(0))_\omega \times R_w$  eindeutig und regulär in beiden Variablen, und die  $Q_\lambda(w)$  sind somit als Funktionen der einen Variablen  $p(w)$  in ganz  $R$  eindeutig und regulär.

Die Folge der Funktionen

$$S_n(w) = \sum_{\lambda=0}^n Q_\lambda(w) w^\lambda$$

konvergiert in jedem inneren Punkte von  $K$ , und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $K$ . Denn zu jedem solchen Teilbereich gibt es eine positive Zahl  $\mu_1 < \mu$  derart, daß der Teilbereich in  $K_{\mu_1}$ ,  $|w| \leq \mu_1$  enthalten ist. Es gilt dann gleichmäßig für alle Punkte  $p(w)$  des Teilbereiches gemäß (2)

$$(6) \quad |f(w) - S_n(w)| \leq \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{n+1} M,$$

wobei  $M$  unabhängig von  $n$  und  $p(w)$  in  $K_{\mu_1}$  ist. Damit ist für die Funktion  $f(w)$  eine im Innern von  $K$  gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung

$$(7) \quad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(w) w^n$$

gefunden, deren Koeffizienten gewisse in ganz  $R$  eindeutige reguläre Funktionen der Variablen  $p(w)$  sind, bestimmt durch die Ableitungen der zu approximierenden Funktion  $f$  und diejenigen der Hilfsfunktion  $H(\omega, w)$  nach der ersten Variablen, beide genommen in den  $k$  dem Nullpunkt der  $w$ -Ebene überlagerten Punkten von  $K$ .

3. Nach der LEIBNIZschen Differentiationsregel folgt aus (5)

$$Q_\lambda(w) = \frac{1}{\lambda!} \sum_{v=1}^k \sum_{\kappa=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\kappa} f_v^{(\lambda-\kappa)}(0) \frac{\partial^\kappa}{\partial \omega^\kappa} H(\omega, w) \Big|_{p(\omega)=p_v(0)},$$

wobei der Index  $v$  andeutet, in welchem der  $k$  „Mittelpunkte“  $p(\omega) = p_1(0), \dots, p_k(0)$  Funktionswerte und Ableitungen von  $f$  zu nehmen sind.

Wegen  $\frac{1}{\lambda!} \binom{\lambda}{\kappa} = \frac{1}{(\lambda-\kappa)! \kappa!}$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 (8) \quad S_n(w) &= \sum_{\lambda=0}^n Q_\lambda(w) w^\lambda \\
 &= \sum_{v=1}^k \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\kappa=0}^{\lambda} \frac{f_v^{(\lambda-\kappa)}(0)}{(\lambda-\kappa)!} w^{\lambda-\kappa} \cdot \frac{1}{\kappa!} \left[ \frac{\partial^\kappa}{\partial \omega^\kappa} H(\omega, w) \right]_{p(\omega)=p_v(0)} w^\kappa,
 \end{aligned}$$

und  $S_n(w)$  stellt sich damit als  $n$ -te Partialsumme eines CAUCHYschen Produktes zweier Potenzreihen in  $w$  dar:

$$(9) \quad f(w) = \sum_{v=1}^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(v)} w^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(v)}(w) w^n \right),$$

worin die konstanten Koeffizienten  $c_n^{(v)}$  die aus der gewöhnlichen Potenzreihenentwicklung bekannten Ausdrücke

$$(10) \quad c_n^{(v)} = \frac{f_v^{(n)}(0)}{n!},$$

also die in den  $k$  Mittelpunkten  $p_v(0)$  genommenen Ableitungen der gegebenen Funktion  $f$  sind, während die als Koeffizienten der zweiten Reihe auftretenden Funktionen  $B_n^{(v)}(w)$  in derselben Weise aus den Ableitungen der Hilfsfunktion  $H(w, w)$  nach der ersten Variablen in diesen Punkten gebildet werden:

$$(11) \quad \begin{aligned} B_n^{(v)}(w) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} H(\omega, w) \Big|_{p(\omega) = p_v(0)} \\ &= \frac{A_v^{(n-1)}(0, w)}{(n-1)!} - \frac{A_v^{(n)}(0, w)}{n!} w, \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung  $\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} A(\omega, w) \Big|_{p(\omega) = p_v(0)} = A_v^{(n)}(0, w)$  setzt. Aus den oben genannten Eigenschaften der Hilfsfunktion  $H(\omega, w)$  folgt die Regularität aller  $B_n^{(v)}(w)$  in ganz  $R$ .

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß (9) lediglich eine Rechenvorschrift darstellt (Bildung der Partialsummen gemäß (8) nach der CAUCHYschen Reihmultiplikationsmethode). Keinesfalls sind die beiden als Faktoren geschriebenen Reihen gesondert zu betrachten.

4. Die Entwicklung (9) stellt eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Potenzreihenentwicklung auf mehrblättrige Kreisbereiche in einer nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche dar. Während die Koeffizienten  $c_n^{(v)}$  der ersten Reihe des Produktes (9) wie bei der gewöhnlichen Potenzreihe durch die gegebene Funktion und deren Ableitungen im Entwicklungspunkt charakterisiert sind (entsprechend den  $k$  Blättern hat man jetzt  $k$  Entwicklungspunkte), kommt in den Koeffizientenfunktionen, deren Bildungsgesetz ähnlich ist (ebenfalls Ableitungen in den Entwicklungspunkten), in Gestalt des Differentials  $H(\omega, w) d\omega$  die spezifische Struktur der Fläche  $R$  zum Ausdruck. In der Schreibweise (9) erscheinen somit die Eigenschaften der zu approximierenden Funktion und die Struktur der Fläche getrennt.

5. Die gewöhnliche Potenzreihenentwicklung ist in (9) als Spezialfall enthalten. Wird  $R$  zur schlichten, offenen Ebene, ( $k=1$ ), so kann man  $A(\omega, w) = 1/(\omega - w)$  setzen.  $H(\omega, w) = 1$  bedeutet aber den Fortfall der zweiten Reihe in (9).

Es ist anzumerken, daß die verallgemeinerte Entwicklung sich nicht auf den zugrunde gelegten Bereich beschränkt, sondern die Beziehung zur ganzen Fläche gewahrt bleibt: Wie bei der gewöhnlichen Potenzreihenentwicklung die Partialsummen in der ganzen offenen Ebene reguläre Funktionen sind, so sind auch die Partialsummen von (9) in ganz  $R$  eindeutig und regulär.

6. Man gehe nun umgekehrt von einer Folge komplexer Zahlen  $c_n^{(v)}$  aus und bilde mittels einer Elementarfunktion 1. Ordnung  $A(\omega, w)$  der Fläche  $R$  das

Reihenprodukt (9). Gibt es dann überhaupt eine Zahl  $\mu > 0$ , so daß (9) in  $K_\mu$ :  $|w| \leq \mu$  gleichmäßig konvergiert, so stellt (9) in  $K_\mu$  ein eindeutiges reguläres Funktionselement dar. Analog zur gewöhnlichen Potenzreihenentwicklung gilt auch hier ein

**Eindeutigkeitssatz:** *In der Entwicklung (9) sind die Koeffizienten  $c_n^{(v)}$ , unabhängig von der zugrunde gelegten Elementarfunktion, eindeutig durch das dargestellte Funktionselement bestimmt.*

*Beweis:* Es genügt offenbar, die Eindeutigkeit für eine beliebige gewählte Elementarfunktion  $A(w)$  zu zeigen. Dann gilt nämlich (10), und aus dieser Beziehung folgt unmittelbar die Unabhängigkeit von der gewählten Elementarfunktion.

Unter der Annahme, es gäbe neben (9) noch eine zweite Entwicklung

$$(9a) \quad f(w) = \sum_{v=1}^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(v)} w^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(v)}(w) w^n \right),$$

bilde man die Differenz

$$(12) \quad F(w) = \sum_{v=1}^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^{(v)} - d_n^{(v)}) w^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(v)}(w) w^n \right).$$

$\lambda \geq 0$  sei der kleinste Index derart, daß für irgendein  $v = v_0$  ( $v = 1, \dots, k$ )

$$c_\lambda^{(v_0)} \neq d_\lambda^{(v_0)}$$

gilt. Man untersuche nun  $F(w)$  in einer Umgebung  $U_{v_0}(0)$  von  $p_{v_0}(0)$ , wo  $w$  ortsuniformisierender Parameter ist und insbesondere  $F(w) \equiv 0$  gilt. Aus der Regularität der Funktionen  $B_n^{(v)}(w)$  folgt nach dem Ausmultiplizieren beider Reihen in (12), daß  $w^\lambda$  die niedrigste auftretende  $w$ -Potenz ist, und zwar mit dem Koeffizienten

$$\sum_{v=1}^k (c_\lambda^{(v)} - d_\lambda^{(v)}) B_0^{(v)}(w) = (c_\lambda^{(v_0)} - d_\lambda^{(v_0)}) B_0^{(v_0)}(w) + \sum_{v \neq v_0} (c_\lambda^{(v)} - d_\lambda^{(v)}) B_0^{(v)}(w).$$

Nach (11) gilt

$$B_0^{(v)}(w) = -w A_v(0, w).$$

In  $U_{v_0}$  hat lediglich  $A_{v_0}(0, w)$  einen einfachen Pol (mit dem Residuum  $-1$ ), während  $A_v(0, w)$  für  $v \neq v_0$  dort regulär ist. Es gilt also

$$B_0^{(v)}(w) = \begin{cases} 1 + a_1^{(v)} w + \dots & \text{für } v = v_0 \\ a_1^{(v)} w + \dots & \text{für } v \neq v_0 \end{cases},$$

so daß  $w^\lambda$  als Koeffizienten lediglich  $(c_\lambda^{(v_0)} - d_\lambda^{(v_0)})$  behält, der wegen  $F(w) \equiv 0$  nach dem Identitätssatz für gewöhnliche Potenzreihen notwendig verschwinden muß.

In derselben Weise schließt man für die übrigen zum Index  $\lambda$  gehörigen Koeffizienten  $(c_\lambda^{(v)} - d_\lambda^{(v)})$  durch Untersuchung von  $F(w)$  in den Umgebungen  $U_v(0)$ . Es folgt schließlich für alle  $v = 1, \dots, k$

$$c_\lambda^{(v)} = d_\lambda^{(v)}$$

im Widerspruch zur Annahme, daß zum Index  $\lambda$  mindestens ein  $v$  existiert, für das die Koeffizientengleichheit nicht erfüllt ist.

Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen.

7. Die Entwicklung (9) ist nun auf die ursprünglich gegebene Fläche  $\mathfrak{R}$  zurückzuübertragen, d. h. alle vorkommenden Funktionen sind in der Variablen  $p(z)$  zu schreiben. Zunächst hat man  $w = P(z)$  zu setzen. Die konstanten Koeffizienten  $c_n^{(v)}$  bleiben dieselben. Ihre Berechnung auf  $\mathfrak{R}$  folgt aus (10) nach den Rechenregeln für mittelbare Funktionen.

Um die Koeffizientenfunktionen in derselben Weise auf  $\mathfrak{R}$  zu berechnen, hat man zu untersuchen, wie das Differential  $H(\omega, w) d\omega$  auf  $\mathfrak{R}$  aussieht.  $A(\omega, w)$  ist eine Elementarfunktion 1. Ordnung auf  $R$ . Dann ist

$$a(\zeta, z) = A(P(\zeta), P(z)) \frac{dP(\zeta)}{d(\zeta)}$$

eine zu  $\mathfrak{R}$  gehörige Elementarfunktion 1. Ordnung. Greift man nämlich auf  $\mathfrak{R}$  einen beliebigen Punkt  $p_0$  heraus, dem auf  $R$  der Punkt  $p_0$  entsprechen möge, und sind  $\tau, t$ , bzw.  $\sigma, s$  die diesen Punkten zugeordneten ortsuniformisierenden Parameter in  $\mathfrak{R}$ , bzw.  $R$ , so gilt in einer Umgebung

$$a(\zeta, z) \frac{d\zeta}{d\tau} = \left( A(\omega, w) \frac{d\omega}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{d\zeta} = \left( \frac{1}{\sigma - s} + R(\sigma, s) \right) \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + r(\tau, t),$$

denn die Parameter hängen, da es sich um schlichte Umgebungen des Nullpunktes der  $\sigma$ -, bzw.  $\tau$ -Ebene handelt, gemäß

$$\sigma = b_1 \tau + b_2 \tau^2 + \dots$$

und

$$s = b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

zusammen.

Der Elementarfunktion  $A(\omega, w)$  in  $R$  ist somit eine Elementarfunktion  $a(\zeta, z)$  in  $\mathfrak{R}$  in der Weise zugeordnet, daß für die Differentiale

$$(13) \quad A(\omega, w) d\omega = a(\zeta, z) d\zeta$$

gilt. Aus (11) und (13) folgt unmittelbar die Berechnung der Koeffizientenfunktionen

$$B_n^{(v)}(w) = b_n^{(v)}(z)$$

auf der Fläche  $\mathfrak{R}$ . Es gilt

$$(14) \quad b_n^{(v)}(z) = \alpha_{n-1}^{(v)}(z) - \alpha_n^{(v)}(z) P(z),$$

wobei  $\alpha_{n-1}^{(v)}(z)$  und  $\alpha_n^{(v)}(z)$  Polynome in den Ableitungen der Elementarfunktion  $a(\zeta, z)$  nach der ersten Variablen bis zur  $(n-1)$ -ten, bzw.  $n$ -ten Ordnung im Punkte  $p_r(z_r)$  sind mit konstanten Koeffizienten, die durch das Verhalten der Abbildungsfunktion  $P(z)$  in  $p_r(z_r)$  bestimmt werden. Ist  $p_r(z_r)$  ein Verzweigungspunkt, so hat man in der Ortsuniformisierenden zu rechnen.

8. Die bisherigen Untersuchungen ergeben den

**Satz 1. (Entwicklungssatz).**

Auf der nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$  seien  $k$  voneinander verschiedene innere Punkte  $p_1(z_1), \dots, p_k(z_k)$  und dazu eine genau in diesen Punkten von 1. Ordnung (in der Ortsuniformisierenden) verschwindende, in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige und reguläre Funktion

$$P(z) = \Omega_1(z_1, z) \Omega_2(z_2, z) \dots \Omega_k(z_k, z)$$

vorgegeben.



Dann läßt sich jede in einem Betragbereich  $\mathfrak{R}_\mu$ :  $|P(z)| < \mu < \mu_0$  eindeutige reguläre und auf dem Rande noch stetige Funktion  $f(z)$  im Innern von  $\mathfrak{R}_\mu$  in eine Reihe

$$(15) \quad f(z) = \sum_{n=1}^k \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} c_n^{(\nu)} P^\nu(z) \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\nu)}(z) P^n(z) \right)$$

entwickeln, deren konstante Koeffizienten  $c_n^{(\nu)}$  eindeutig bestimmt sind durch das Verhalten von  $f(z)$  in den  $k$  Nullstellen von  $P(z)$ , während sich die Koeffizientenfunktionen  $b_n^{(\nu)}(z)$  unabhängig von  $f(z)$  durch das Verhalten von  $P(z)$  und einer beliebig wählbaren, zur Fläche  $\mathfrak{R}$  gehörigen Elementarfunktion 1. Ordnung  $a(\zeta, z)$  in diesen Punkten gemäß (14) ausdrücken.

Die Folge der nach der CAUCHYSchen Reihenmultiplikationsvorschrift aus der rechten Seite von (15) gebildeten Partialsummen konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $\mathfrak{R}_\mu$  und stellt dort die Funktion  $f(z)$  dar.

Die Reihe (15) konvergiert in jedem Betragbereich  $\mathfrak{R}_\mu$ , in welchem  $f(z)$  noch regulär ist, und es lassen sich an Satz 1 Überlegungen über das Konvergenzverhalten analog zu den gewöhnlichen Potenzreihen anschließen. Zu beachten sind dabei als wesentliche Unterschiede:

1. Als Koeffizienten treten für  $k > 1$  Funktionen der Fläche auf.
2. Die Fläche  $\mathfrak{R}$  läßt sich nicht stets durch Betragbereiche einer Funktion  $P(z)$  ausschöpfen (und nur in solchen haben die obigen Überlegungen Gültigkeit), da i. a.  $\mu_0 < \infty$  ist.

9. Satz 1 soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. In der in 0 und  $\infty$  punktierten schlichten Ebene  $\mathfrak{R}$  betrachte man die Betragbereiche  $\mathfrak{R}_\mu$  der Funktion

$$P(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Es gilt  $\mu_0 = \infty$ , und  $\mathfrak{R}$  läßt sich in diesem Falle durch die Betragbereiche normal ausschöpfen<sup>10)</sup>.  $P(z)$  verschwindet in den Punkten  $z_{\frac{1}{2}} = \pm i$  von 1. Ordnung. Für  $0 < \mu < 1$  besteht  $\mathfrak{R}_\mu$  aus zwei einfach zusammenhängenden, punktfremden Gebieten um  $\pm i$ , die für  $\mu = 1$  in den Punkten  $\pm 1$  zusammenwachsen (dort verschwindet die 1. Ableitung von  $P(z)$ ). Für  $1 < \mu < \infty$  besteht  $\mathfrak{R}_\mu$  aus einem zusammenhängenden Ringgebiet, das die beiden Randpunkte 0 und  $\infty$  von  $\mathfrak{R}$  voneinander trennt.

Die transformierte Fläche  $R$  ist eine über  $w = \pm 1$  von 1. Ordnung verzweigte zweiblättrige RIEMANNSche Fläche über der offenen  $w$ -Ebene. Einer Umgebung des Nullpunktes der Grundebene sind zwei schlichte Blätter überlagert, welche die Bilder von Umgebungen der Punkte  $+i$  und  $-i$  in  $\mathfrak{R}$  enthalten. Die Betragbereiche  $K_\mu$  bestehen aus sämtlichen Punkten von  $R$ , die über der Kreisscheibe  $|w| < \mu$  liegen.

<sup>10)</sup> Eine normale Ausschöpfungsfolge  $\mathfrak{B}_j$  eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  ist an folgende Bedingungen geknüpft:

1.  $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{B}_{j+1} \subset \mathfrak{B}$
2. Zu jedem abgeschlossenen Teilbereich  $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$  gibt es einen Index  $j_0$ , so daß  $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}_j$  gilt für  $j > j_0$ .
3. Jeder Bereich  $\mathfrak{B}_{j_0}$  der Folge ist relativ zu allen  $\mathfrak{B}_j$  mit  $j > j_0$  und zu  $\mathfrak{B}$  einfach zusammenhängend.



Die transformierte Fläche  $R$  besteht aus den endlichen Punkten<sup>11)</sup> der Fläche der algebraischen Funktion  $s(w) = \sqrt{(w-1)(w+1)}$  und stellt einen Spezialfall der zweiblättrigen Fläche der algebraischen Funktion

$$s(w) = \sqrt{(w-a_1)(w-a_2)\dots(w-a_m)}$$

mit  $m$  endlichen Verzweigungspunkten dar, aus welcher die dem unendlich fernen Grundpunkt überlagerten Punkte herausgenommen sind. Zu einer solchen nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $R$ , auf der noch  $a_j \neq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) gelten und  $K_\mu$  die Gesamtheit der dem Grundkreis  $|w| < \mu$  überlagerten Punkte bezeichnen möge, ist

$$(16) \quad A(\omega, w) = \frac{1}{2} \frac{s(\omega) + s(w)}{s(\omega)} \frac{\omega - w}{s(w)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s(w)}{s(\omega)} \right) \frac{1}{\omega - w} = \frac{H(\omega, w)}{\omega - w}$$

eine zugehörige Elementarfunktion 1. Ordnung<sup>12)</sup>. Dies sieht man folgendermaßen ein: Singularitäten kann  $A$  lediglich für  $\omega = w$  und  $\omega = a_j$  haben. Variieren  $p(\omega)$  und  $p(w)$  in verschiedenen Blättern, so ist  $A$  für  $\omega = w$  regulär, weil dann auch die Summe im Zähler verschwindet. In der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes hat somit  $A(\omega, w)$  lediglich die Mannigfaltigkeit  $p(\omega) = p(w)$  als Polfläche.  $H(\omega, w)$  nimmt auf dieser Mannigfaltigkeit den Wert 1 an, so daß in einer Umgebung

$$\frac{H(\omega, w) - 1}{\omega - w} = R(\omega, w)$$

regulär ist. Es folgt

$$A(\omega, w) = \frac{1}{\omega - w} + R(\omega, w).$$

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes  $a_j$  setze man  $w - a_j = t^2$ ,  $\omega - a_j = \tau^2$ . Dann gilt dort die Entwicklung

$$s(\omega) = \tau(c_0 + c_1 \tau + \dots) = \tau \cdot \mathfrak{P}(\tau), \quad (c_0 \neq 0).$$

Der Quotient  $\mathfrak{P}(t)/\mathfrak{P}(\tau)$  ist dort regulär und gleich 1 für  $\tau = t$ , so daß

$$A(\omega, w) \frac{d\omega}{d\tau} = \left( \frac{1}{2\tau} \frac{\tau + \frac{\mathfrak{P}(t)}{\mathfrak{P}(\tau)} t}{\tau^2 - t^2} \right) 2\tau = \frac{1}{\tau - t} + r(\tau, t)$$

wird, wobei  $r(\tau, t)$  in einer Umgebung von  $(\tau, t) = (0, 0)$  regulär ist.

Die Hilfsfunktion  $H(\omega, w)$  lautet

$$H(\omega, w) = (\omega - w) A(\omega, w) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s(w)}{s(\omega)} \right)$$

und ihre Ableitungen nach der ersten Variablen in einem gewöhnlichen Punkt

$$\frac{\partial^n H(\omega, w)}{\partial \omega^n} = \frac{1}{2} \frac{d^n \left( \frac{1}{s(\omega)} \right)}{d\omega^n} s(w), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

<sup>11)</sup> Die Koordinaten der Grundpunkte sind endlich.

<sup>12)</sup> Siehe auch R. KÖNIG u. M. KRAFFT: Elliptische Funktionen; S. 84 ff. Berlin u. Leipzig 1928.

Diese Ableitungen sind in den beiden dem Nullpunkt überlagerten Punkten  $p_v(0)$ , ( $v = 1, 2$ ), der Fläche zu nehmen, um die Koeffizientenfunktionen  $B_n^{(v)}(w)$  zu berechnen. Setzt man

$$(17) \quad \frac{1}{n!2} \left( \frac{1}{s(w)} \right)^{(n)} \bigg|_{p(w)=p_v(0)} = d_n^{(v)},$$

so gilt

$$(18) \quad \begin{aligned} B_0^{(v)}(w) &= \frac{1}{2} + d_0^{(v)} s(w) \\ B_n^{(v)}(w) &= d_n^{(v)} s(w), \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Eine in  $K_\mu$  reguläre Funktion  $f(w)$  besitzt nach Satz 1 innerhalb  $K_\mu$  eine Entwicklung

$$f(w) = \sum_{v=1}^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(v)} w^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(v)}(w) w^n \right),$$

deren  $n$ -te Partialsumme unter Berücksichtigung von (18)

$$S_n(w) = q_n(w) + r_n(w) s(w)$$

lautet, wobei  $q_n(w)$  und  $r_n(w)$  Polynome  $n$ -ten Grades in  $w$  sind. Die Partialsummen haben also die bekannte Darstellung von Funktionen des Körpers der algebraischen Funktion  $s(w)$ , und das Verfahren liefert hier bei Benutzung der Elementarfunktion (16) das Ergebnis, daß jede in einem Bereich  $K_\mu$  reguläre Funktion im Innern von  $K_\mu$  gleichmäßig durch in ganz  $R$  reguläre Funktionen des Körpers von  $s(w)$  approximierbar ist, und gibt eine Vorschrift, wie sich die Koeffizienten der Polynome  $q_n(w)$  und  $r_n(w)$  aus dem Verhalten der gegebenen Funktion  $f$  einerseits ( $c_n^{(v)} = 1/n! f^{(n)}(w) \big|_{p(w)=p_v(0)}$ ) und der für die Fläche charakteristischen Funktion  $s$  andererseits, jeweils in den beiden dem Nullpunkt überlagerten „Entwicklungspunkten“, bestimmen lassen. Die Trennung der Eigenschaften der vorgegebenen Funktion  $f$  von den Struktureigenschaften der Fläche drückt sich hier in den Konstanten  $c_n^{(v)}$  und  $d_n^{(v)}$  besonders deutlich aus.

Um einen Maßstab für die Güte der Approximation zu bekommen, kann man das Integral (2) verwenden und gemäß (6) verfahren, wenn das Maximum des Betrages von  $f$  in  $K_\mu$  bekannt ist.

Für den zu Anfang betrachteten Spezialfall der in  $+1$  und  $-1$  verzweigten Fläche von  $s(w) = \sqrt{w^2 - 1}$ , welche, soweit sie über der offenen  $w$ -Ebene liegt, das durch

$$w = P(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

entworfene Bild der in 0 und  $\infty$  punktierten schlichten Ebene  $\Re$  ist, erhält man in  $\Re$

$$s(w) = s(P(z)) = \sqrt{\frac{1}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)$$

und für die Koeffizientenfunktionen

$$(18a) \quad \begin{aligned} b_0^{(v)}(z) &= \frac{1}{2} + \frac{d_0^{(v)}}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) & (v = 1, 2) \\ b_n^{(v)}(z) &= \frac{d_n^{(v)}}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Die zugehörige Elementarfunktion auf  $\Re$  lautet, wie eine einfache Umrechnung zeigt,

$$a(\zeta, z) = \frac{1}{2\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{2\zeta}.$$

10. Die Entwicklung (15) hat, wie bereits erwähnt wurde, den Vorteil, daß die konstanten Koeffizienten, welche die zu entwickelnde Funktion  $f(z)$  charakterisieren, getrennt erscheinen von den Koeffizientenfunktionen, die unabhängig von  $f(z)$  lediglich die Struktur der Fläche ausdrücken und deren Bestimmung nur die Kenntnis einer zur Fläche gehörigen Elementarfunktion 1. Ordnung voraussetzt. Da die logarithmische Ableitung einer Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  nach der ersten Variablen stets eine solche Elementarfunktion darstellt (s. I. 3.) und außerdem (vgl. (14)) in den Koeffizientenfunktionen die Abbildungsfunktion  $P(z)$  auftritt, läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, für die approximierenden Funktionen eine Schreibweise ableiten, die sich aus der Kenntnis einer zur Fläche gehörigen Primfunktion ergibt.

Dazu gehe man von einer beliebigen Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  in den beiden Variablen  $p(\zeta)$  und  $p(z)$  aus, fixiere nach Wahl eines Zweiges die erste Variable in den  $k$  Punkten  $p_\nu(z_\nu)$ , ( $\nu = 1, \dots, k$ ), und bilde das in ganz  $\Re$  eindeutige und reguläre Produkt

$$\prod_{\nu=1}^k \Omega(z_\nu, z),$$

das sich von der in II. 1. definierten Funktion  $P(z)$  nur um einen in ganz  $\Re$  eindeutigen und regulären, nullstellenfreien Faktor  $g(z)$  unterscheidet. Man kann also schreiben:

$$(19) \quad P(z) = g(z) \prod_{\nu=1}^k \Omega(z_\nu, z).$$

Dieselbe Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  verwende man zur Konstruktion einer zu  $\Re$  gehörigen Elementarfunktion 1. Ordnung:

$$(20) \quad a(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \Omega(\zeta, z) = \frac{\Omega_\zeta(\zeta, z)}{\Omega(\zeta, z)}.$$

Bildet man nach (8) die  $n$ -te Partialsumme von (15) und setzt für die Koeffizientenfunktionen die Ausdrücke (14) ein, so ergibt sich:

$$(21) \quad s_n(z) = \sum_{\nu=1}^k \sum_{\lambda=0}^n [c_\lambda^{(\nu)} b_\lambda^{(\nu)}(z) + c_{\lambda-1}^{(\nu)} b_\lambda^{(\nu)}(z) + \dots + c_0^{(\nu)} b_\lambda^{(\nu)}(z)] P^\lambda(z) \\ = - \sum_{\nu=1}^k [P^{n+1}(z) \sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda}^{(\nu)} \alpha_\lambda^{(\nu)}(z)],$$

denn alle anderen Potenzen von  $P(z)$  heben sich heraus.  $\alpha_n^{(\nu)}(z)$  war nach (14), (13) und (11) bis auf den Faktor  $n!$  die im Punkte  $p(\omega) = p_\nu(0)$  genommene  $n$ -te Ableitung der Elementarfunktion  $A(\omega, w)$  nach der ersten Variablen, jedoch in der Variablen  $p(z)$  auf  $\Re$  geschrieben. Nach den Rechengesetzen zur Differentiation ineinandergesetzter Funktionen gilt unter Berücksichtigung von (20)

$$\alpha_\lambda^{(\nu)}(z) = \frac{\Omega_\lambda^{(\nu)}(\Omega)}{\Omega^{\lambda+1}(z_\nu, z)},$$

und  $\Omega_\lambda^{(v)}(\Omega)$  ist darin eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige reguläre Funktion der Variablen  $p(z)$ , bestehend aus einem homogenen Polynom  $(\lambda + 1)$ -ten Grades in den Ableitungen 0-ter bis  $(\lambda + 1)$ -ter Ordnung der Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  nach der ersten Variablen, genommen im Punkte  $p(\zeta) = p_r(z_r)$  in der zugehörigen Ortsuniformisierenden, dessen konstante Koeffizienten durch das Verhalten von  $P(z)$  in diesem Punkte bestimmt sind.

Weiter gilt

$$-\sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda}^{(v)} \alpha_\lambda^{(v)}(z) = \frac{\mathfrak{P}_\lambda^{(v)}(\Omega)}{\Omega^{n+1}(z_r, z)},$$

wobei  $\mathfrak{P}_\lambda^{(v)}(\Omega)$  dieselben Eigenschaften wie  $\Omega_\lambda^{(v)}(\Omega)$  hat, nur daß die konstanten Koeffizienten dieses Polynoms noch durch die  $c_\lambda^{(v)}$ ,  $(\lambda = 0, \dots, n)$ , mitbestimmt werden. Aus (21) folgt also für die  $n$ -te Partialsumme der Entwicklung (15)

$$s_n(z) = \sum_{v=1}^k \mathfrak{P}_n^{(v)}(\Omega) \left( \frac{P(z)}{\Omega(z_r, z)} \right)^{n+1}.$$

Der Faktor  $\Omega(z_r, z)$  ist jedoch in  $P(z)$  enthalten, und es läßt sich folgender Satz formulieren:

**Satz 2** (Approximationssatz): *Gibt man eine beliebige zu  $\mathfrak{R}$  gehörige Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  und eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige, reguläre und nullstellenfreie Funktion  $g(z)$  vor, dann läßt sich jede in einem Betragbereich  $\mathfrak{R}_\mu: |P(z)| < \mu$*

*( $P(z) = g(z) \prod_{v=1}^k \Omega(z_r, z)$ ) der nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$  eindeutige, reguläre und auf dem Rande noch stetige Funktion  $f(z)$  im Innern von  $\mathfrak{R}_\mu$  gleichmäßig approximieren durch in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige und reguläre Funktionen*

$$(22) \quad s_n(z) = \sum_{v=1}^k \mathfrak{P}_n^{(v)}(\Omega) P_v^{n+1}(z), \quad (P_v(z) = P(z) \Omega^{-1}(z_r, z)),$$

wo  $\mathfrak{P}_n^{(v)}(\Omega)$  eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige und reguläre Funktion der Variablen  $p(z)$  ist, die aus einem homogenen Polynom  $(n + 1)$ -ten Grades in den Ableitungen 0-ter bis  $(n + 1)$ -ter Ordnung der Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  nach der Variablen  $p(\zeta)$ , genommen im Punkte  $p(\zeta) = p_r(z_r)$  in der zugehörigen Ortsuniformisierenden, besteht. Die konstanten Koeffizienten dieses Polynoms werden durch das Verhalten von  $f$  und  $P$  im Punkte  $p_r(z_r)$  bestimmt.

Genauer: Zu jedem abgeschlossenen Bereich  $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mu$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , so daß für  $n > n_0$

$$|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

gleichmäßig für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}^*$  gilt.

Die approximierenden Funktionen stellen sich in dieser Schreibweise sehr übersichtlich dar: Man hat sich  $s_n(z)$  einfach als Summe von  $k(n + 1)$ -ten Potenzen von  $P(z)$  zu denken, in denen nacheinander jeweils eine Primpotenz  $\Omega^{n+1}(z_r, z)$  herausgenommen und durch ein homogenes Polynom in den  $\Omega$ -Ableitungen ersetzt ist, dessen Koeffizienten die Eigenschaften der zu approximierenden Funktion  $f(z)$  im jeweiligen Bezugspunkt  $p_r(z_r)$  ausdrücken.

### III. Entwicklung in allgemeineren relativ einfach zusammenhängenden Bereichen.

1. Die gleichmäßige Approximation einer gegebenen in einem Teilbereich der nichtgeschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$  eindeutigen regulären Funktion  $f(z)$  durch in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige reguläre Funktionen  $s_n(z)$  ist in den Sätzen I

und 2 für spezielle Bereiche, nämlich die Betragbereiche eines endlichen Produktes von Primfunktionen  $P(z)$  durchgeführt worden. Es ist nunmehr zu untersuchen, welchen Platz die Klasse dieser Betragbereiche in der Gesamtheit aller Teilbereiche von  $\mathfrak{R}$  einnimmt. Aus der Definition der Betragbereiche folgt zunächst ihr zu  $\mathfrak{R}$  relativ einfacher Zusammenhang (vgl. II. 1.).

Für relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängende Teilbereiche  $\mathfrak{B}$  und nur für diese gilt der verallgemeinerte RUNGESche Satz (I. 4.), der im Innern von  $\mathfrak{B}$  eine gleichmäßige Approximation jeder in  $\mathfrak{B}$  eindeutigen und regulären Funktion  $F(z)$  durch in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige reguläre Funktionen  $G(z)$  garantiert. Der folgende Satz stellt eine Verschärfung des RUNGESchen Satzes dar, indem die Klasse der approximierenden Funktionen  $G(z)$  auf die Unterklasse der in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutigen und regulären, aber außerhalb von  $\mathfrak{B}$  nullstellenfreien Funktionen  $P(z)$  eingeschränkt wird.

**Satz 3:** Jede in einem Bereich  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ , der relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängend ist, eindeutige und reguläre Funktion  $F(z)$  läßt sich im Innern von  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig durch endliche Produkte von Primfunktionen approximieren, deren Nullstellen zugleich Nullstellen von  $F(z)$  sind.

Genauer: Nach Wahl einer beliebigen Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  in den Variablen  $p(\zeta)$  und  $p(z)$  auf  $\mathfrak{R}$  gibt es zu jedem abgeschlossenen Teilbereich  $\mathfrak{B}^*$  von  $\mathfrak{B}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Funktion

$$P(z) = g(z) \Omega(z_1, z) \dots \Omega(z_k, z),$$

so daß für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}^*$

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon$$

gilt.

Dabei sind die Punkte  $p_v(z_v)$ , ( $v = 1, \dots, k$ ), Nullstellen von  $F(z)$  in  $\mathfrak{B}$ , und  $g(z)$  ist eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige, reguläre und nullstellenfreie Funktion.

Zu beweisen ist zunächst der folgende

**Hilfssatz:** Jede in einem abgeschlossen, relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$  eindeutige, reguläre und nullstellenfreie Funktion  $f(z)$  läßt sich in  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig durch in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige, reguläre und nullstellenfreie Funktionen  $g(z)$  approximieren.

**Beweis des Hilfssatzes:**  $f(z)$  ist noch in einem  $\overline{\mathfrak{B}}$  umfassenden abgeschlossenen Polygonbereich  $\mathfrak{P}$  regulär und nullstellenfrei. Die Anwendung des verallgemeinerten RUNGESchen Satzes liefert zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige und reguläre Funktion  $G(z)^{13)}$ , so daß in  $\mathfrak{P}$  gleichmäßig

$$|f(z) - G(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Bei genügend guter Approximation ist  $G(z)$  in  $\mathfrak{P}$  notwendig nullstellenfrei. Die Nullstellen der ganzen Funktion  $G(z)$ , falls sie im Innern von  $\mathfrak{R}$  überhaupt welche besitzt, müssen dann außerhalb von  $\mathfrak{P}$  liegen.

Man schöpfe  $\mathfrak{R}$  durch eine Folge von abgeschlossenen, ausgezeichneten Polygonbereichen<sup>14)</sup>, beginnend mit  $\mathfrak{P}$  als Kern, normal aus:

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{P} \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots$$

In jedem  $\mathfrak{B}_i$  liegen höchstens endlich viele Nullstellen von  $G(z)$ , und man kann dieselben abzählen:

$$p(b_1), p(b_2), \dots, p(b_k), \dots,$$

<sup>13)</sup> Eine in ganz  $\mathfrak{R}$  eindeutige und reguläre Funktion  $G(z)$  werde im folgenden kurz als ganze Funktion bezeichnet.

<sup>14)</sup> Siehe BEHNKE-STEIN: loc. cit., S. 433f.

indem man die Indices so wählt, daß die in  $\tilde{\mathfrak{B}}_i$  liegenden Nullstellen einen kleineren Index bekommen als die in  $\tilde{\mathfrak{B}}_{i+1} - \tilde{\mathfrak{B}}_i$  gelegenen. Zu diesen abzählbar vielen Nullstellen konstruiert man wie im Beweisgang des WEIERSTRASSschen Produktsatzes<sup>15)</sup> eine ganze Funktion

$$\tilde{G}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [\Omega_k(b_k, z) e^{-s_k(z)}].$$

$G(z)$  unterscheidet sich von  $\tilde{G}(z)$  lediglich durch einen ganzen nullstellenfreien Faktor  $V(z)$ :

$$G(z) = V(z) \tilde{G}(z).$$

Die Konstruktion der konvergenzerzeugenden Faktoren  $e^{-s_k(z)}$  erfolgt so, daß die Funktionen

$$\log \Omega_k(b_k, z) - s_k(z)$$

in  $\tilde{\mathfrak{B}}_{i_k}$  *eindeutig* regulär sind, wenn  $\mathfrak{B}_{i_k}$  jeweils den größten Polygonbereich der Ausschöpfungsfolge  $\mathfrak{B}_i$  bezeichnet, in welchem  $\Omega_k(b_k, z)$  noch nullstellenfrei ist, und die Exponenten  $s_k(z)$  haben die Eigenschaft, daß in  $\mathfrak{B}_{i_k}$

$$|\log \Omega_k(b_k, z) - s_k(z)| < \eta_k$$

gilt, wobei die  $\eta_k$  eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe  $\Sigma \eta_k = \eta$  bilden<sup>16)</sup>.

Da  $\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{B}}_0$  in jedem  $\tilde{\mathfrak{B}}_{i_k}$  enthalten ist, ist

$$l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [\log \Omega_k(b_k, z) - s_k(z)]$$

in  $\mathfrak{P}$  *eindeutig* und regulär, läßt sich also in  $\bar{\mathfrak{B}}$  gleichmäßig durch eine ganze Funktion  $S(z)$  approximieren, und zwar wähle man zu dem anfangs vorgegebenen  $\varepsilon$  ein  $\delta(\varepsilon)$  und dazu eine ganze Funktion  $S(z)$  derart, daß für  $p(z)$  in  $\bar{\mathfrak{B}}$  mit

$$|l(z) - S(z)| < \delta$$

auch

$$|e^{l(z)} - e^{S(z)}| = |\tilde{G}(z) - e^{S(z)}| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

erfüllt ist, wenn  $M = \max_{\text{in } \bar{\mathfrak{B}}} |V(z)|$  ist<sup>17)</sup>.

<sup>15)</sup> Siehe hierzu die Dissertation von H. FLORACK: Reguläre und meromorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen RIEMANNschen Flächen; Schriftenreihe d. Math. Inst. d. Univ. Münster, Heft 1 (1948).

<sup>16)</sup> Ausgehend von einer zum Punkte  $p(b_k)$  gehörigen Primfunktion  $\Omega_k(b_k, z)$  hat man  $\log \Omega_k(b_k, z) - Q_k(z)$  zu bilden, wobei  $Q_k(z)$  ein ABELSches Integral 1. Gattung ist, das in  $\mathfrak{B}_{i_k}$  dieselben Periodizitätsmoduln hat wie  $\log \Omega_k(b_k, z)$ , und diese nunmehr in  $\tilde{\mathfrak{B}}_{i_k}$  *eindeutige* und reguläre Funktion durch eine ganze Funktion  $q_k(z)$  in  $\mathfrak{B}_{i_k}$  zu approximieren derart, daß in  $\tilde{\mathfrak{B}}_{i_k}$  gleichmäßig

$$|\log \Omega_k(b_k, z) - Q_k(z) - q_k(z)| < \eta_k$$

gilt. In obiger Darstellung hat man dann  $Q_k + q_k = s_k$  zu setzen.

<sup>17)</sup> Man hat etwa  $\delta = \log \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2ML} \right)$  zu setzen, wenn  $L = \max_{\text{in } \bar{\mathfrak{B}}} |e^{l(z)}|$  ist.

Aus

$$|l(z) - S(z)| < \delta$$

folgt dann  $e^{l(z) - S(z)} - 1 < \frac{\varepsilon}{2ML}$

und

$$\begin{aligned} |e^{l(z)} - e^{S(z)}| &= |e^{l(z)}| |e^{S(z) - l(z)} - 1| \\ &\leq |e^{l(z)}| (e^{l(z) - S(z)} - 1) \\ &< \frac{\varepsilon}{2ML}. \end{aligned}$$

Es gilt dann gleichmäßig für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}$

$$|G(z) - V(z) e^{S(z)}| = |V(z)| |\tilde{G}(z) - e^{S(z)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$|f(z) - V(z) e^{S(z)}| \leq |f(z) - G(z)| + |G(z) - V(z) e^{S(z)}| < \varepsilon.$$

$g(z) = V(z) e^{S(z)}$  ist die geforderte ganze nullstellenfreie Funktion, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Zum Beweise von Satz 3 werde  $\mathfrak{B}$  durch eine Folge von ausgezeichneten abgeschlossenen Polygonbereichen normal ausgeschöpft. Jeder Bereich  $\mathfrak{B}_j$  dieser Folge enthält höchstens endlich viele Nullstellen von  $F(z)$ . Man kann daher die Ausschöpfungsfolge so wählen, daß die Berandungen der Bereiche  $\mathfrak{B}_j$  keine Nullstellen von  $F(z)$  tragen.

$p_1(z_1), \dots, p_{N_j}(z_{N_j})$  seien die  $N_j$  entsprechend ihrer Ordnung gezählten Nullstellen von  $F(z)$  in  $\mathfrak{B}_j$ . Wählt man nun eine beliebige im Zylindergebiet  $\mathfrak{B}: \Re \times \Re_z$  in den beiden Variablen  $p(\zeta)$  und  $p(z)$  reguläre Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  und fixiert die erste Variable in den  $N_j$  Nullstellen von  $F(z)$  in  $\mathfrak{B}_j$ , so stellt das Produkt

$$\omega_{N_j}(z) = \prod_{v=1}^{N_j} \Omega(z_v, z)$$

eine ganze Funktion dar, deren Nullstellen mit denjenigen von  $F(z)$  in  $\mathfrak{B}_j$  nach Lage und Ordnung genau übereinstimmen. Auf die Funktion

$$f_j(z) = \frac{F(z)}{\omega_{N_j}(z)},$$

die in  $\mathfrak{B}$  eindeutig regulär und in  $\mathfrak{B}_j$  nullstellenfrei ist, wird für den Bereich  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_j$  der Hilfssatz angewandt. Ist  $\varepsilon_j$  eine Nullfolge positiver Zahlen und  $M_j = \max_{\text{in } \mathfrak{B}_j} |\omega_{N_j}(z)|$ , so gibt es zu jedem Index  $j$  eine ganze nullstellenfreie

Funktion  $g_j(z)$ , derart, daß für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}_j$

$$|f_j(z) - g_j(z)| < \frac{\varepsilon_j}{M_j}$$

und damit

$$|F(z) - g_j(z) \omega_{N_j}(z)| < \varepsilon_j$$

ist.

Somit ist eine Folge ganzer Funktionen

$$P_j(z) = g_j(z) \prod_{v=1}^{N_j} \Omega(z_v, z)$$

mit endlich vielen Nullstellen in  $\mathfrak{B}$ , die zugleich Nullstellen von  $F(z)$  sind, und nullstellenfrei außerhalb von  $\mathfrak{B}$  gefunden, die innerhalb von  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig gegen  $F(z)$  konvergiert, womit Satz 3 bewiesen ist.

Die approximierenden Funktionen hängen wesentlich von der gegebenen Funktion  $F(z)$  ab, welche die Nullstellen von  $P_j(z)$  sowie das Verhalten der Faktoren  $g_j(z)$  bestimmt. Letztere hängen außerdem noch von der Wahl der Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  ab.

Hat  $F(z)$  in  $\mathfrak{B}$  nur endlich viele Nullstellen, so ändert sich mit wachsendem  $j$  nur noch der Faktor  $g_j(z)$ .

Satz 3 ermöglicht die Herstellung der Transformation einer Fläche  $\Re$  in eine Fläche  $R$ , wie sie in II. beschrieben worden ist, und damit eine Übertragung

der Sätze 1 und 2 auf eine allgemeinere Klasse von Teilbereichen der nicht-geschlossenen RIEMANNschen Fläche  $\mathfrak{R}$ .

2. Unter allen abgeschlossenen Teilbereichen  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{R}$  greife man nun diejenigen heraus, die sich als aus der Gesamtfläche herausgelöste RIEMANNsche Flächenstücke (oder als eine endliche Summe von solchen) auf einen mehrblättrigen Kreisbereich über dem Einheitskreis der  $w$ -Ebene eineindeutig und i. a. konform abbilden lassen. Der Bildbereich liegt dann stockwerkartig über dem Grundkreis  $|w| \leq 1$ , und die Bilder sämtlicher Randpunkte von  $\mathfrak{B}$  haben die Einheitskreisperipherie zu Grundpunkten.

Die Bereiche  $\mathfrak{B}$  lassen sich analytisch charakterisieren durch die Existenz einer in  $\mathfrak{B}$  eindeutigen regulären Funktion  $F(z)$ , für die im Innern  $|F| < 1$  und auf dem Rande  $|F| = 1$  gilt. Die Zahl  $k$  der Nullstellen von  $F(z)$  in  $\mathfrak{B}$  gibt die Blattzahl des Kreisbereiches an, und da dieser nur endlich viele Verzweigungspunkte besitzt, kann man, falls auch über dem Nullpunkt ein Verzweigungspunkt liegt, einen Punkt  $a$  des Grundkreises ( $0 < |a| < 1$ ) so fixieren, daß über demselben  $k$  schlichte Umgebungen liegen. Bei einer linearen Transformation des Grundkreises in sich mit  $a \rightarrow 0$  geht dann die darüberliegende Fläche in eine solche über, die über dem Nullpunkt unverzweigt ist. Man kann somit die Funktion  $F(z)$  stets so wählen, daß ihre Nullstellen in  $\mathfrak{B}$  von 1. Ordnung in der zugehörigen Ortsuniformisierenden sind.

Ein Teilbereich  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{R}$  mit obigen Eigenschaften soll im folgenden als  $K$ -Bereich bezeichnet werden und  $k$ -fach heißen, wenn  $k$  die minimale Blattzahl der Kreisbereiche ist, auf die sich  $\mathfrak{B}$  eineindeutig und konform abbilden läßt.

**Satz 4:** Zu einem  $k$ -fachen  $K$ -Bereich  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$ , der relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängend ist, läßt sich stets ein Produkt von  $k$  Primfunktionen

$$P(z) = \prod_{v=1}^k \Omega_v(z_v, z)$$

( $p_v(z_v)$  im Innern von  $\mathfrak{B}$ ) finden, so daß der Maximalabstand der Berandungen des Einheitsbetragbereiches  $\mathfrak{R}$ :  $|P(z)| \leq 1$  und des  $K$ -Bereiches  $\mathfrak{B}$  beliebig klein wird.

**Beweis:** In  $\mathfrak{B}$  existiert nach der Definition eines  $k$ -fachen  $K$ -Bereiches eine im abgeschlossenen Bereich  $\mathfrak{B}$  eindeutige reguläre Funktion  $F(z)$  mit  $k$  einfachen Nullstellen im Innern von  $\mathfrak{B}$ , die auf dem Rande vom Betrage 1 ist.  $\mathfrak{B}$  sei ein  $\mathfrak{B}$  umfassender, ebenfalls abgeschlossener Bereich ( $\mathfrak{B} \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}$ ), in welchem  $F(z)$  noch regulär ist. Außerdem soll  $F(z)$  in  $\tilde{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}$  nullstellenfrei sein. Nach Satz 3 gibt es dann zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Funktion

$$P(z) = \prod_{v=1}^k \Omega_v(z_v, z)$$

( $k$  unabhängig von  $\varepsilon$ ), so daß gleichmäßig für  $p(z)$  in  $\tilde{\mathfrak{B}}$

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon$$

gilt. Auf dem Rande von  $\mathfrak{B}$ :  $|F| = 1$  gilt insbesondere

$$1 - \varepsilon < |P(z)| < 1 + \varepsilon.$$

Durch geeignete Wahl von  $\varepsilon$  weicht somit die Berandung  $\mathfrak{E}$ :  $|P(z)| = 1$  des Einheitsbetragbereiches  $\mathfrak{R}$ :  $|P(z)| \leq 1$  beliebig wenig vom Rande des  $K$ -Bereiches  $\mathfrak{B}$  ab.



**Satz 5:** Jeder  $k$ -fache  $K$ -Bereich  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$ , der relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängend ist, läßt sich durch eine Folge von Einheitsbetragbereichen  $\mathfrak{B}^{(l)}$ :  $|P_l(z)| \leq 1$  normal ausschöpfen. Nach Wahl einer beliebigen Primfunktion  $\Omega(\zeta, z)$  in  $\mathfrak{R}$  ist

$$P_l(z) = g_l(z) \prod_{v=1}^k \Omega(z_v, z),$$

wobei  $g_l(z)$  ein ganzer nullstellenfreier Faktor und  $p, (z_v)$   $k$  voneinander verschiedene Punkte im Innern von  $\mathfrak{B}$  sind.

**Beweis:** Der  $K$ -Bereich  $\mathfrak{B}$  ist charakterisiert durch  $|F(z)| \leq 1$  und wird normal ausgeschöpft durch die Teilbereiche  $\mathfrak{B}^{(l)}$ :  $|F(z)| \leq 1 - 1/l$  ( $l = 2, 3, \dots$ ), die ebenfalls  $K$ -Bereiche sind (charakterisiert durch  $F_l(z) = \frac{l}{l-1} F(z)$ ). Die Folge der  $\mathfrak{B}^{(l)}$  läßt sich durch eine Folge von Einheitsbetragbereichen  $\mathfrak{B}^{(l)}$ :  $|P_l(z)| \leq 1$  ersetzen, indem man auf jeden Bereich  $\mathfrak{B}^{(l)}$  Satz 4 anwendet.

Satz 4 garantiert ganz allgemein die Möglichkeit der Ersetzung einer aus  $K$ -Bereichen bestehenden normalen Ausschöpfungsfolge durch eine solche aus Einheitsbetragbereichen von Funktionen  $P(z)$ , so daß folgender Satz gilt:

**Satz 5a:** Jeder relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängende Bereich  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$ , der durch eine Folge von  $K$ -Bereichen normal ausschöpfbar ist, läßt sich auch durch eine Folge von Einheitsbetragbereichen

$$\mathfrak{B}^{(l)}: |g_l(z) \prod_{v=1}^{k_l} \Omega(z_{l_v}, z)| \leq 1$$

normal ausschöpfen.

Die Sätze 5 und 5a dehnen die Gültigkeit der Sätze 1 und 2 auf  $K$ -Bereiche, bzw. Grenzbereiche einer konvergenten Folge von  $K$ -Bereichen aus. Es gilt

**Satz 6:**  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$  sei ein relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängender Bereich, der durch eine Folge von  $K$ -Bereichen normal ausschöpfbar ist.

Dann läßt sich jede in  $\mathfrak{B}$  eindeutige und reguläre Funktion  $f(z)$  im Innern von  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig durch in ganz  $\mathfrak{R}$  reguläre Funktionen gemäß Satz 1 und 2 approximieren, d. h. es gibt zu jedem abgeschlossenen Teilbereich  $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{B}$  ein endliches Produkt von Primfunktionen  $P(z)$ , so daß

1. für  $p(z)$  in  $\mathfrak{B}^*$  die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{v=1}^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(v)} P^n(z) \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(v)}(z) P^n(z) \right)$$

gilt,

2. zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine ganze Funktion

$$s_n(z) = \sum_{v=1}^k \mathfrak{P}_n^{(v)}(\Omega) P_r^{n+1}(z), \quad (P_r(z) = P(z) \Omega^{-1}(z_v, z))$$

existiert, für die gleichmäßig in  $\mathfrak{B}^*$

$$|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

gilt.

3. Von Satz 6 sollen kurz einige Spezialfälle erwähnt werden.

Die Aussage von Satz 6 gilt sicher für alle schlichtartigen relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfach zusammenhängenden Bereiche  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$ . Diese Tatsache folgt aus

**Satz 7:** Jeder schlichtartige  $k$ -fach zusammenhängende Teilbereich  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$  ohne isolierte Randpunkte ist ein  $k$ -facher  $K$ -Bereich.

Dieser Satz ist lediglich eine andere Formulierung eines Satzes von BIEBERBACH<sup>18)</sup>, der die umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung eines beliebigen  $k$ -fach zusammenhängenden ebenen Bereiches ohne isolierte Randpunkte auf eine  $k$ -blättrige Kreisscheibe garantiert. Die Forderung, daß keine isolierten Randpunkte vorhanden sein dürfen, spielt hier keine Rolle, wenn man beachtet, daß der in Satz 6 geforderte relativ zu  $\mathfrak{R}$  einfache Zusammenhang von  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$  einen isolierten Randpunkt ausschließt<sup>19)</sup>.

Die Zahl  $k$  der Nullstellen von  $P(z)$  ist gleich der Zusammenhangszahl des Bereiches.

Ist  $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{R}$  ein *schlechthin* einfach zusammenhängendes Gebiet, also nach dem RIEMANNschen Abbildungssatz auf eine schlichte Kreisscheibe konform abbildbar ( $k=1$ ), so ist  $P(z)$  eine Primfunktion, deren Nullstelle  $p_0(z_0)$  innerhalb  $\mathfrak{G}$  frei wählbar ist. Die mittels  $w = P(z)$  transformierte Fläche  $R$  enthält das Bild  $G$  von  $\mathfrak{G}$  als Einheitskreisscheibe um den Nullpunkt, in deren Innern jede in  $G$  eindeutige reguläre Funktion  $f(w)$  in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist. Wie diese Entwicklung in  $\mathfrak{G}$  aussieht, ergibt sich aus I. (2), wenn man als Elementarfunktion

$$a(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \log(P(\zeta) - P(z))$$

nimmt, die nicht zur ganzen Fläche  $\mathfrak{R}$  gehört, wohl aber zu einem  $\mathfrak{G}$  enthaltenden Teilgebiet von  $\mathfrak{R}$ . Nach I. (2) gilt, gleich in der Variablen  $p(z)$  auf  $\mathfrak{R}$  geschrieben,

$$\begin{aligned} s_n(z) - s_{n-1}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{R.d.\mathfrak{G}} P^n(z) \frac{P(\zeta) - P(z)}{P^n + 1(\zeta)} f(\zeta) a(\zeta, z) d\zeta \\ &= P^n(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{R.d.\mathfrak{G}} f(\zeta) \frac{P'(\zeta)}{P^n + 1(\zeta)} d\zeta \\ &= c_n P^n(z). \end{aligned}$$

Für Bereiche *höheren Geschlechts* schließlich hat P. MATILDI<sup>20)</sup> bewiesen, daß jedes RIEMANNsche Flächenstück  $A$ , dessen Rand ein einziges Kontinuum ist, sich eineindeutig und i. a. konform auf eine mehrblättrige Kreisscheibe gleicher Zusammenhangszahl abbilden läßt und mithin ein  $K$ -Bereich ist.

<sup>18)</sup> BIEBERBACH, L.: Über einen RIEMANNschen Satz aus der Lehre von der konformen Abbildung; Sitzgeber. Berl. math. Ges. **24**, 6—9 (1925).

<sup>19)</sup> Ein isolierter Randpunkt könnte höchstens zugleich Randpunkt von  $\mathfrak{R}$  sein, was jedoch wegen  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$  nicht möglich ist.

<sup>20)</sup> MATILDI, P.: Sulla rappresentazione conforme di domini appartenenti a superficie di RIEMANN su domini di un tipo canonico assegnato; Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. math. **2**, 14, 81—90 (1948).

# Über die CRAMÉRSCHEN asymptotischen Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von  
HANFRIED LENZ in München.

## Einleitung.

Sind  $x_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) unabhängige zufällige Größen mit den Verteilungsfunktionen  $F_\nu(x_\nu)$ , dem gemeinsamen Mittelwert  $\bar{x}_\nu = 0$  und den Streuungen  $\overline{x_\nu^2} = \sigma_\nu^2$  mit  $\sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu^2 = \sigma^2$ , so gilt unter recht allgemeinen Voraussetzungen für die Verteilungsfunktion  $F(x)$  der zufälligen Größe  $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sigma}$  die EDGEWORTH-CRAMÉRSCH asymptotische Entwicklung (CRAMÉR 1, 2; HSU; BERGSTRÖM<sup>1</sup>)

$$(1) \quad F(x) = \Phi(x) + \sum_{\mu=1}^{r-3} n^{-\frac{\mu}{2}} \left[ \sum_{j=1}^{\mu} b_{j\mu n} \left( \frac{d}{dx} \right)^{\mu+2j} \Phi(x) \right] + \Theta_r \cdot n^{-\frac{r}{2}}.$$

Dabei ist  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi$ .  $\Theta_r$  bedeute ein für allemal eine Größe, deren Betrag unter einer nur von  $r$  abhängigen Schranke liegt, doch braucht  $\Theta_r$  nicht jedesmal dieselbe Größe zu bedeuten, auch nicht bei mehrmaligem Auftreten in einer Gleichung. Die Konstanten  $b_{j\mu n}$  hängen von den Momenten der  $x_\nu$  in ziemlich komplizierter Weise ab.

Um diese Entwicklungen zu gewinnen, hat man folgende Teilprobleme zu lösen:

1. Asymptotische Entwicklung der charakteristischen Funktion;
2. Übertragung des Ergebnisses auf  $F(x)$ .

Wir behandeln hier nur das Problem 1 und verweisen hinsichtlich des Problems 2 auf die Literatur (CRAMÉR 1, 2; HSU). Die hier verwendete Methode beruht auf dem Additionstheorem der HERMITESCHEN Polynome

$$He_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d}{dx} \right)^m e^{-\frac{x^2}{2}}$$

und liefert asymptotische Darstellungen für  $F(x)$ , die nach der Normalverteilung und ihren Ableitungen fortschreiten und deren Koeffizienten sich übersichtlich durch Mittelwerte über HERMITESCHE Polynome der  $x$ , ausdrücken (siehe Formel (26) in Nr. 10).

## § 1. Asymptotische Entwicklung der charakteristischen Funktion, falls diese regulär ist.

1. Den Mittelwert oder Erwartungswert einer Funktion von zufälligen Größen bezeichnen wir durch Überstreichen, wobei über alle unter dem Quer-

<sup>1</sup>) Vgl. die Literaturhinweise am Schluß der Arbeit.

streich stehenden zufälligen Größen zu mitteln ist. Dabei verwenden wir für zufällige Größen stets die Buchstaben  $x$  und  $y$ , gegebenenfalls mit Indizes. Ist die zufällige Größe  $y$  ein lineares Polynom  $p(x_1, \dots, x_k)$  der zufälligen Größen  $x_r$  und ist  $f(y)$  eine stetige Funktion, so gelten die Regeln

$$(2) \quad \overline{f(y)} = \overline{f[p(x_1, x_2, \dots, x_k)]},$$

$$(3) \quad \overline{a \cdot g(x_1, \dots, x_k) + b \cdot h(x_1, \dots, x_k)} = \overline{a \cdot g(x_1, \dots, x_k)} + \overline{b \cdot h(x_1, \dots, x_k)}$$

und – wegen der Unabhängigkeit –

$$(4) \quad \overline{g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \dots g_k(x_k)} = \overline{g_1(x_1)} \cdot \overline{g_2(x_2)} \dots \overline{g_k(x_k)}.$$

2. Die charakteristische Funktion  $e^{i y t}$  (LÉVY 1) einer zufälligen Größe  $y$  mit der Verteilungsfunktion  $F(y)$  ist bekanntlich im Horizontalstreifen  $|\operatorname{Im} t| < R$  der  $t$ -Ebene regulär, wenn die Bedingung

$$(5) \quad 1 - F(|y|) + F(-|y|) = o(e^{-K|y|})$$

für jedes  $K < R$  gilt (LÉVY 2, S. 40). Weiter ist, wenn das  $p$ -te absolute Moment  $|y|^p$  für eine natürliche Zahl  $p$  existiert,

$$(6) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^p e^{i y t} = \left(\frac{d}{dt}\right)^p e^{i y t} = i^p \overline{y^p} e^{i y t}.$$

Im Fall (5) gilt daher die Entwicklung (über HERMITESCHE Polynome vgl. MAGNUS-OBERHETTINGER, S. 80 ff.)

$$(7) \quad e^{i y t} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H e_m(y)}{m!} (i t)^m.$$

Weil der Konvergenzradius mindestens gleich  $R$  ist, folgt für das  $m$ -te „HERMITESCHE Moment“ die Abschätzung

$$(8) \quad \left| \frac{H e_m(y)}{m!} \right| = o(r^{-m}) \quad \text{für } 0 < r < R.$$

3. Wir setzen von unseren Verteilungen  $F_\nu(x)$  jetzt voraus, daß es positive Zahlen  $k_1, k_2, k_3$  gebe, für die die Ungleichungen

$$(F I) \quad \sigma_\nu < k_1$$

$$(F II) \quad \sigma^2 = \sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu^2 > k_2 \cdot n$$

$$(F III) \quad \left| \frac{H e_m\left(\frac{x_\nu}{\sigma_\nu}\right)}{m!} \right| < k_3^m$$

gelten, und zwar für alle  $\nu$ . (F III) folgt aus (5) für  $y = \frac{x_\nu}{\sigma_\nu}$ , ist also sinnvoll.

4. Aus der Identität

$$e^{\frac{(t\sigma)^2}{2} + i x t \sigma} = \prod_{\nu=1}^n e^{\frac{(t\sigma_\nu)^2}{2} + i \frac{x_\nu}{\sigma_\nu} t \sigma_\nu},$$

oder

$$(9) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H e_m(x)}{m!} (i t \sigma)^m = \prod_{\nu=1}^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{H e_\mu\left(\frac{x_\nu}{\sigma_\nu}\right)}{\mu!} (i t \sigma_\nu)^\mu$$

folgt durch Koeffizientenvergleich das bekannte Additionstheorem der HERMITESCHEN Polynome (v. MISES, S. 53; MAGNUS-OBERHETTINGER, S. 82). Wegen (2), (3) und (4) dürfen wir zu den Mittelwerten übergehen und erhalten

$$(10) \quad \frac{He_m(x)}{m!} \cdot \sigma^m = \sum_{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = m} \frac{\sigma_1^{\mu_1} \dots \sigma_n^{\mu_n}}{\mu_1! \dots \mu_n!} He_{\mu_1} \left( \frac{x_1}{\sigma_1} \right) \dots He_{\mu_n} \left( \frac{x_n}{\sigma_n} \right).$$

Nun ist  $\overline{He_0 \left( \frac{x_r}{\sigma_r} \right)} = 1$ ,  $\overline{He_1 \left( \frac{x_r}{\sigma_r} \right)} = \overline{He_2 \left( \frac{x_r}{\sigma_r} \right)} = 0$ , d. h. in der Summe auf der rechten Seite von (10) verschwinden alle Glieder, in denen auch nur einer der Indizes  $\mu_r$  gleich 1 oder 2 ist. Wir können (10) also wie folgt umordnen:

$$(11) \quad \frac{He_m(x)}{m!} \sigma^m = \sum_{k=1}^{\left[ \frac{m}{3} \right]} \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_k = m \\ \lambda_i \geq 3}} \sum_{\substack{r_p + \dots + r_q = m \\ r_p \neq r_q}} \sum_{\substack{\lambda_1 \dots \lambda_k \\ \lambda_1! \dots \lambda_k!}} \sigma_{r_1}^{\lambda_1} \dots \sigma_{r_k}^{\lambda_k} \cdot \overline{He_{\lambda_1} \left( \frac{x_{r_1}}{\sigma_{r_1}} \right)} \dots \overline{He_{\lambda_k} \left( \frac{x_{r_k}}{\sigma_{r_k}} \right)},$$

wobei über alle verschiedenen derartigen Ausdrücke zu summieren ist, die sich aus den  $x_r$  bilden lassen.

5. Jeder Summand ist nach (F I) und (F III) kleiner als  $(k_1 k_2)^m$ . Die Anzahl der Summanden in der inneren Summe ist kleiner als  $n^{\left[ \frac{m}{3} \right]}$ .

Die Anzahl der möglichen Indexverteilungen  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  ist kleiner als die Zahl  $p(m)$  der Partitionen, d. h. Zerlegungen in ganze, positive Summanden, von  $m$ . Aus der fast trivialen Ungleichung

$$p(m) \leq p(m-1) + p(m-2) + \dots + p(1) + 1$$

erhalten wir durch Induktion leicht die grobe Abschätzung  $p(m) \leq 2^m$ . Daher wird mit der Abkürzung  $k_4 = 2 k_1 k_2 k_3^{-1}$  wegen (F II)

$$(12) \quad \left| \frac{He_m(x)}{m!} \right| \leq k_4^m \cdot n^{\left[ \frac{m}{3} \right]} - \frac{m}{2} \quad (\text{CRAMÉR I, S. 49}).$$

Falls die Verteilungen  $F_r(x_r)$  alle symmetrisch sind, verschwinden ihre HERMITESCHEN Momente ungerader Ordnung, und es wird, wie eine entsprechende Betrachtung zeigt,

$$(12a) \quad \left| \frac{He_m(x)}{m!} \right| \leq k_4^m \cdot n^{\left[ \frac{m}{4} \right]} - \frac{m}{2}.$$

6. Wendet man (12) auf die Entwicklung (7) (für  $y = x$ ) an unter der Voraussetzung (mit festem  $\alpha > 0$ )

$$(13) \quad |t| \leq \frac{n^{1/6}}{(1+\alpha)k_4},$$

so ergibt sich, wenn man  $\vartheta = \sum_{\mu=0}^{\infty} (1+\alpha)^{-3\mu}$  setzt,

$$(14) \quad \left| e^{ixt} - e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{He_m(x)}{m!}} (it)^m \right| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} |t k_4|^r \cdot \vartheta \cdot \left| n^{\left[ \frac{r}{3} \right]} - \frac{r}{2} \right| + |t k_4| n^{\left[ \frac{r+1}{3} \right]} - \frac{r+1}{2} + |t k_4|^3 \cdot n^{\left[ \frac{r+2}{3} \right]} - \frac{r+2}{2} \right|.$$

Weil (für alle  $h \geq 0$ )  $\frac{r+h}{2} - \left\lfloor \frac{r+h}{3} \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{r+2}{3}$  ist (CRAMÉR 1, S. 48), folgt daraus (mit von  $r$  unabhängigem  $k_5 > 0$ )

$$(15) \quad \left| e^{\frac{t}{\sigma} x} - e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{He_m(x)}{m!}} (it)^m \right| \leq k_5 \cdot (|t|^r + |t|^{r+2}) \cdot n^{-\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(vgl. CRAMÉR 1, S. 45). Ist  $\frac{r+2}{3} = q - 2$  eine ganze Zahl, so wird (mit von  $r$  unabhängigem  $k_6$ )

$$(15a) \quad \left| e^{\frac{t}{\sigma} x} - e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{m=0}^{3q-9} \frac{He_m(x)}{m!}} (it)^m \right| \leq k_6 \cdot (|t|^{3q-8} + |t|^{3q-6}) \cdot n^{1-\frac{q}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Es sei noch bemerkt, daß für die Gültigkeit der Entwicklung (15) nicht vorausgesetzt zu werden braucht, daß die  $F_r(x_r)$  monotone Funktionen sind, wenn sich nur die Zulässigkeit der in (6) verwendeten Differentiationen unter dem Integralzeichen anderweitig begründen läßt.

## § 2. Einschränkung der Voraussetzungen.

7. An Stelle von (F III) fordern wir jetzt nur noch die gleichmäßige Beschränktheit der  $r$ -ten absoluten Momente der  $x_r$  für ein festes  $r \geq 3$ , also die Existenz einer Zahl  $k_7 > 0$ , so daß für alle  $r$

$$(F IV) \quad \left| \frac{x_r}{\sigma_r} \right| < k_7$$

wird. Wir können dann auf die Funktion  $e^{\frac{1}{2} \left( \frac{t \sigma_r}{\sigma} \right)^2} \cdot e^{\frac{x_r}{\sigma} t}$  die TAYLORSche Formel mit Integralrestglied (LENSE S. 59) anwenden und erhalten nach kurzer Rechnung unter Berücksichtigung von (6)

$$(16) \quad e^{\frac{x_r}{\sigma} t} = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t \sigma_r}{\sigma} \right)^2} \left[ \sum_{m=0}^{r-1} \frac{He_m \left( \frac{x_r}{\sigma_r} \right)}{m!} \left( it \frac{\sigma_r}{\sigma} \right)^m + R_{r,r} \right]$$

mit

$$(16a) \quad R_{r,r} = i^r \int_0^{\frac{t \sigma_r}{\sigma}} \frac{\left( t \frac{\sigma_r}{\sigma} - \tau \right)^{r-1}}{(r-1)!} e^{\frac{\tau^2}{2}} \cdot e^{\frac{x_r}{\sigma_r} \tau} \cdot He_r \left( \frac{x_r}{\sigma_r} - i \tau \right) d\tau.$$

Wir wollen  $R_{r,r}$  abschätzen für  $|t| \leq \sqrt{n}$ . Dann liegen  $\left| \frac{t \sigma_r}{\sigma} \right|$  und  $|\tau|$  in (16) und (16a) unter einer von  $r$  und  $n$  unabhängigen Schranke, es wird also

$e^{\frac{x_r}{\sigma_r} \tau} He_r \left( \frac{x_r}{\sigma_r} - i \tau \right) = \Theta_r$  und daher

$$(17) \quad |R_{r,r}| = \Theta_r \cdot e^{\frac{1}{2} \left( \frac{t \sigma_r}{\sigma} \right)^2} \cdot \frac{\left( t \frac{\sigma_r}{\sigma} \right)^r}{r!} = \Theta_r \cdot |t|^r \cdot n^{-\frac{r}{2}}.$$

<sup>2)</sup> Über die Bedeutung von  $\Theta_r$  s. Einleitung.

8. Nun ist

$$(18) \quad \overline{e^{ixt}} = \prod_{v=1}^n e^{\overline{i \frac{x_v t}{\sigma_v}}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \prod_{v=1}^n \left[ \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\overline{He_m\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)}}{m!} \left(i t \frac{\sigma_v}{\sigma}\right)^m + R_{vr} \right].$$

Die eckigen Klammern konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1, daher ist der relative Fehler bei Vernachlässigung aller Restglieder von der Größenordnung

$$\Theta_r \cdot |t|^r \cdot n^{1-\frac{r}{2}}; \text{ wir können schreiben}$$

$$(19) \quad \overline{e^{ixt}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \prod_{v=1}^n \left[ \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\overline{He_m\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)}}{m!} \left(i t \frac{\sigma_v}{\sigma}\right)^m \right] + \Theta_r \cdot |t|^r \cdot n^{1-\frac{r}{2}} \right\}.$$

9. Wir führen nun Hilfsverteilungen  $G_v(y_v)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) ein durch die Forderungen

$$(20) \quad \overline{He_m\left(\frac{y_v}{\sigma_v}\right)} = \begin{cases} \overline{He_m\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)} & \text{für } 0 \leq m < r \\ 0 & \text{für } m \geq r. \end{cases}$$

Die Existenz solcher (allerdings nicht monotonen) Verteilungen sieht man aus der folgenden expliziten Darstellung ihrer Ableitungen:

$$(21) \quad \frac{dG_v(y_v)}{dy_v} = \frac{e^{-\frac{y_v^2}{2\sigma_v^2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_v} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\overline{He_m\left(\frac{x_v}{\sigma_v}\right)}}{m!} \cdot He_m\left(\frac{y_v}{\sigma_v}\right).$$

Die Gleichungen (20) für die HERMITESchen Momente der  $y$ , folgen daraus unmittelbar wegen der bekannten Orthogonalitätseigenschaften der HERMITESchen Polynome (MAGNUS-OBERHETTINGER, S. 82). Die  $G_v(y_v)$  sind durch (20) übrigens eindeutig bestimmt, weil ihre charakteristischen Funktionen regulär sind.

Wir setzen weiter

$$(22) \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{\sigma}.$$

$y$  ist also die zufällige Größe mit der Verteilungsfunktion  $G(y)$ , die dadurch entsteht, daß man die  $x_v$  durch solche Vergleichsgrößen ersetzt, die mit ihnen in allen HERMITESchen (also auch gewöhnlichen) Momenten bis zum  $(r-1)$ -ten übereinstimmen und deren höhere HERMITESche Momente verschwinden oder, indem man die Entwicklung der  $F_v(x_v)$  nach der Normalverteilungsfunktion von  $\frac{x_v}{\sigma_v}$  und ihren Ableitungen nach der  $(r-1)$ -ten Ableitung abbricht.

10. Aus (19) wird jetzt

$$(23) \quad \overline{e^{ixt}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \prod_{v=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{He_m\left(\frac{y_v}{\sigma_v}\right)}}{m!} \left(i t \frac{\sigma_v}{\sigma}\right)^m + \Theta_r |t|^r \cdot n^{1-\frac{r}{2}}$$

oder nach (7) und (9)

$$(24) \quad \overline{e^{ixt}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{He_m(y)}}{m!} (it)^m + \Theta_r |t|^r n^{1-\frac{r}{2}} \right\} = \overline{e^{iyt}} + \Theta_r |t|^r n^{1-\frac{r}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Die Hilfsverteilungen  $G_r(y_r)$  haben offenbar reguläre charakteristische Funktionen und genügen der Forderung (F III). Die Entwicklung (7) gilt für alle  $\frac{y_r}{\sigma_r}$  und für  $y$ . Daher können wir auf  $\overline{e^{iyt}}$  unser Ergebnis (15a) anwenden und erhalten für  $q=r$  (vgl. CRAMÉR 1, S. 45; 2, S. 71)

$$(25) \quad \overline{e^{ixt}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{m=0}^{3r-9} \frac{\overline{He_m(y)}}{m!} (it)^m = \Theta_r \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot [|t|^r + |t|^{3r-6}] \cdot n^{1-\frac{r}{2}},$$

solange (13) gilt. Setzen wir dagegen  $r=3q-8$ , so wird für  $m < r$   $\overline{He_m(y)} = \overline{He_m(x)}$ , und daher ergibt sich nach kurzer Vereinfachung

$$(25a) \quad \overline{e^{ixt}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{m=0}^{3q-9} \frac{\overline{He_m(x)}}{m!} (it)^m = \Theta_q \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} (|t|^{3q-8} + |t|^{3q-6}) n^{1-\frac{q}{2}}.$$

Diese Abschätzung unterscheidet sich nur unwesentlich von (15a). Man sieht weiter leicht, daß (25) auch gilt, wenn die  $y_r$  nicht durch (20) und (21) erklärt werden, sondern irgendwelche zufällige Größen sind, deren Momente bis zum  $(r-1)$ -ten mit denen der  $x_r$  übereinstimmen und deren absolute Momente bis zum  $(3r-8)$ -ten unter einer von  $n$  (und damit von  $r$ ) unabhängigen Schranke liegen. Das folgt einfach durch Anwendung von (25) und (25a).

Mit Hilfe der Methoden von CRAMÉR oder HSU erhält man aus (25), falls alle  $F_r(x_r)$  die CRAMÉRSche Bedingung

$$(C) \quad \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \left| e^{i \frac{x_r}{\sigma_r} t} \right| < 1 - \delta < 1 \quad (\text{CRAMÉR 2, S. 81})$$

erfüllen, die asymptotische Formel

$$(26) \quad F(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi - e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sum_{m=3}^{3r-9} \frac{\overline{He_m(y)}}{m!} He_{m-1}(x) \right] = \Theta_r \cdot n^{1-\frac{r}{2}}.$$

11. Falls alle  $F_r(x_r)$  übereinstimmen, gilt für die HERMITESchen Momente von  $x$  und  $y$  die explizite Formel (mit  $s = e_1 + e_2 + \dots + e_k$ )

$$(27) \quad \frac{\overline{He_m(y)}}{m!} = n^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{\substack{\mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k = m \\ 3 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < r}} \frac{n(n-1) \dots (n+1-s)}{e_1! e_2! \dots e_k!} \times \\ \times \left| \frac{He_{\mu_1} \left( \frac{x_1}{\sigma_1} \right)}{\mu_1!} \right| e_1 \dots \left| \frac{He_{\mu_k} \left( \frac{x_k}{\sigma_k} \right)}{\mu_k!} \right| e_k.$$

Sie ergibt sich aus (11) unter Berücksichtigung von  $\sigma = \sigma_1 \sqrt{n}$  und der Tatsache, daß die Zahl der verschiedenen Belegungen von  $n$  Stellen mit  $e_1$  Ziffern  $\mu_1$ ,  $e_2$  Ziffern  $\mu_2$ ,  $\dots$ ,  $e_k$  Ziffern  $\mu_k$  gleich

$$\frac{n(n-1) \dots (n+1-s)}{e_1! e_2! \dots e_k!}$$

ist.



**Literatur.**

BERGSTRÖM, H.: On asymptotic expansions of probability functions. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 34 S. — CRAMÉR, H.: 1. On the composition of elementary errors. Skand. Aktuarietidskr. 11, 13—74 u. 141—180 (1928); 2. Random variables and probability distributions. Cambridge Tract No. 36, Cambridge 1937; Chapter VII. — HSU, P. L.: The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. Ann. of Math. Statistics XVI, 1—29 (1945). — LENSE, J.: Vorlesungen über höhere Mathematik. München 1948. — LÉVY, P.: 1. Calcul des probabilités. Paris 1925; 2. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris 1937. — MAGNUS-OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943. — v. MISES, R.: Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Z. 4, 1—97 (1919).

*(Eingegangen am 2. Mai 1952.)*

## Zur algebraischen Geometrie 16. Vielfältigkeiten von abstrakten Ketten.

Von

B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

### Vorbemerkung zur Terminologie.

ANDRÉ WEIL hat in seinem Buch „Foundations of algebraic Geometry“ die algebraische Geometrie auf eine neue Basis gestellt und dabei auch die alte Terminologie durch eine radikal neue ersetzt. Im Zentrum stehen bei ihm — mit Recht — die absolut irreduziblen Mannigfaltigkeiten, die er kurzerhand Varieties nennt. Er unterscheidet scharf zwischen einer Vereinigungsmenge solcher Varieties (bunch of varieties) und einer formalen Summe von Varieties derselben Dimension (cycle). Die Unterscheidung dieser beiden ganz verschiedenen Begriffe, die bisher durch dasselbe Wort Mannigfaltigkeit (= variety) gedeckt wurden, scheint mir unbedingt geboten; die Wahl der Worte kommt mir aber nicht glücklich vor. Ich möchte daher den folgenden Vorschlag machen, der durch Gespräche und Vorträge in Paris und Lüttich schon vorbereitet wurde.

Vorschlag	Engl. Äquivalent	ANDRÉ WEIL	bisher üblich
Vielfältigkeit	variety	bunch of varieties	algebr. Mannigfaltigk.
Teil	part		Teilmannigfaltigkeit
unteilbare V.	indivisible var.	variety	absolut irreduzible M.
V. über einem Körper K	var. over a field K	regular algebr. bunch over K	
irreduzible V.	irreducible var.		irreduzible M.
K gut für V	K good for V	K field of definition for V	
Kette	chain	cycle	algebr. Mannigfaltigk.
Kurve	curve	bunch of curves	algebr. Kurve
Fläche	surface	bunch of surfaces	algebr. Fläche
Vielfältigkeit von Ketten	variety of chains		algebr. System von Mannigfaltigkeiten
Spezialisierung	specialization	specialization	relationstreue Spezialisierung

Der Grund, warum das Wort “cycle” durch “chain” ersetzt wurde, ist dieser. WEIL versteht unter “cycles” nur solche Ketten, deren Bestandteile auf der betrachteten Vielfältigkeit nicht singular sind. Diese Einschränkung ist aber in einer allgemeinen Theorie der Ketten unzweckmäßig.

### Einleitung.

ANDRÉ WEIL hat neben den gewöhnlichen unteilbaren Vielfältigkeiten in affinen oder projektiven Räumen noch “abstract Varieties” eingeführt, die dachziegelartig von gewöhnlichen Vielfältigkeiten  $V_x$  überdeckt werden,

so daß jeder Punkt  $P$  der abstrakten Vielfältigkeit  $V$  von mindestens einem Punkt  $P_a$  eines Bausteines  $V_a$  bedeckt wird. Er stellte mir 1947 die Frage, ob der von CHOW und mir definierte Begriff der Vielfältigkeit von Ketten sich auch für Ketten auf einer abstrakten Vielfältigkeit definieren ließe. Nach einem mißglückten Versuch gelang es mir, eine Antwort zu finden, die ich im Oktober 1947 WEIL brieflich mitgeteilt habe. Etwas vereinfacht und mit ausführlichen Beweisen versehen, soll diese Lösung hier dargestellt werden.

Der Grundgedanke dieser Lösung ist folgender. Statt eine Vielfältigkeit durch Gleichungen zu definieren, kann man sie auch als Vereinigung von irreduziblen Vielfältigkeiten definieren, wobei die Punkte einer irreduziblen Vielfältigkeit durch Spezialisierung aus einem allgemeinen Punkt hergeleitet werden. Genau so kann man auch eine Vielfältigkeit von Ketten als Vereinigung von irreduziblen Vielfältigkeiten definieren, wobei die Ketten einer irreduziblen Vielfältigkeit durch Spezialisierung einer allgemeinen Kette hervorgehen. Es handelt sich also nur noch darum, den Begriff Spezialisierung für Ketten auf einer abstrakten Vielfältigkeit zu definieren. Das soll in § 4 geschehen.

In § 1–3 sollen die Grundbegriffe der bisherigen Theorie der Ketten unter Zugrundelegung der neuen Terminologie erklärt werden. Dabei habe ich mich dem Standpunkte von WEIL weitgehend genähert: nicht die irreduziblen, sondern die unteilbaren Vielfältigkeiten stehen im Zentrum der Aufmerksamkeit. Der Grundkörper wird jeweils so erweitert, daß alle vorkommenden Vielfältigkeiten in unteilbare zerfallen und daß keine störenden inseparablen Körpererweiterungen auftreten. Dazu genügt es, den Körper so zu erweitern, daß die zugeordneten Formen dieser Vielfältigkeiten in absolut irreduzible Faktoren zerfallen.

### § 1. Grundbegriffe.

Als Grundkörper nehmen wir einen beliebigen Körper  $k$ . Man kann mit HODGE und PEDOE  $k$  als Primkörper annehmen, aber es ist nicht unbedingt notwendig. Der universelle Erweiterungskörper  $\Omega$  wird durch Adjunktion von abzählbar vielen Unbestimmten und algebraischem Abschluß aus  $k$  erhalten. Alle Koordinaten von Punkten und alle Koeffizienten von Gleichungen werden immer aus  $\Omega$  entnommen.

Statt des festen Universalkörpers  $\Omega$  könnte man auch einen „wachsenden Erweiterungskörper“ betrachten, der nach Bedarf durch Adjunktion von Unbestimmten und algebraischen Funktionen erweitert werden kann. Demgegenüber hat der feste Universalkörper den Vorteil, eine Menge zu sein. Die Lösungen eines Gleichungssystems in  $\Omega$  bilden also auch eine Menge. Ein weiterer Vorteil ist, daß man zu je zwei Teilkörpern von  $\Omega$  immer einen Vereinigungskörper bilden kann. Mit  $K$  sollen Zwischenkörper bezeichnet werden, die  $k$  umfassen und in  $\Omega$  enthalten sind. Diese Zwischenkörper sollen immer durch Adjunktion von endlich vielen Elementen an  $k$  erzeugt werden können.

Ein Zwischenkörper  $L$  heißt *separabel erzeugbar* über  $K$ , wenn  $L$  aus  $K$  erzeugt werden kann durch Adjunktion von algebraisch unabhängigen Elementen und separablen algebraischen Funktionen dieser Elemente.

Ein Punkt des affinen Raumes  $R_n$  ist eine Reihe von  $n$  Koordinaten  $p_1, \dots, p_n$  aus  $\Omega$ . Ein Punkt des projektiven Raumes  $S_n$  ist ein Strahl des affinen Raumes  $R_{n+1}$ , bestehend aus allen Punkten  $(\omega p_0, \omega p_1, \dots, \omega p_n)$ , wobei  $(p_0, \dots, p_n)$  ein fester von  $(0, \dots, 0)$  verschiedener Punkt von  $R_{n+1}$  ist und  $\omega$  alle Elemente von  $\Omega$  durchläuft.

Die Menge aller Punkte von  $R_n$  oder  $S_n$ , die einem endlichen System von algebraischen Gleichungen

$$f_k(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad \text{oder} \quad f_k(p_0, \dots, p_n) = 0$$

genügen, wobei die  $f_k$  im ersten Fall Polynome, im zweiten Fall Formen mit Koeffizienten aus  $\Omega$  sein sollen, heißt eine *Vielfältigkeit*. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Menge nicht leer ist. Die übliche Bezeichnung „algebraische Mannigfaltigkeit“ möchte ich vermeiden, erstens weil sie zu lang ist, zweitens weil in der Topologie der Begriff Mannigfaltigkeit (manifold) eine andere Bedeutung hat. Man könnte mit SCHLÄFLI statt Vielfältigkeit auch Totalität sagen.

Eine Vielfältigkeit, die sich als Vereinigung von zwei echten *Teilen* (d. h. Teilvielfältigkeiten) darstellen läßt, heißt *zerlegbar*. Ist eine solche Zerlegung unmöglich, so heißt die Vielfältigkeit *unteilbar*.

Der Begriff unteilbar ist nicht mit *irreduzibel* zu verwechseln. Eine Vielfältigkeit, die durch Gleichungen mit Koeffizienten aus einem bestimmten Körper  $K$  definiert ist, möge eine *Vielfältigkeit über  $K$*  heißen. Läßt sie sich nicht zerlegen in echte Teile, die wieder Vielfältigkeiten über  $K$  sind, so heißt sie *irreduzibel über  $K$* . Eine unteilbare Mannigfaltigkeit aber bleibt irreduzibel bei jeder Körpererweiterung: sie ist *absolut irreduzibel*.

Ein Punkt  $P$  heißt eine *Spezialisierung* eines Punktes  $X$  in bezug auf einen Körper  $K$ , wenn alle Gleichungen  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , mit Koeffizienten aus  $K$ , oder im projektiven Falle alle homogenen Gleichungen  $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ , die für den Punkt  $X$  gelten, richtig bleiben bei Ersetzung von  $X$  durch  $P$ . Eine über  $K$  irreduzible Vielfältigkeit  $V$  besitzt einen *allgemeinen Punkt*  $X$ , aus dem alle Punkte von  $V$  durch Spezialisierung in bezug auf  $K$  hervorgehen. Der allgemeine Punkt ist bis auf Isomorphismen über  $K$  eindeutig durch  $V$  bestimmt.

Im affinen Fall heißt das, daß die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  eindeutig bestimmt sind bis auf einen auf alle  $x_k$  anzuwendenden Körperisomorphismus, der die Elemente von  $K$  unverändert läßt. Im projektiven Fall sind natürlich die  $x_k$  nur bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\omega$  eindeutig bestimmt. Numeriert man aber die Koordinaten so, daß  $x_0 \neq 0$  ist, und normiert  $\omega$  dann so, daß  $x_0 = 1$  wird, so sind die inhomogenen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  des Punktes  $X$  bis auf einen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Die Anzahl der algebraisch unabhängigen unter den so normierten  $x_k$  heißt die *Dimension* von  $V$ .

Eine irreduzible, also insbesondere eine unteilbare Vielfältigkeit kann auch definiert werden als die Menge aller Punkte  $P$ , die aus einem gegebenen Punkt  $X$  durch Spezialisierung entstehen. So geht A. WEIL vor. Eine beliebige Vielfältigkeit kann dann als Vereinigung von endlich vielen unteilbaren Vielfältigkeiten definiert werden.

WEIL führt außerdem den Begriff der *abstrakten Vielfältigkeit* ein. Ein solches *Abstraktum*, wie ich es kurz nennen will, ist definiert durch ein endliches System von unteilbaren Vielfältigkeiten  $V_x$ , zwischen denen birationale Abbildungen  $T_{\beta_x}$  gegeben sind. WEIL nimmt die  $V_x$  als affine Vielfältigkeiten an, aber es macht für die Definition keinen Unterschied, wenn wir von vornherein die  $V_x$  als Vielfältigkeiten in projektiven Räumen annehmen. Auf jeder  $V_x$  sei ein echter Teil (d. h. Teilvielfältigkeit)  $F_x$  gegeben, die *Grenze* von  $V_x$ . Die Grenzen werden bei der Konstruktion des Abstraktums nicht mit benutzt, sondern nur die Reste  $V_x - F_x$ . Weiter seien alle  $V_x$  birational äquivalent;

es gebe also birationale Abbildungen  $T_\beta$  von  $V_1$  auf  $V_\beta$ . Definiert man nun

$$T_{\beta\alpha} = T_\beta T_\alpha^{-1},$$

so ist  $T_{\beta\alpha}$  eine birationale Abbildung von  $V_\alpha$  auf  $V_\beta$ . Die  $T_{\beta\alpha}$  genügen den Bedingungen

$$\begin{aligned} T_{\gamma\beta} T_{\beta\alpha} &= T_{\gamma\alpha} \\ T_{\alpha\alpha} &= 1 \\ T_{\beta\alpha}^{-1} &= T_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Eine rationale Abbildung heißt *regulär* in einem Punkt  $P$ , wenn die rationalen Funktionen, die die Koordinaten des Bildpunktes eines allgemeinen Punktes  $X$  definieren, so gewählt werden können, daß ihre Nenner im Punkt  $P$  nicht Null werden. Ist nun  $(P_\alpha, P_\beta)$  ein solches Paar der Transformation  $T_{\beta\alpha}$ , daß  $P_\alpha$  nicht zu  $F_\alpha$  und  $P_\beta$  nicht zu  $F_\beta$  gehört, so wird verlangt, daß dann  $T_{\beta\alpha}$  regulär ist im Punkt  $P_\alpha$  und  $T_{\alpha\beta}$  regulär im Punkt  $P_\beta$ .

Unter dieser Bedingung gibt es zu jedem Punkt  $P_\alpha$  von  $V_\alpha - F_\alpha$  ein maximales System von Punkten  $(P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, \dots)$ , zu denen mindestens  $P_\alpha$  selbst gehört, derart, daß  $P_\beta$  nicht zu  $F_\beta$  gehört,  $P_\gamma$  nicht zu  $F_\gamma$  usw., und daß je zwei von diesen Punkten, etwa  $P_\beta$  und  $P_\gamma$ , immer ein Paar in der Transformation  $T_{\gamma\beta}$  bilden.

Jedes solche maximale System  $(P_\alpha, P_\beta, \dots)$  heißt nun ein *Punkt* des Abstraktums

$$V = \{V_\alpha, T_{\alpha\beta}; F_\alpha\}.$$

$V$  selbst ist die Menge aller ihrer Punkte.

Eine Spezialisierung eines „Punktes“  $(X_\alpha, X_\beta, \dots)$  in bezug auf einen Körper  $K$  wird so definiert: man spezialisire irgendeines der  $X_i$ , etwa  $X_\alpha$  zu  $P_\alpha$ , wobei  $P_\alpha$  nicht auf der Grenze  $F_\alpha$  liegen möge. Dann ergänze man  $P_\alpha$  zu einem maximalen System  $(P_\alpha, P_\beta, \dots)$  von zugeordneten Punkten. Dieses maximale System  $P$  ist dann eine Spezialisierung des vorgelegten Systems  $X$ .

Die Menge aller Spezialisierungen eines „Punktes“  $X$  von  $V$  ist ein irreduzibler Teil von  $V$  in bezug auf  $K$ . Jedem irreduziblen Teil  $W_\alpha$  eines  $V_\alpha$ , der nicht auf der Grenze  $F_\alpha$  liegt, entspricht ein einziger irreduzibler Teil  $W$  von  $V$ , von derselben Dimension. Ist  $W_\alpha$  unteilbar, so ist  $W$  es auch. In dieser Weise übertragen sich alle wichtigen Begriffe von den einzelnen  $V_\alpha$  auf das Abstraktum  $V$ .

Eine Vereinigung von endlich vielen unteilbaren Teilen von  $V$  ist ein *Teil* oder eine *Teilvielfältigkeit* von  $V$ .

## § 2. Die Cayleyform einer irreduziblen Vielfältigkeit.

Es sei  $V$  eine über  $K$  irreduzible Vielfältigkeit von der Dimension  $d$  im projektiven  $S_n$ . Es seien  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  Hyperebenen mit unbestimmten Koordinaten  $u_k^{(r)}$ . Die Unbestimmten  $u_k^{(r)}$  sollen algebraisch unabhängig über  $K$  sein. Die  $d$  Hyperebenen schneiden  $V$  in endlich vielen über  $K$  konjugierten Punkten  $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ . Nimmt man nun eine weitere Reihe von Unbestimmten  $u_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) hinzu, so ist das Produkt

$$(1) \quad P = \prod_1^d (u_0 X_0^{(r)} + u_1 X_1^{(r)} + \dots + u_n X_n^{(r)})$$

eine symmetrische Funktion der Punkte  $X^{(1)}, \dots, X^{(g)}$ . Im Fall der Charakteristik Null ist also das Produkt rational in  $K(u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$ ; in diesem Fall setzen wir

$$P = Q(u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)}).$$

Im Fall der Charakteristik  $p$  ist eine  $p^e$ -te Potenz des Produktes  $P$  rational, und wir setzen

$$(2) \quad P^q = Q(u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)}) \quad (q = p^e).$$

In jedem der beiden Fälle ist  $Q$  ganz in  $u$  und rational in  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$ . Man kann also setzen

$$(3) \quad Q = \frac{A}{B} F(u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)}),$$

wobei  $A$  und  $B$  nur von  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  abhängen, während  $F$  ganz in  $u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  ist und keinen nur von  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  abhängigen Faktor mehr enthält.

Die so definierte Form  $F$  haben CHOW und ich die *zugeordnete Form* von  $V$  genannt<sup>1</sup>. Bei einer Vertauschung der Variablenreihen  $u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  bleibt  $F$  bis auf Faktoren  $\pm 1$  ungeändert. Für den Beweis siehe Ch-W. § 1.

Aus der Formel (2) folgt, daß  $Q$  die Unbestimmten  $u_0, \dots, u_n$  nur in der  $q$ -ten Potenz enthält. Dasselbe gilt nach (3) für  $F$ . Wegen der Vertauschungsmöglichkeit folgt daraus, daß  $F$  auch die übrigen  $u_k^{(v)}$  nur in der  $q$ -ten Potenz enthält. Also ist  $F$  eine  $q$ -te Potenz einer Form in den  $u_k$  und  $u_k^{(v)}$  mit Koeffizienten aus einem Körper  $K_0$ , der aus  $K$  durch Adjunktion der  $q$ -ten Wurzeln aller Koeffizienten von  $F$  entsteht:

$$(4) \quad F = F_0^q.$$

Die Form  $F_0$  hat gegenüber  $F$  den Vorteil, daß sie von der Wahl des Körpers  $K$  unabhängig ist. Sie möge die *Cayleyform* der Vielfältigkeit  $V$  heißen.

Die Cayleyform ist, von einem unwesentlichen Faktor  $C$  abgesehen, mit dem Produkt (1) identisch. Um das einzusehen, denken wir uns die Schnittpunkte  $X''$  durch  $X_j^{(v)} = 1$  normiert. Das Produkt (1) enthält dann ein Glied  $u_0^q$ , die Form (2) ein Glied  $u_0^{q^2}$ . Die Glieder von  $Q$  haben also keinen gemeinsamen von  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  abhängigen Faktor: der Zähler  $A$  in (3) ist Eins. Statt (3) kann man nun schreiben

$$BQ = F$$

oder

$$(5) \quad BP^q = F_0^q.$$

Setzt man in (5) links und rechts  $u_0 = 1, u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ , so sieht man, daß  $B$  ebenfalls eine  $q$ -te Potenz ist

$$(6) \quad B = C^q,$$

wobei  $C$  eine Form in  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$  mit Koeffizienten aus  $K_0$  ist. Setzt man (6) in (5) ein, so folgt schließlich

$$C^q P^q = F_0^q$$

oder, da die  $p^e$ -te Wurzel eindeutig ist,

$$(7) \quad CP = F_0.$$

<sup>1</sup>) CHOW, W.-L., u. B. L. V. D. WAERDEN: Math. Ann. 113, 692 (1937). Zu zitieren als Ch-W.

Wir sehen also, daß man durch eine geeignete Erweiterung des Konstantenkörpers  $K$ , nämlich durch Adjunktion von  $p^e$ -ten Wurzeln, immer erreichen kann, daß nicht nur eine  $p^e$ -te Potenz des Produktes  $P$ , sondern das Produkt  $P$  selbst rational in  $K(u, u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$  ist. Die zugeordnete Form  $F$  ist dann frei von vielfachen Faktoren, und der Unterschied zwischen der Cayleyform und der zugeordneten Form verschwindet.

Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß diese Körpererweiterung vollzogen ist, daß also der Körper  $K$  die Koeffizienten der Cayleyform enthält. Wie CHOW<sup>2)</sup> bemerkt hat, ist diese Voraussetzung gleichbedeutend mit der von WEIL gemachten Voraussetzung, daß der Körper  $K(X)$ , der aus  $K$  durch Adjunktion der Koordinatenverhältnisse eines allgemeinen Punktes  $X$  von  $V$  entsteht, separabel erzeugbar ist.

Die Cayleyform  $F = F_0$  ist durch  $V$  eindeutig bestimmt. Umgekehrt bestimmt sie  $V$  eindeutig, denn durch die Faktorenerlegung (1) erhält man  $g$  allgemeine Punkte von  $V$ , aus denen durch Spezialisierung alle Punkte von  $V$  erhalten werden können. Wie man die Gleichungen von  $V$  erhält, ist in Ch-W angegeben.

Wenn bei einer Erweiterung des Grundkörpers die Vielfältigkeit  $V$  zerfällt, so zerfällt auch die Cayleyform in Faktoren, und umgekehrt. Eine endliche Körpererweiterung genügt immer, um die zugeordnete Form in absolut irreduzible Faktoren zu zerlegen (ZAG 10, Math. Ann. 113, 706). Daher zerfällt auch  $V$  nach einer endlichen Körpererweiterung in unteilbare Vielfältigkeiten.

Wird  $V$  von vornherein als unteilbar und  $K(X)$  als separabel erzeugbar vorausgesetzt, so ist die zugeordnete Form absolut irreduzibel, und umgekehrt. Unter diesen Voraussetzungen nennt WEIL den Körper  $K$  "a field of definition" für  $V$ . Mir scheint dieser Ausdruck nicht glücklich gewählt, denn man denkt dabei unwillkürlich an einen Körper, in dem die Vielfältigkeit  $V$  (etwa durch Gleichungen) definiert ist. Ich möchte daher lieber vorschlagen, einen solchen Körper  $K$  *gut für  $V$*  zu nennen, und umgekehrt  $V$  *gut für  $K$* .

Die Cayleyform  $F = F_0$  zerfällt nach (7) in lauter verschiedene Faktoren

$$u_0 X_0^{(v)} + u_1 X_1^{(v)} + \dots + u_n X_n^{(v)}.$$

Normiert man  $X_0^{(v)} = 1$ , so erhält man als Faktoren

$$u_0 + u_1 X_1^{(v)} + \dots + u_n X_n^{(v)};$$

folglich ist

$$\vartheta = u_1 X_1^{(v)} + \dots + u_n X_n^{(v)}$$

separabel in bezug auf den Körper  $K(u_1, \dots, u_n, u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$ . Aus dem Beweis des Satzes vom primitiven Element ist bekannt, daß  $X_1^{(v)}, \dots, X_n^{(v)}$  rational durch das primitive Element  $\vartheta$  ausgedrückt werden können. Also sind die Koordinaten der Schnittpunkte  $X^{(v)}$  separable algebraische Funktionen von  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$ . Solche Funktionen sind aber differenzierbar. Durch eine bekannte Überlegung<sup>3)</sup> kann man nun in jedem dieser Punkte einen *Tangentialraum* an  $V$  konstruieren. Von diesem Tangentialraum werden wir in § 4 Gebrauch machen.

<sup>2)</sup> CHOW, W. L.: Amer. J. Math. 72, 252 (1950).

<sup>3)</sup> v. D. WAERDEN, B. L.: ZAG 14, Math. Ann. 115, 621 (1938), Satz 1.

### § 3. Ketten im projektiven Raum und ihre Koordinaten.

Eine *Kette*  $C$  besteht aus endlich vielen unteilbaren Vielfältigkeiten  $V_1, \dots, V_s$  von derselben Dimension  $d$ , mit beliebigen ganzzahligen Vielfachheiten  $e_1, \dots, e_s$  versehen. In dieser Untersuchung sollen  $e_1, \dots, e_s$  als positive ganze Zahlen angenommen werden. Ketten werden als Summen geschrieben:

$$C = e_1 V_1 + \dots + e_s V_s.$$

Sind  $F_1, \dots, F_s$  die Cayleyformen von  $V_1, \dots, V_s$ , so heißt

$$F = F_1^{e_1} \dots F_s^{e_s}$$

die Cayleyform der Kette  $C$ . Der Grad der Form  $F$  in  $u$  ist  $g = e_1 g_1 + \dots + e_s g_s$ , wobei  $g_i$  der Grad von  $F_i$  ist.  $g$  heißt der *Grad* der Kette  $C$ .

In Ch-W wurde bewiesen, daß die Koeffizienten der Form  $F$  gewisse homogene Gleichungen erfüllen müssen, die auch hinreichend sind, damit  $F$  die Cayleyform einer Kette von der Dimension  $d$  und vom Grade  $g$  ist.

Die Koeffizienten der Cayleyform  $F$  gehören einem Körper  $K$  an, dem Vereinigungskörper der Koeffizientenkörper der Formen  $F_1, \dots, F_s$ . Manchmal genügt auch ein kleinerer Körper, aber darauf kommt es hier nicht an.

Die Koeffizienten von  $F$  heißen die *Koordinaten* der Kette  $C$ . Nur die Koordinatenverhältnisse sind eindeutig durch  $C$  bestimmt; es handelt sich also um homogene Koordinaten  $c_0, \dots, c_N$ .

Faßt man  $c_0, \dots, c_N$  als Punktkoordinaten in einem Bildraum  $S_N$  auf, so erhält man den *Bildpunkt* der Kette  $C$ . Der Bildpunkt wird zweckmäßig mit demselben Buchstaben  $C$  bezeichnet wie die Kette. Das führt nicht einmal dann zu Verwechslungen, wenn die Kette  $C$  selber aus einem einzigen Punkt des Raumes  $S_n$  besteht; denn in diesem Fall sind die Koeffizienten der Cayleyform gerade die homogenen Koordinaten  $c_0, \dots, c_n$  dieses Punktes.

Eine *Vielfältigkeit von Ketten* derselben Dimension  $d$  und desselben Grades  $g$  ist die Menge aller Ketten, deren Koordinaten einem endlichen System von homogenen Gleichungen genügen. Die Vielfältigkeiten von Ketten entsprechen also eineindeutig den Vielfältigkeiten von Punkten im Bildraum  $S_N$ . Die Begriffe Dimension, irreduzibel, unteilbar usw. können ohne weiteres von den Vielfältigkeiten im Bildraum auf die Vielfältigkeiten von Ketten übertragen werden. Die Ketten einer irreduziblen Vielfältigkeit können alle durch Spezialisierung einer allgemeinen Kette derselben Vielfältigkeit erhalten werden.

Insbesondere bilden alle Ketten der Dimension  $d$  und des Grades  $g$  im  $S_n$  eine Vielfältigkeit. Aber auch die Ketten, die auf einer gegebenen Vielfältigkeit  $W$  des  $S_n$  liegen, bilden eine Vielfältigkeit. Die wichtigsten Relationen zwischen Ketten, z. B., daß eine Kette der Trägervielfältigkeit einer anderen Kette angehört, können durch algebraische Gleichungen zwischen den Kettenkoordinaten ausgedrückt werden. Das alles wurde in Ch-W bewiesen.

### § 4. Spezialisierung von abstrakten Ketten.

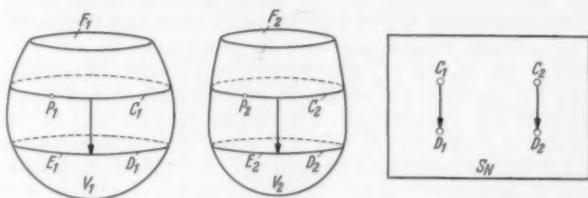
Es sei  $V$  ein Abstraktum, definiert durch die unteilbaren Vielfältigkeiten  $V_\alpha$  mit den Grenzen  $F_\alpha$  und den Abbildungen  $T_{\beta\alpha}$  von  $V_\alpha$  auf  $V_\beta$ . Es sei  $C$  eine Kette auf  $V$ , d. h. eine Summe von unteilbaren  $d$ -dimensionalen Teilen von  $V$  mit Koeffizienten  $e_k$ . Wir wollen den Begriff der Spezialisierung der Kette  $C$  definieren. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber zunächst auf den Fall, daß  $C$  unteilbar ist. Der Konstantenkörper, in bezug auf den die



Spezialisierung stattfindet, möge  $K$  heißen. Der Körper  $K$  möge die Koeffizienten der rationalen Abbildungen  $T_{\beta\alpha}$  sowie der Cayleyformen aller  $V_\alpha$  enthalten.

Die unteilbare Vielfältigkeit  $C$  auf  $V$  ist definiert als ein maximales System von unteilbaren Vielfältigkeiten  $C_\alpha$  auf  $V_\alpha$ , deren allgemeine Punkte  $P_\alpha$  nicht zu  $F_\alpha$  gehören und sich in den Transformationen  $T_{\beta\alpha}$  entsprechen:

$$T_{\beta\alpha} P_\alpha = P_\beta.$$



Die Teile  $C_\alpha$  haben je einen Bildpunkt  $C_\alpha$  in einem projektiven Raum  $S_N$ . Es seien etwa  $C_1, \dots, C_h$  diese Bildpunkte.

Nun sei  $C_1 \rightarrow D_1, \dots, C_h \rightarrow D_h$  eine gleichzeitige Spezialisierung der Punkte  $C_1, \dots, C_h$ . Das bedeutet, daß alle homogenen Gleichungen zwischen den Koordinaten von  $C_1, \dots, C_h$  mit Koeffizienten aus  $K$  auch für  $D_1, \dots, D_h$  gelten. Zu diesen homogenen Gleichungen gehören auch diejenigen, die ausdrücken, daß der Punkt  $C_\alpha$  Bildpunkt einer Kette  $C_\alpha$  ist und daß diese auf  $V_\alpha$  liegt. Also stellen  $D_1, \dots, D_h$  wieder  $d$ -dimensionale Ketten auf  $V_1, \dots, V_h$  dar.

Es kann sein, daß einige unteilbare Komponenten von  $D$  zur Grenze  $F_\alpha$  gehören. Diese Komponenten mögen aus  $D_\alpha$  weggelassen werden. Was übrig bleibt, ist eine Kette  $E_\alpha$  (möglicherweise die Nullkette, wenn alle Komponenten weggelassen werden müssen). Wir beweisen nun den entscheidenden

**Hilfssatz.** Sind  $A_\alpha$  und  $A_\beta$  zwei unteilbare  $d$ -dimensionale Teile von  $V_\alpha$  und  $V_\beta$ , die sich in der Transformation  $T_{\beta\alpha}$  entsprechen, wobei  $A_\alpha$  nicht zur Grenze  $F_\alpha$  und ebenso  $A_\alpha$  nicht zu  $F_\beta$  gehören möge, so hat  $A_\alpha$  in  $D_\alpha$  denselben Koeffizienten wie  $A_\beta$  in  $D_\beta$ .

**Beweis.** Die Transformation  $T_{\beta\alpha}$  induziert eine Korrespondenz  $C_{\beta\alpha}$  zwischen  $C_\alpha$  und  $C_\beta$ . Diese Korrespondenz, betrachtet als eine Vielfältigkeit von Punktepaaren, kann wieder durch einen Bildpunkt  $C_{\beta\alpha}$  in einem projektiven Raum  $S_N$  dargestellt werden (wobei  $N$  größer sein kann als das frühere  $N$ ). Die simultane Spezialisierung von  $C_\alpha$  und  $C_\beta$  zu  $D_\alpha$  und  $D_\beta$  kann nun zu einer Spezialisierung der drei Punkte  $C_\alpha, C_\beta, C_{\beta\alpha}$  zu  $D_\alpha, D_\beta, D_{\beta\alpha}$  erweitert werden.

Alle Relationen zwischen  $C_\alpha, C_\beta$  und  $C_{\beta\alpha}$ , die durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten dieser drei Ketten ausgedrückt werden können, bleiben bei der Spezialisierung erhalten. Zu diesen Relationen gehören die folgenden:

1. Die Beziehung, die darin besteht, daß von den Punktepaaren von  $C_{\beta\alpha}$  immer der erste Punkt zu  $C_\alpha$  und der zweite zu  $C_\beta$  gehört. Die zugehörigen Gleichungen können genau so hergeleitet werden, wie die, welche ausdrücken, daß eine Kette auf der Trägervielfältigkeit einer anderen liegt.

2. Die Beziehung, die besagt, daß jedem Punkt von  $C_\alpha$  oder  $C_\beta$  mindestens ein Punktepaar von  $C_{\beta\alpha}$  entspricht. Diese Gleichungen können so erhalten werden: aus den Gleichungen  $f(x, y) = 0$  von  $C_{\beta\alpha}$  eliminiert man die Koordinaten  $y$  des zweiten Punktes; so erhält man ein System von Hyperflächen; nun verlangt man, daß  $C_\alpha$  auf allen diesen Hyperflächen liegt.

3. Die Beziehung, die besagt, daß alle Punktepaare von  $C_{\beta\alpha}$  auch zu  $T_{\beta\alpha}$  gehören.

Alle diese Beziehungen bleiben bei der Spezialisierung erhalten. Also gehört von den Punktepaaren von  $D_{\beta\alpha}$  der erste Punkt immer zu  $D_\alpha$  und der zweite zu  $D_\beta$ , jeder Punkt von  $D_\alpha$  oder  $D_\beta$  gehört mindestens einem Punktepaar von  $D_{\beta\alpha}$  an, und alle Punktepaare von  $D_{\beta\alpha}$  gehören zu  $T_{\beta\alpha}$ .

Nun seien, wie vorhin,  $A_\alpha$  und  $A_\beta$  zwei unteilbare  $d$ -dimensionale Teile von  $V_\alpha$  und  $V_\beta$ , die nicht zur Grenze  $F_\alpha$  oder  $F_\beta$  gehören und die sich in der Transformation  $T_{\beta\alpha}$  entsprechen. Die Transformation  $T_{\beta\alpha}$  induziert eine Korrespondenz  $A_{\beta\alpha}$  zwischen  $A_\alpha$  und  $A_\beta$ . Wenn  $A_\alpha$  eine Komponente von  $D_\alpha$  ist, so ist auf Grund der obigen Beziehungen  $A_{\beta\alpha}$  eine Komponente von  $D_{\beta\alpha}$  und  $A_\beta$  eine Komponente von  $D_\beta$ . Wir haben zu beweisen, daß  $A_\alpha$  in  $D_\alpha$  mit derselben Vielfachheit auftritt wie  $A_\beta$  in  $D_\beta$ . Dazu genügt es zu beweisen, daß  $A_\alpha$  in  $D_\alpha$  mit derselben Vielfachheit auftritt wie  $A_{\beta\alpha}$  in  $D_{\beta\alpha}$ .

Wir schneiden  $C_\alpha$  und  $D_\alpha$  mit einer allgemeinen Hyperebene  $H_1$  des Raumes  $S_n$ , in dem  $V_\alpha$  liegt. Die Hyperebene  $H_1$  enthält keine Komponente von  $C_\alpha$  oder  $D_\alpha$ ; die Schnitte  $H_1 \cdot C_\alpha$  und  $H_1 \cdot D_\alpha$  haben also die richtige Dimension  $d - 1$ . Nun ist  $D_\alpha$  eine Spezialisierung von  $C_\alpha$ , also ist  $H_1 \cdot D_\alpha$  eine Spezialisierung von  $H_1 \cdot C_\alpha$ , und zwar handelt es sich um eine simultane Spezialisierung<sup>4)</sup>. Man kann dieselbe Hyperebene  $H_1$  auch als Hyperfläche im zweifach-projektiven Raum der Punktepaare von  $V_\alpha$  und  $V_\beta$  auffassen: die Gleichung dieser Hyperfläche enthält eben nur die Koordinaten des ersten Punktes. In einem beliebig fest gewählten Punkt einer Komponente von  $C_{\beta\alpha}$  oder  $D_{\beta\alpha}$  ist diese Gleichung natürlich nicht erfüllt, weil  $H_1$  ja allgemein gewählt war. Also haben die Durchschnitte  $H_1 \cdot C_{\beta\alpha}$  und  $H_1 \cdot D_{\beta\alpha}$  wieder die „richtige“ Dimension  $d - 1$  und  $H_1 \cdot D_{\beta\alpha}$  ist eine Spezialisierung von  $H_1 \cdot C_{\beta\alpha}$ .

Nimmt man in derselben Weise eine zweite Hyperebene  $H_2$  hinzu, usw. bis  $H_d$ , und setzt zur Abkürzung  $H_1 H_2 \dots H_d = L$  (linearer Raum), so findet man, daß

$$D_\alpha, LD_\alpha, D_{\beta\alpha}, LD_{\beta\alpha}$$

simultane Spezialisierungen von

$$C_\alpha, LC_\alpha, C_{\beta\alpha}, LC_{\beta\alpha}$$

sind.

$LC_\alpha$  ist eine Summe von endlich vielen Punkten  $P_1, \dots, P_g$ , wo  $g$  der Grad von  $C_\alpha$  ist. Der allgemeine lineare Raum  $L$  hat in diesen Punkten keine Tangente mit  $C_\alpha$  gemeinsam; jeder Schnittpunkt hat also Vielfachheit Eins. Die Schnittpunkte liegen nicht auf  $F_\alpha$ , die Transformation  $T_{\beta\alpha}$  ist also regulär in diesen Punkten. Jedem  $P_i$  entspricht somit ein einziges Punktepaar  $(P_i, P'_i)$  von  $C_{\beta\alpha}$ . Diese Punktepaare haben in der Kette  $LC_{\beta\alpha}$  wieder die Vielfachheit Eins, weil  $L$  und  $C_{\beta\alpha}$  keine Tangente gemeinsam haben; die Transformation  $T_{\beta\alpha}$  ist ja differenzierbar und führt Tangentenrichtungen in Tangentenrichtungen über.

<sup>4)</sup> Siehe ZAG 14, Math. Ann. 115, 633 (1938), Satz B.

Genau dieselbe Überlegung gilt für  $LA_\alpha$  und  $LA_{\beta\alpha}$ . Der Durchschnitt  $LA_\alpha$  besteht aus Punkten  $Q_1, \dots, Q_r$  mit der Vielfachheit Eins, und jedem  $Q_i$  entspricht ein Punktepaar  $(Q_i, Q'_i)$ , das in  $LA_{\beta\alpha}$  wieder Vielfachheit Eins hat.

Bei der simultanen Spezialisierung gehen die Punkte  $P_1, \dots, P_g$ , aus denen  $LC_\alpha$  besteht, in gewisse Punkte  $R_1, \dots, R_g$  über, die zusammen die Kette  $LD_\alpha$  bilden. Ebenso gehen die Punktepaare  $(P_i, P'_i)$  in ebensoviele Punktepaare  $(R_i, R'_i)$  über, die zusammen die Kette  $LD_{\beta\alpha}$  bilden. Die Zahl  $f$ , die angibt, wie oft  $Q_i$  unter den  $R_i$  vorkommt, ist gleich der Zahl  $f_i$ , die angibt, wie oft das Paar  $(Q_i, Q'_i)$  unter den  $(R_i, R'_i)$  vorkommt. Die Zahl  $f$  ist aber nach Definition die Vielfachheit von  $A_\alpha$  als Bestandteil von  $LD_\alpha$ ; ebenso ist  $f$  die Vielfachheit von  $A_{\beta\alpha}$  als Bestandteil von  $LD_{\beta\alpha}$ . Also sind diese Vielfachheiten gleich, was zu beweisen war.

Auf Grund des nunmehr bewiesenen Hilfssatzes ist die Vielfachheit  $f$ , mit der  $A_\alpha$  in  $D_\alpha$  oder (was dasselbe ist) in  $E_\alpha$  vorkommt, vom Index  $\alpha$  unabhängig. Faßt man nun ein maximales System von zugeordneten Teilen  $(A_\alpha, A_\beta, \dots)$  zu einem  $d$ -dimensionalen unteilbaren Teil  $A$  von  $V$  zusammen, so kann man diesem Teil die Vielfachheit  $f$  zuordnen. Macht man dasselbe für alle Teile  $A_\alpha$  oder  $A_\beta, \dots$ , die überhaupt in einem der endlich vielen  $D_\alpha, D_\beta, \dots$  als Komponenten vorkommen, so erhält man endlich viele Teile  $A$  mit ganz bestimmten Vielfachheiten  $f$ . Diese kann man nun zu einer Kette

$$D = \sum f A$$

zusammenfassen. Diese Kette  $D$  heißt eine *Spezialisierung der Kette  $C$  in bezug auf den Körper  $K$* .

Da die Spezialisierung  $C \rightarrow D$  durch simultane Spezialisierungen  $C_1 \rightarrow D_1, C_2 \rightarrow D_2, \dots$  auf den projektiven Vielfältigkeiten  $V_1, V_2, \dots$  definiert war, wobei jede nicht zur Grenze  $F_\alpha$  gehörige Komponente  $A_\alpha$  in  $D_\alpha$  genau denselben Koeffizienten  $f$  hat, wie  $A$  in  $D$ , so lassen sich die Eigenschaften der abstrakten Spezialisierungen unmittelbar aus den Eigenschaften der projektiven Spezialisierungen ablesen.

Die Beschränkung auf unteilbare Ketten  $C$  ist ganz unwesentlich. Ist

$$C = \sum e_\nu C^{(\nu)}$$

eine beliebige Kette, so nehme man simultane Spezialisierungen

$$C^{(1)} \rightarrow D^{(1)}, C^{(2)} \rightarrow D^{(2)}, \dots$$

vor und bilde

$$D = \sum e_\nu D^{(\nu)}.$$

Eine Spezialisierung einer Spezialisierung ist wieder eine Spezialisierung.

### § 5. Vielfältigkeiten von Ketten.

Wir definieren nun: Alle Spezialisierungen einer Kette  $C$  in bezug auf einen Grundkörper  $K$  bilden eine über  $K$  irreduzible Vielfältigkeit von Ketten.

Die Spur einer Spezialisierung  $C \rightarrow D$  auf  $V_\alpha$  ist eine Spezialisierung  $C_\alpha \rightarrow D_\alpha$ . Umgekehrt läßt jede Spezialisierung  $C_\alpha \rightarrow D_\alpha$  sich zu einer simultanen Spezialisierung  $C_1 \rightarrow D_1, \dots, C_n \rightarrow D_n$  erweitern, die ihrerseits eine Spezialisierung  $C \rightarrow D$  definiert. Die Gesamtheit der Ketten  $D_\alpha$ , die durch Spezialisierung aus  $C_\alpha$  entstehen, ist eine irreduzible Vielfältigkeit von Ketten auf  $V_\alpha$ . So entspricht jeder irreduziblen Vielfältigkeit von Ketten auf  $V$  eine ebensolche von Ketten auf jedem  $V_\alpha$ .

Eine *Vielfältigkeit von Ketten* ist eine Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Vielfältigkeiten.

Eine irreduzible Vielfältigkeit von Ketten kann bei Erweiterung des Grundkörpers zerlegbar werden. Bleibt die Vielfältigkeit aber bei jeder Erweiterung von  $K$  irreduzibel, so heißt sie *unteilbar*. Jede Vielfältigkeit von Ketten kann als Vereinigung von endlich vielen unteilbaren Vielfältigkeiten dargestellt werden. Läßt man die überflüssigen weg, so ist die Darstellung sogar eindeutig. Alle diese Sätze sind für projektive Ketten bekannt und übertragen sich ohne weiteres auf abstrakte Ketten.

Die *Dimension* einer irreduziblen Vielfältigkeit von Ketten ist der Transzendenzgrad der allgemeinen Kette  $C$ , aus der alle anderen durch Spezialisierung hervorgehen. Die allgemeine Kette  $C$  möge durch

$$C = \sum e_\nu C^{(\nu)}$$

gegeben sein, wobei jede der unteilbaren Ketten  $C^{(\nu)}$  wieder als maximale Systeme zugeordneter  $C_\alpha^{(\nu)}$  definiert sind. Die Koordinatenverhältnisse der Cayleyform von  $C_\alpha^{(\nu)}$  erzeugen einen Körper  $K_\alpha^{(\nu)}$ . Der Vereinigungskörper aller  $K_\alpha^{(\nu)}$  sei  $H$ . Der Transzendenzgrad dieses Körpers  $H$  über  $K$  ist die Dimension der Vielfältigkeit von Ketten. Sie ist genau die Anzahl der unabhängigen Unbestimmten, von denen das allgemeine Element  $C$  der Vielfältigkeit abhängt.

Im Falle einer einzigen projektiven Vielfältigkeit  $V = V_1$  reduzieren alle diese Begriffe sich auf die bekannten projektiven Begriffe. Auch wenn die projektive Vielfältigkeit willkürlich als abstrakte Vielfältigkeit aufgefaßt wird, indem man  $h$  Exemplare  $V_1, \dots, V_h$  von ihr bildet und auf diesen Exemplaren beliebige Grenzen  $F_1, \dots, F_h$  annimmt, auch dann kommt der neue Begriff der Vielfältigkeit von Ketten genau auf den alten hinaus.

(Eingegangen am 6. Juni 1952.)

## Berichtigung

zu der Arbeit W. HAHN:

„Über uneigentliche Lösungen linearer geometrischer Differenzgleichungen“.

Math. Ann. 125, S. 67—81 (1952).

S. 72, Z. 8, lies  $\sum_{\epsilon=0}^{\infty} B_\epsilon =$

S. 79, letzte Zeile, lies bzw.  $\lambda = -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ .

## Das Problem der dreizehn Kugeln.

Von

K. SCHÜTTE in Marburg/Lahn und B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Die Frage, wieviel Kugeln gleicher Größe an eine ebenso große Kugel angelegt werden können, ist offenbar gleichbedeutend mit der Frage, wieviel Punkte mit Mindestabstand 1 auf einer Kugel vom Radius 1 Platz haben (Fig. 1).

Zwölf Kugeln kann man sicher anlegen, nämlich an den Ecken eines Ikosaeders. (Die Kantenlänge desselben ist größer als der Radius der umschriebenen Kugel.) Es ist eine alte Streitfrage zwischen NEWTON und GREGORY, ob sich auch 13 Kugeln anlegen lassen. Im folgenden werden zwei Beweise dafür gegeben, daß dies nicht möglich ist. Es wird nämlich gezeigt, daß die Minimalkugel, auf der 13 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz haben, einen Radius  $r > 1$  besitzt.

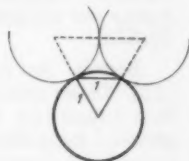


Fig. 1.

Die Beweise erfolgen unter Benutzung von Methoden, die zur Auffindung der Minimalkugel für  $N$  Punkte mit Mindestabstand 1 entwickelt wurden<sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>. Hinweise auf Paragraphen und Sätze der unter <sup>2)</sup> zitierten Arbeit, deren Begriffsbildungen hier verwendet werden, sind in eckige Klammern gesetzt.

Der allgemeine Ansatz für diese Untersuchung (§§ 1, 2) stammt von beiden Verfassern. Den im § 3 dargestellten Beweis hat VAN DER WAERDEN gefunden, den anderen Beweis (§ 6) mit den dazu benötigten Hilfssätzen (§§ 4, 5) SCHÜTTE.

Die Priorität hat SCHÜTTE. Sein Beweis (§ 6) ist zwar komplizierter, aber es erscheint uns trotzdem erwünscht, ihn mitzuteilen, weil die Hilfssätze, auf denen er beruht, sich für weitere Untersuchungen als nützlich erweisen könnten, so z. B. für die genaue Bestimmung der Minimalkugel für 10, 11 oder 13 Punkte.

### § 1. Der irreduzible Graph.

*Satz 1. Ein irreduzibler Graph auf einer Kugel vom Radius  $r \leq 1$  enthält keine anderen Polygone als Dreiecke, Vierecke und Fünfecke.*

Beweis: Bei  $r \leq 1$  ist der zum Abstand 1 gehörende Bogen  $a \geq 60^\circ$  (Fig. 2). Folglich gilt für ein Polygon mit  $n$  Ecken

$$n \cdot 60^\circ \leq n \cdot a < 360^\circ \quad [\S 6, \text{Satz } 6]$$

und somit  $n < 6$ .

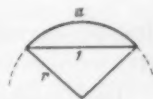


Fig. 2.

*Satz 2. Auf einer Minimalkugel für  $N > 12$  hat im Innern eines Fünfecks mit den Seiten a kein Punkt ohne Störung Platz.*

<sup>1)</sup> W. HABICHT u. B. L. VAN DER WAERDEN: Lagerung von Punkten auf der Kugel. Math. Ann. 123, 223—234 (1951).

<sup>2)</sup> K. SCHÜTTE u. B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. 123, 96—124 (1951).

Beweis: Hätte ein Punkt im Innern Platz, so könnte man diesen heranschieben, so daß ein Sechseck und ein Dreieck oder ein Fünfeck und ein Viereck entstehen würde. Der gesamte Flächeninhalt wäre (nach HABICHT und VAN DER WAERDEN)  $\geq 5 \Delta$  (Fig. 3), wenn  $\Delta$  der Inhalt des sphärischen Dreiecks mit den Seiten  $a$  ist. Das regelmäßige Fünfeck, das ja maximalen Inhalt besitzt, hat aber bei  $N > 12$  einen Inhalt  $< 5 \Delta$  (da die Kugel dann notwendig größer ist als für  $N = 12$ , wo dieser Inhalt gemäß der Ikosaederfigur gleich  $5 \Delta$  ist).

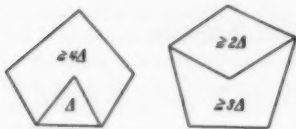


Fig. 3.

Satz 3. Als Minimalkfigur für  $N = 13$  auf einer Kugel vom Radius  $r \leq 1$  kommt nur ein irreduzibler Graph aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken in Betracht.

Beweis: Auf der Minimalkugel tritt mindestens ein irreduzibler Graph auf [§ 5]. Dieser enthält nach Satz 1 nur Dreiecke, Vierecke und Fünfecke. Nach Satz 2 (und [§ 6, Satz 7]) können ihm keine Punkte ohne Störung eingefügt werden. Er enthält also bereits alle 13 Punkte.

## § 2. Der Winkelüberschuß.

Nach HABICHT und VAN DER WAERDEN ist der Inhalt eines Polygons (mit den Seiten  $a$ ) mindestens gleich dem Inhalt, der sich ergibt, wenn das Polygon vollständig in Dreiecke zerfällt. Der Inhalt eines  $n$ -eckigen Polygons ist also  $\geq (n-2) \Delta$ . Dann ist die Summe  $\sigma$  der Innenwinkel  $\geq (n-2) \cdot 3\alpha$ , wenn  $\alpha$  den Winkel des sphärischen Dreiecks mit den Seiten  $a$  bezeichnet. Die (demnach nicht negative) Differenz

$$w = \sigma - (n-2) \cdot 3\alpha$$

bezeichnen wir als den „Winkelüberschuß“ des betreffenden Polygons.

Der „Gesamt-Winkelüberschuß“  $W$  der Kugel ergibt sich, wenn über alle Polygone summiert wird.

$$W = \Sigma \sigma - \Sigma (n-2) \cdot 3\alpha.$$

Es ist  $\Sigma \sigma = N \cdot 2\pi$  und  $\Sigma (n-2) = \Sigma n - 2G = 2K - 2G$ , wo  $K$  die Anzahl der Strecken und  $G$  die Anzahl der Polygone bedeutet. Nach dem EULERSchen Polyedersatz ist  $K - G = N - 2$ , also

$$W = N \cdot 2\pi - 2(N-2) \cdot 3\alpha.$$

Insbesondere ist für  $N = 13$

$$(1) \quad W = 26\pi - 66\alpha.$$

Das „Quadrat“ (regelmäßige sphärische Viereck) mit dem Winkel  $\beta$  hat den Winkelüberschuß  $Q = 4\beta - 6\alpha$ . Im Falle  $r \leq 1$  ist  $\cos a \leq 1/2$ ,  $\cos \alpha \leq 1/3$  [§ 7, (2)] und daher (nach [§ 11, (11)])

$$\cos \beta = \frac{\cos a - 1}{\cos a + 1} \leq -\frac{1}{3} \leq -\cos \alpha,$$

$$(2) \quad \alpha + \beta \geq \pi,$$

folglich

$$(3) \quad Q \geq 4\pi - 10\alpha.$$

Für den Winkelüberschuß eines Fünfecks aus einem Graphen gemäß Satz 3 läßt sich eine untere Schranke  $w_5$  angeben. Da der Graph irreduzibel ist, sind alle inneren Winkel  $< \pi$ , also alle Polygone konvex. Das konvexe Fünfeck kleinsten Inhalts besitzt zwei (nicht benachbarte) gestreckte Winkel, d. h. es wird von einem gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln  $2\alpha$  und der Grundlinie  $\alpha$  gebildet [§ 13, Beweis von Satz 12]. Bei  $r = 1$  zerfällt das gleichschenklige Dreieck in ein gleichseitiges Dreieck und in ein regelmäßiges Viereck (Fig. 4), da in diesem Falle  $\alpha + \beta = \pi$  ist. Die Summe der Innenwinkel ist dann  $\sigma = 2\pi + \alpha + 2\beta$ . In dem allgemeineren Falle  $r \leq 1$  hat das gleichschenklige Dreieck einen Scheitelwinkel  $\geq \alpha$  und einen Basiswinkel  $\geq \beta$ . Dann ist  $\sigma \geq 2\pi + \alpha + 2\beta \geq 4\pi - \alpha$ , und für die untere Schranke  $w_5 = \sigma - 9\alpha$  des Fünfeck-Winkelüberschusses gilt



Fig. 4.

$$(4) \quad w_5 \geq 4\pi - 10\alpha.$$

Aus diesen Abschätzungen folgt:

*Satz 4. Falls die Minimalkugel für  $N = 13$  einen Radius  $r \leq 1$  besitzt, enthält der Minimalgraph höchstens ein Quadrat und höchstens ein Fünfeck, auch nicht ein Quadrat und ein Fünfeck zugleich.*

Beweis: Bei  $r \leq 1$  ist, wie aus  $\cos \alpha \leq 1/3$  hervorgeht,  $\alpha > 70,5^\circ$ . Dann gilt nach (1) und (3)

$$\begin{aligned} Q - \frac{1}{2}W &\geq (4\pi - 10\alpha) - (13\pi - 33\alpha) = 23\alpha - 9\pi \\ &> 1621,5^\circ - 1620^\circ > 0, \end{aligned}$$

also  $2Q > W$  und nach (4) ebenso  $2w_5 > W$ . Durch zwei Quadrate, zwei Fünfecke oder ein Quadrat und ein Fünfeck wäre also bereits der Gesamt-Winkelüberschuß  $W$  der Kugel überschritten.

### § 3. Erster Beweis für $r > 1$ bei $N = 13$ .

Angenommen, die Minimalkugel für  $N = 13$  habe einen Radius  $r \leq 1$ . Nach Satz 3 wird dann die Minimalfigur von einem irreduziblen Graphen aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken gebildet. Es soll gezeigt werden, daß ein solcher Graph nicht existiert.

*I. Fall. Der Graph enthält nur Dreiecke und Vierecke.*

Wir bezeichnen alle Dreieckswinkel  $\alpha$  und diejenigen Viereckswinkel, die kleiner als der Quadratwinkel  $\beta$  sind, als „kleine Winkel“. Alle Viereckswinkel, die größer als  $\beta$  sind, nennen wir „groß“. Von einem Quadrat sollen ganz willkürlich zwei Winkel zu den kleinen, die anderen beiden zu den großen Winkeln gerechnet werden. Dann enthält jedes Viereck zwei kleine und zwei große Winkel. Für jeden kleinen Winkel  $\alpha$  gilt

$$(5) \quad \alpha \leq \varkappa \leq \beta$$

und für jeden großen Winkel  $\gamma$

$$(6) \quad \beta \leq \gamma < 2\alpha.$$

Der gesamte Winkelüberschuß aller Vierecke um einen Punkt  $P$  herum kann kleiner gemacht werden, indem immer ein Winkel verkleinert und ein anderer vergrößert wird, so lange bis alle Winkel bis auf einen den nach (5)



und (6) kleinst- oder größtmöglichen Wert angenommen haben. Dabei gehen wir so vor: Solange noch große Winkel  $< 2\alpha$  und kleine Winkel  $< \alpha$  vorhanden sind, vergrößern wir die großen und verkleinern die kleinen, bis entweder alle großen Winkel gleich  $2\alpha$  geworden sind (Fall A) oder alle kleinen Winkel gleich  $\alpha$  (Fall B).

Im Fall A ändern wir weiter die kleinen Winkel, wobei der Winkelüberschuß ihrer Vierecke verkleinert wird, bis entweder alle gleich  $\alpha$  geworden sind bis auf einen gleich  $2\pi - 4\alpha$  (Fall A<sub>1</sub>) oder einer gleich  $\beta$ , die übrigen bis auf einen gleich  $\alpha$  und der letzte gleich  $2\pi - \beta - 2\alpha$  (Fall A<sub>2</sub>). Zwei  $\beta$  sind nicht möglich, da zwei Quadrate einen zu großen Winkelüberschuß haben.

Im Fall B ändern wir die großen Winkel, bis entweder alle gleich  $2\alpha$  geworden sind bis auf einen gleich  $2\pi - 4\alpha$  (Fall B<sub>1</sub>) oder einer gleich  $\beta$ , die übrigen bis auf einen gleich  $2\alpha$  und der letzte gleich  $2\pi - \beta - 2\alpha$  (Fall B<sub>2</sub>). Fall B<sub>1</sub> ist aber nicht möglich, da  $2\pi - 4\alpha$  kein großer Winkel ist. Fall B<sub>2</sub> ist nur möglich für  $r = 1$ , wo  $2\pi - \beta - 2\alpha$  gerade  $= \beta$  ist [vgl. (2)]; aber da zwei Winkel  $= \beta$  unmöglich sind, fällt auch dieser Fall fort.

Nun sei  $w_P$  der gesamte Winkelüberschuß derjenigen Vierecke, die im Punkt  $P$  einen kleinen Winkel haben, und  $w_0$  der Winkelüberschuß des Vierecks mit Winkel  $2\pi - 4\alpha$ . Dann gilt in beiden Fällen A<sub>1</sub> und A<sub>2</sub>

$$(7) \quad w_P \geq w_0.$$

Summiert man (7) über alle Punkte  $P$ , so erhält man links  $2W$ , da jedes Viereck zwei „kleine Winkel“ hat und somit zweimal gezählt wird. Rechts erhält man  $13w_0$ . Somit ist

$$2W \geq 13w_0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, wie eine ganz leichte Überschlagsrechnung ergibt. Für  $r = 1$  steht links weniger als  $51^\circ$ , rechts viel mehr als  $13 \cdot 4^\circ = 52^\circ$ . Für  $r < 1$  ist es noch schlimmer, denn bei zunehmendem  $\alpha$  nimmt die linke Seite  $2 \cdot (26\pi - 66\alpha)$  viel stärker ab als die rechte.

#### II. Fall. Der Graph enthält ein Fünfeck.

Nach Satz 4 kann höchstens ein Fünfeck auftreten. Dieses hat einen Winkelüberschuß von mindestens

$$w_5 \geq 4\pi - 10\alpha.$$

Wir summieren nun (7) über alle 8 Ecken, die nicht zum Fünfeck gehören, und addieren noch  $2w_5$ . Links ergibt sich weniger als  $2W$ , denn die Vierecke, die mit einer kleinen Ecke an das Fünfeck anstoßen, werden nur einmal gezählt. So ergibt sich

$$2W \geq 8w_0 + 2w_5,$$

ein eklatanter Widerspruch. (Bei  $r = 1$  steht links weniger als  $51^\circ$ , rechts viel mehr als  $8 \cdot 4^\circ + 2 \cdot 15^\circ = 62^\circ$ .)

### § 4. Ein Satz über konvexe Vierecke.

Um noch einen zweiten Beweis für die Unmöglichkeit eines Graphen mit  $N = 13$  und  $r \leq 1$  geben zu können, bestätigen wir zunächst einige allgemeine Eigenschaften konvexer Polygone auf der Kugel.



**Satz 5.** Es sei  $\cos a \geq 1/3$ . Dann ist die Winkelsumme eines konvexen Vierecks, dessen eine Seite  $b \geq a$  ist und dessen drei übrige Seiten gleich  $a$  sind, eine konkave Funktion des größeren Winkels an der Seite  $b$ .<sup>3)</sup>

Beweis: Wir zerlegen das Viereck gemäß Fig. 5 in zwei Dreiecke. Die Winkel  $\xi, \eta, \zeta, \psi$  und die Diagonale  $c$  sind Funktionen des Winkels  $\varphi$ . Es sei  $\varphi$  der größere Viereckswinkel an der Seite  $b$ , also  $\varphi \geq \xi + \zeta$ .

Dann besagt der zu beweisende Satz, daß die Winkelsumme  $\sigma = \varphi + \xi + \eta + 2\zeta + \psi$  eine konkave Funktion von  $\varphi$  ist, d. h. daß die zweite Ableitung von  $\sigma$  nach  $\varphi$

$$\sigma'' \leq 0$$

ist.

Aus  $\varphi \geq \xi + \zeta$  folgt  $\psi \geq \eta + \zeta$ . Wegen  $b \geq a$  ist  $\eta \geq \zeta$ , also  $\psi \geq 2\zeta$ . Ein Rhombus mit dem Winkel  $\psi$  hat den zweiten Winkel  $2\zeta$ . Folglich ist  $\psi$  als der größere dieser beiden Winkel mindestens gleich dem Quadratwinkel  $\beta$ . Insbesondere ist  $\psi > \pi/2$ .

Nach dem Cosinussatz und Sinussatz bestehen die Beziehungen

$$(8) \quad \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \varphi = \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos \psi,$$

$$\cos \xi = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\sin c \cdot \sin \xi = \sin a \cdot \sin \varphi.$$

Bei Differentiation nach  $\varphi$  erhält man

$$-\sin c \cdot c' = -\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \varphi = -\sin b \cdot \sin c \cdot \sin \xi,$$

$$c' = \sin b \cdot \sin \xi,$$

$$-\sin \xi \cdot \xi' = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin^2 c} \cdot c' = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin^2 c} \cdot \sin \xi,$$

$$\xi' = -\frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin^2 c}.$$

Entsprechend gilt  $\eta' = -\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 c}$ , also

$$(\xi + \eta)' = -\frac{(\cos a + \cos b) \cdot (1 - \cos c)}{\sin^2 c} = -\frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}.$$

Die Winkelsumme  $\sigma_1 = \varphi + \xi + \eta$  des einen Teildreiecks besitzt hiernach die Ableitung

$$(9) \quad \sigma_1' = 1 - \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}.$$

Ersetzt man hier  $b$  durch  $a$ , so erhält man entsprechend für die Winkelsumme  $\sigma_2 = \varphi + 2\zeta$  des anderen Teildreiecks

$$\frac{d\sigma_2}{d\varphi} = 1 - \frac{2\cos a}{1 + \cos c}.$$

<sup>3)</sup> Auf der Minimalkugel für  $N = 9$  ist  $\cos a = 1/3$  (vgl. [§ 12]). Daher bedeutet die Voraussetzung  $\cos a \geq 1/3$ , daß mindestens 9 Punkte mit Mindestabstand  $a$  (gemessen auf der Oberfläche) auf der Kugel Platz haben.

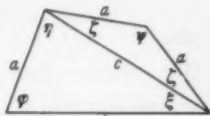


Fig. 5.

und somit

$$(10) \quad \sigma'_2 = \frac{d\sigma_2}{d\psi} \cdot \psi' = \left(1 - \frac{2\cos a}{1 + \cos c}\right) \cdot \psi'.$$

Durch Differentiation der Formel (8) ergibt sich

$$-\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \varphi = -\sin^2 a \cdot \sin \psi \cdot \psi',$$

also

$$(11) \quad \psi' = \frac{\sin b \cdot \sin \varphi}{\sin a \cdot \sin \psi}.$$

Mit (9) und (10) bekommt man für die Winkelsumme  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  die zweite Ableitung

$$\sigma'' = -(\cos a + \cos b + 2 \cos a \cdot \psi') \frac{d(1 + \cos c)^{-1}}{d\varphi} + \frac{d\sigma_2}{d\psi} \cdot \psi''.$$

Dabei ist

$$\frac{d(1 + \cos c)^{-1}}{d\varphi} = \frac{\sin c \cdot c'}{(1 + \cos c)^2} = \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \varphi}{(1 + \cos c)^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A = \cos a + \cos b + 2 \cos a \cdot \psi',$$

so erhalten wir

$$(12) \quad \sigma'' = -A \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \varphi}{(1 + \cos c)^2} + \frac{d\sigma_2}{d\psi} \cdot \psi''.$$

Da  $\sin a \cdot \sin \varphi \geq 0$  ist (der Winkel  $\varphi$  eines konvexen Vierecks ist  $\leq \pi$ ), so ergibt sich die Behauptung  $\sigma'' \leq 0$  gemäß Gleichung (12) aus den Ungleichungen

$$\sin b \geq 0, A \geq 0, \frac{d\sigma_2}{d\psi} \leq 0, \psi'' \geq 0.$$

Diese bestätigen wir einzeln:

1. Da das Viereck konvex sein soll, ist der Umfang  $3a + b \leq 2\pi$ . Ferner ist  $b \leq 3a$ . Daraus folgt  $b \leq \pi$ , also  $\sin b \geq 0$ .

2. Auf Grund der Konvexität des Vierecks ist  $\eta \leq \pi - \zeta$ . Da außerdem  $\zeta \leq \eta$  (wegen  $a \leq b$ ) ist, folgt  $\sin \zeta \leq \sin \eta$ , also  $\frac{\sin \eta}{\sin \zeta} \geq 1$ . Das ergibt nach

dem Sinussatz  $\frac{\sin b \cdot \sin \varphi}{\sin a \cdot \sin \psi} \geq 1$  und nach (11)

$$(13) \quad \psi' \geq 1.$$

Folglich ist

$$A = \cos a + \cos b + 2 \cos a \cdot \psi' \geq 3 \cos a + \cos b$$

und gemäß der Voraussetzung für  $a$

$$A \geq 1 + \cos b \geq 0.$$

3.  $\sigma_2$  ist die halbe Winkelsumme eines Rhombus mit Winkel  $\psi$ . Dieser Winkel ist mindestens gleich dem Quadratwinkel  $\beta$ . Daher nimmt die Winkelsumme bei wachsendem  $\psi$  ab, d. h. es ist  $\frac{d\sigma_2}{d\psi} \leq 0$ .

4. Aus (11) folgt

$$\begin{aligned} \psi'' &= \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \right) = \frac{\sin b}{\sin a} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} - \frac{\sin \varphi \cdot \cos \psi}{\sin^2 \psi} \cdot \psi' \right) \\ &= \frac{\sin b \cdot \cos \varphi}{\sin a \cdot \sin \psi} - \cotg \varphi \cdot \psi'^2. \end{aligned}$$

Wegen  $\psi > \pi/2$  ist  $\cotg \psi < 0$  und nach (13)  $-\cotg \psi \cdot \psi'^2 \geq -\cotg \psi$ . Hiermit erhält man

$$\psi'' \geq \frac{\sin b \cdot \cos \varphi}{\sin a \cdot \sin \psi} - \cotg \psi = \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \cos \varphi - \sin^2 a \cdot \cos \psi}{\sin^2 a \cdot \sin \psi}.$$

Nach (8) ist

$$\begin{aligned} & \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \varphi - \sin^2 a \cdot \cos \psi \\ &= (\cos c - \cos a \cdot \cos b) - (\cos c - \cos^2 a) = \cos a (\cos a - \cos b). \end{aligned}$$

Da  $a \leq b$  ist, so  $\cos a - \cos b \geq 0$  und somit  $\psi'' \geq 0$ .

Hiermit ist die Behauptung  $\sigma'' \leq 0$  bestätigt.

### § 5. Winkelabschätzungen für gleichseitige konvexe Fünfecke.

Wir betrachten gleichseitige konvexe Fünfecke mit der Seitenlänge  $a$ . (Solche Fünfecke sind auf der Kugel nur dann möglich, wenn der Umfang  $5a \leq 2\pi$ , also  $a \leq \frac{2\pi}{5}$  ist [§ 6].) Ein spezielles

derartiges Fünfeck ist das regelmäßige Trapez mit der Grundlinie  $2a$  und den drei übrigen Seiten  $a$  (Fig. 6). Den Basiswinkel dieses Trapezes bezeichnen wir mit  $\tau_1$ , den anderen Trapezwinkel mit  $\tau_2$ .

**Satz 6.** In einem gleichseitigen konvexen Fünfeck sind mindestens vier Winkel  $\geq \tau_1$ .

**Beweis:** Das gleichseitige konvexe Fünfeck  $A_1 \dots A_5$  habe die Winkel  $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ . Ist  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ , so  $A_2 A_5 \leq A_1 A_3$ , folglich (mit den Bezeichnungen von Fig. 7)  $\varphi_3 - \chi \leq \varphi_5 - \chi$ , also  $\varphi_3 \leq \varphi_5$ . Aus  $\varphi_1 \leq \varphi_5$  folgt ebenso  $\varphi_4 \leq \varphi_2$ . Ist  $\varphi_1$  der kleinste Fünfeckwinkel, so ist daher  $\varphi_3$  oder  $\varphi_4$  der zweitkleinste Winkel des Fünfecks. Es seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_4$  die beiden kleinsten Fünfeckwinkel.

Ist  $\varphi_1 \neq \varphi_4$ , so verschieben wir das Fünfeck unter Festhaltung der Punkte  $A_1, A_4, A_5$  so, daß  $\varphi_1 = \varphi_4$  wird. Dabei wird der kleinere dieser beiden Winkel vergrößert und der größere verkleinert. Weiterhin deformieren wir das Fünfeck unter Festhaltung der Punkte  $A_2, A_3$  so, daß  $A_5$  längs des Lotes von  $A_5$  auf  $A_2 A_3$  wandert (Fig. 8). Wird dieses Lot verkleinert, so auch die Diagonale  $d = A_2 A_5 = A_3 A_5$ , also auch der Winkel  $\varphi_1 = \varphi_4$ . Die Deformation ist unter Aufrechterhaltung der Konvexität so weit möglich, bis  $A_1 A_5 A_4$  in die Grundlinie des regelmäßigen Trapezes, also  $\varphi_1$  und  $\varphi_4$  in  $\tau_1$  übergeht. Bei allen diesen Verschiebungen ist der zweitkleinste Winkel nicht verkleinert worden. Folglich war er auch am Anfang  $\geq \tau_1$ , was zu beweisen war.

**Satz 7.** Für  $a \geq \pi/3$  ist  $\tau_2 \geq \pi - \alpha/2$  (wobei  $\alpha$  der Winkel des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  ist).

**Indirekter Beweis:** Ist  $\tau_2 < \pi - \alpha/2$ , so lassen sich an ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge  $a$  drei regelmäßige Trapeze so anlegen, daß die ver-

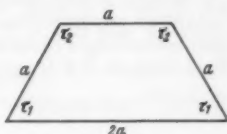


Fig. 6.

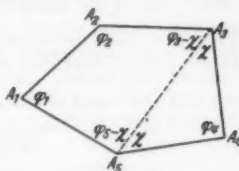


Fig. 7.

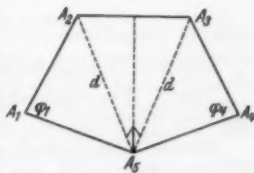


Fig. 8.

längerten Grundlinien des Trapezes ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge  $> 2a$  bilden (Fig. 9). Da der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks auf

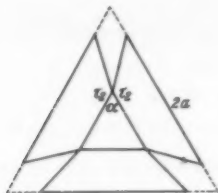


Fig. 9.

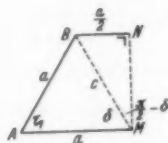


Fig. 10.

der Kugel  $\leq 2\pi$  ist, muß in diesem Falle  $6a < 2\pi$ , also  $a < \pi/3$  sein.

**Satz 8.** Für  $a \geq \pi/3$  ist  $\tau_1 > 98^\circ$ .

**Beweis:** Durch die Strecke  $c$ , welche den Mittelpunkt  $M$  der Trapezbasis mit einer gegenüberliegenden Ecke verbindet, wird das halbe Trapez in ein gleichschenkliges Dreieck  $MAB$  mit dem Basiswinkel  $\delta$  und in ein rechtwinkliges Dreieck  $BNM$  zerlegt (Fig. 10). Es ist

$$\cos \delta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin c}$$

und nach dem Cosinussatz

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos \tau_1, \\ \cos a &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \delta. \end{aligned}$$

Setzt man die Ausdrücke für  $\sin c$  und  $\cos c$  aus den beiden ersten Gleichungen in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos^3 a + \sin^2 a \cdot \cos a \cdot \cos \tau_1 + \sin a \cdot \sin \frac{a}{2}, \\ \cos \tau_1 &= \frac{\sin a \cdot \cos a - \sin \frac{a}{2}}{\sin a \cdot \cos a} = 1 - \frac{1}{2 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos a}. \end{aligned}$$

Für  $a \geq \frac{\pi}{3}$  ist  $\cos a \leq \frac{1}{2}$ ,  $\cos \frac{a}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Daraus folgt

$$\cos \tau_1 \leq 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < -0,15 \text{ und } \tau_1 > 98^\circ.$$

Aus den Abschätzungen der Sätze 7 und 8 folgt:

**Satz 9.** Ein irreduzibler Graph für  $N = 13$  bei  $r \leq 1$  enthält kein Fünfeck mit dem Winkel  $\tau_1$ .

**Beweis:** Ein Fünfeck eines irreduziblen Graphen ist konvex. Der kleinste Flächeninhalt ergibt sich immer am Rande des zugelassenen Bereiches, für ein Fünfeck mit Winkel  $\tau_1$  also bei dem regelmäßigen Trapez. Dem minimalen Inhalt entspricht minimaler Winkelüberschuß. Das regelmäßige Trapez hat den Winkelüberschuß

$$w_1 = \pi + 2\tau_1 + 2\tau_2 - 9\alpha.$$

Die Differenz gegenüber dem Gesamtwinkelüberschuß  $W$  der Kugel ist nach (1)

$$\begin{aligned} w_1 - W &= (\pi + 2\tau_1 + 2\tau_2 - 9\alpha) - (26\pi - 66\alpha) \\ &= 2\tau_1 + 2\tau_2 + 57\alpha - 25\pi. \end{aligned}$$

Auf Grund der Sätze 7 und 8 ist diese Differenz

$$> 196^\circ + 56\alpha - 23\pi.$$

Mit  $\alpha > 70,5^\circ$  (für  $r \leq 1$ ) erhält man

$$w_1 - W > 196^\circ + 3948^\circ - 4140^\circ > 0.$$

Der Gesamt-Winkelüberschuß  $W$  der Kugel wird also bereits von dem Winkelüberschuß  $w_1$  des regelmäßigen Trapezes überschritten.

### § 6. Zweiter Beweis für $r > 1$ bei $N = 13$ .

Wir legen wie im § 3 eine Minimalfigur für  $N = 13$  zugrunde, die im Falle  $r \leq 1$  von einem irreduziblen Graphen aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken gebildet wird. Der Grad eines jeden Punktes ist dann 3, 4 oder 5. Als „große Winkel“ bezeichnen wir alle Viereckwinkel  $\geq \beta$  und alle Fünfeckwinkel  $\geq \tau_1$ . Dann gelten folgende drei Sätze.

I. An einem Punkt 5. Grades liegt kein großer Winkel.

Beweis: Zieht man von dem Vollwinkel die minimale Summe von 4 Winkeln ab, so bleibt nur

$$2\pi - 4\alpha < 360^\circ - 4 \cdot 70,5^\circ = 78^\circ,$$

während ein großer Winkel jedenfalls  $> 90^\circ$  ist.

II. An einem Punkt 4. Grades liegt höchstens ein großer Winkel.

Beweis: Angenommen, man hätte zwei große Winkel an einem Punkt 4. Grades. Da  $2\alpha + 2\beta \geq 2\pi$  ist [vgl. (2)], können die großen Winkel nur dann Viereckwinkel sein, wenn sie beide gleich  $\beta$  sind. Dann enthielte aber der Graph zwei Quadrate, was nach Satz 4 nicht möglich ist. Ebenso können nach Satz 4 nicht beide große Winkel zu Fünfecken gehören. Es kann sich also nur um einen Fünfeckwinkel  $\gamma_1$  und einen Viereckwinkel  $\gamma_2$  handeln. Das konvexe Fünfeck kleinsten Inhalts mit dem Winkel  $\gamma_1$  besitzt einen gestreckten Winkel (Fig. 11). Nach Satz 5 ist der Inhalt dieses gestreckten Fünfecks eine konkave Funktion von  $\gamma_1$ . Unter Festhaltung der Summe  $\gamma_1 + \gamma_2$  ist auch die Summe der minimalen Winkelüberschüsse des Vierecks und des Fünfecks eine konkave Funktion von  $\gamma_1$ . Sie besitzt ihr Minimum am Rande des zugelassenen Bereichs. Es gibt genau zwei Randlagen, nämlich eine mit  $\gamma_1 = \tau_1$ , die andere mit  $\gamma_2 = \beta$ . (Hierbei werden die oberen Schranken für die Winkel nicht erreicht, da dann jedenfalls  $\gamma_2 < 2\alpha$  bzw.  $\gamma_1 \leq \beta$  ist.) In beiden Fällen wird aber der Gesamtwinkelüberschuß der Kugel überschritten, nämlich entweder (nach Satz 9) durch ein Fünfeck mit dem Winkel  $\tau_1$  oder (nach Satz 4) durch ein Fünfeck zusammen mit einem Quadrat.

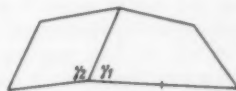


Fig. 11.

III. An einem Punkt 3. Grades liegen höchstens zwei große Winkel.

Beweis: Angenommen, alle 3 Winkel an einem Punkt 3. Grades seien groß. Die anliegenden Polygone besitzen die kleinste Winkelüberschuß-Summe, wenn zwei dieser Winkel eine Grenzlage einnehmen. Da (nach Satz 4) höchstens ein Fünfeck auftritt, hat dann mindestens ein Viereckwinkel die Grenz-

lage  $\beta$  oder  $2\alpha$ . Der Grenzfall  $2\alpha$  führt auf die Verhältnisse des Satzes II zurück, braucht also nicht berücksichtigt zu werden. Bei dem anderen Grenzfall liegt ein Quadrat vor. Dann kann (nach Satz 4) kein Fünfeck auftreten, so daß auch der andere Grenzwinkel ein Viereckswinkel  $\beta$  sein muß. In diesem Falle hätte man zwei Quadrate, die ja bereits einen zu großen Winkelüberschuß beanspruchen.

Mit Hilfe der Sätze I–III ist nun die Annahme  $r \leq 1$  für  $N = 13$  leicht zum Widerspruch zu führen.

Es sei  $g_k$  die Anzahl der  $k$ -eckigen Polygone des Graphen und  $n_k$  die Anzahl der Punkte  $k$ -ten Grades, also  $G = g_3 + g_4 + g_5$  die Gesamtzahl der Polygone und  $N = n_3 + n_4 + n_5$  die Gesamtzahl der Punkte.

Da jedes Viereck mindestens 2 große Winkel  $\geq \beta$  und jedes Fünfeck (nach Satz 6) mindestens 4 große Winkel  $\geq \tau_1$  enthält, ist die Gesamtzahl der großen Winkel  $\geq 2g_4 + 4g_5$ . Nach den Sätzen I–III ist diese Zahl  $\leq 2n_3 + n_4$ . Es gilt also

$$2g_4 + 4g_5 \leq 2n_3 + n_4.$$

Addieren wir hierzu die doppelte Anzahl der Strecken

$$2K = 3g_3 + 4g_4 + 5g_5 = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5,$$

so erhalten wir

$$3(g_3 + 2g_4 + 3g_5) \leq 5(n_3 + n_4 + n_5) = 5N.$$

Nach dem EULERSchen Polyedersatz ist

$$\begin{aligned} g_3 + 2g_4 + 3g_5 &= (3g_3 + 4g_4 + 5g_5) - 2(g_3 + g_4 + g_5) \\ &= 2K - 2G = 2(N - 2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$6(N - 2) \leq 5N, \quad \text{also} \quad N \leq 12,$$

womit der Widerspruch erreicht ist.

(Eingegangen am 18. Mai 1952.)

## Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von

HANS RICHTER in Freiburg i. Br.

### Teil III. Die Begründung des Additions- und des Multiplikationssatzes.

#### § 11. Axiomatisierung der Versuchsschemata.

Die Betrachtungen des § 10 von Teil II dieser Arbeit<sup>1)</sup> führten die Begründung des Additions- und des Multiplikationssatzes auf den nunmehr zu erbringenden Beweis des grundlegenden Satzes 2 zurück. Die darin genannten Axiome 1—6 beziehen sich auf gewisse Gegenstände, die Ereignisse  $E | H$ , deren Erklärung in den Paragraphen 5—7 bewußt teilweise stark anschaulichen Charakter trägt. Wir bemerkten bereits, daß wir deshalb im Interesse der axiomatischen Sauberkeit noch vor dem geforderten Beweis den Inhalt der §§ 5—7 in axiomatisierte Gestalt bringen müssen. Bei der Formulierung dieser Axiome wollen wir insofern dem HILBERTSchen Beispiel folgen, als es uns nicht darauf ankommt, formal möglichst schwache Axiome zu haben<sup>2)</sup>, sondern ein Axiomensystem aufzubauen, das im engsten Anschluß an die Anschauung bleibt, die ihrerseits den anzugebenden Formalismus erst verständlich macht. Nicht aufgenommen in die Axiomatik werden die Betrachtungen über reale Koppelungen<sup>3)</sup>, die für den Beweis von Satz 2 nicht benötigt werden. Dieser Verzicht entspricht auch dem Programm, in den weiteren, erkenntniskritische Betrachtungen enthaltenden Teilen dieser Arbeit wieder die physikalistische Sprechweise zu verwenden und die Axiomatisierung auf diesen rein mathematischen Teil zu beschränken.

Das folgende Axiomensystem enthält römisch numerierte Axiome über Versuchsschemata und die wie bisher arabisch numerierten Axiome über die Belegung mit Erwartungskoeffizienten (EK); außerdem Definitionen, die sich im Anschluß an Axiome aussprechen lassen und deren Inhalt bei der Formulierung der weiteren Axiome verwendet wird. Abschließend werden aus dem Axiomensystem einige einfache Folgerungen gezogen, auf die bei den Beweisen ebenso wie auf die Axiome und Definitionen zurückgegriffen werden wird. Die in Teil II, § 6 erklärten Bezeichnungen bei endlichen abstrakten Mengenkörpern bleiben aufrecht erhalten und werden nicht wiederholt.

#### A. Axiome der Schemata.

A I. *Es gibt Versuchsschemata  $H$  (im folgenden kurz Schemata genannt) und mögliche Versuchsergebnisse  $x_v | H$  (kurz Ergebnisse genannt).*

A II. *Zu jedem  $H$  gehören endlich viele Ergebnisse  $x_v | H$ ;  $v = 1, 2, \dots, n(H)$ ;  $n(H) \geq 2$ .*

<sup>1)</sup> Math. Ann. 125, 223 — 234 (1952).

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. die unnötig starke Formulierung des Parellelaxioms bei HILBERT.

<sup>3)</sup> Sie wären analog zu Axiom IV als nicht-eindeutig bestimmte, nicht-assoziative und nicht-kommutative Produkte einzuführen, deren Ereigniskörper nicht wie bei formalen Koppelungen durch mathematische Operationen aus den einzelnen Ereigniskörpern erhalten werden kann und für die es auch keine Belegungsaxiome gibt.

**Def. I.** Der Mengenkörper  $\mathfrak{H}$  mit den Atomen  $x_r | H$  heißt Ereigniskörper von  $H$ ; seine Elemente, die Ereignisse von  $H$ , heißen  $E | H$ .

**A III.** Ist  $\tilde{\mathfrak{H}}$  eine Vergrößerung des Ereigniskörpers  $\mathfrak{H}$  von  $H$ , so gibt es genau ein Schema  $\tilde{H}$  mit Ereigniskörper  $\tilde{\mathfrak{H}}$ .

**Def. II.** In A III heißt  $\tilde{H}$  eine Vergrößerung von  $H$ ;  $H$  heißt Verfeinerung von  $\tilde{H}$ .

**Def. III.** Die  $E | H \in \tilde{\mathfrak{H}}$  heißen gleichzeitig  $E | \tilde{H}$ .

**A IV.** In der Menge aller  $H$  ist teilweise eine Produktbildung  $F(H_1, H_2)$  bei nicht notwendig verschiedenen  $H_r$  definiert mit den Eigenschaften:

a) Existiert  $F_{12} = F(H_1, H_2)$  und  $F_{12,3} = F(F_{12}, H_3)$ , so existieren auch  $F_{21} = F(H_2, H_1)$ ,  $F_{23} = F(H_2, H_3)$  und  $F_{1,23} = F(H_1, F_{23})$ .

b) Der Ereigniskörper von  $F(H_1, H_2)$  ist  $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ .

**Def. IV.** Existiert  $F = F(H_1, H_2)$ , so heißt  $F$  die formale Koppelung von  $H_1$  mit  $H_2$ .  $H_1$  und  $H_2$  heißen formal koppelbar.

**Def. V.** Sind  $x_r | H_1$  und  $y_\mu | H_2$  resp. die Atome von  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$ , so heißt das gemäß A IV dem Paare  $(x_r | H_1, y_\mu | H_2)$  zugeordnete  $\mathfrak{F}$ -Atom:  $(x_r, y_\mu) | F(H_1, H_2)$ . Entsprechend ist  $(E_1, E_2) | F(H_1, H_2)$  definiert bei  $E_r \in \mathfrak{H}_r$ .

**Def. VI.** Existiert  $F(H_1, H_2)$  und ist  $E_2 \in \mathfrak{H}_2$ , so heißt  $E_2$  abschließbar gegen  $H_1$ .

**Def. VII.** Existiert  $F(H_1, H_2)$ , so heißt  $(E_1, \Omega(H_2)) | F(H_1, H_2)$  äquivalent zu  $E_1 | H_1$ ; symbolisch  $(E_1, \Omega(H_2)) | F(H_1, H_2) \sim E_1 | H_1$ .

## B. Belegungsaxiome.

**B 1.** Jedem  $E | H$  ist eindeutig eine reelle Zahl  $\varrho(E | H)$  zugeordnet.

**Def. VIII.**  $\varrho(E | H)$  heißt der Erwartungskoeffizient ( $EK$ ) von  $E | H$ .

**Def. IX.**  $\mathfrak{R}$  ist die Menge aller  $\varrho$ .  $\overline{\mathfrak{R}}$  ist die abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{R}$ .

**Def. X.**  $\mathfrak{M}$  ist die Menge aller  $(\varrho_1, \varrho_2)$ , wo die  $\varrho_r = \varrho(E_r | H)$  für irgendein gemeinsames  $H$  sind mit  $E_1 E_2 = 0$ .

$\overline{\mathfrak{M}}$  ist die abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{M}$ .

**Def. XI.**  $\mathfrak{Q}$  ist die Menge aller  $(\varrho_1, \varrho_2)$ , wo  $\varrho_r = \varrho(E_r | H_r)$  mit existentem  $F(H_1, H_2)$  ist.  $\overline{\mathfrak{Q}}$  ist die abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{Q}$ .

**B 2.**  $\varrho(0 | H) = 0$ ;  $\varrho(\Omega | H) = 1$ .

**B 3.** Es gibt eine Funktion  $f(\xi, \eta)$  mit den Eigenschaften:

a)  $f$  ist stetig erklärt auf  $\overline{\mathfrak{M}}$ ;

b) ist  $(\xi, \eta) \in \overline{\mathfrak{M}}$  mit  $\eta \neq 0$ , so ist  $f(\xi, \eta) > \xi$ ;

c)  $\varrho(E_1 + E_2 | H) = f(\varrho(E_1 | H), \varrho(E_2 | H))$ .

**B 4.** Ist  $E' | H'$  äquivalent zu  $E'' | H''$ , so ist  $\varrho(E' | H') = \varrho(E'' | H'')$ .

**B 5.** Es gibt eine Funktion  $\varphi(\xi, \eta)$  mit den Eigenschaften:

a)  $\varphi$  ist stetig erklärt auf  $\overline{\mathfrak{Q}}$ ;

b) ist  $(\xi, \eta) \in \mathfrak{Q}$  mit  $\varphi(\xi, \eta) = 0$ , so ist  $\xi \cdot \eta = 0$ ;

c)  $\varrho((E_1, E_2) | F(H_1, H_2)) = \varphi(\varrho(E_1 | H_1), \varrho(E_2 | H_2))$ .

**B 6.** Es gibt ein  $\lambda > 0$  so, daß zu jedem  $H$  ein gegen  $H$  abschließbares Ereignis  $E_1 | H_1$  existiert mit

$$\varrho(E_1 | H_1) \geq \lambda \quad \text{und} \quad |\varrho(E_1 | H_1) - 1| \geq \lambda.$$

Wir ziehen nun aus dem Axiomensystem zunächst einige einfache Folgerungen, von denen sich die ersten auf die Schemata beziehen und mit  $S_1, S_2, \dots$  bezeichnet werden. Zunächst bemerken wir, daß jedes  $\mathfrak{H}$  als Vergrößerung von sich selbst aufgefaßt werden kann, so daß wir wegen A III haben:

$S_1$ : Zu jedem  $H$  gehört genau ein  $\mathfrak{H}$  und umgekehrt.



Trotz dieser eindeutigen Beziehung der  $H$  zu ihren  $\mathfrak{H}$  ist die Beibehaltung der Unterscheidung zweckmäßig, da für die  $\mathfrak{H}$  als Mengenkörper stets ein Produkt definiert ist, nicht aber für die  $H$ . Nur wenn die Produktbildung der  $H$  gemäß A IV existiert, ist das entsprechende mengentheoretische Produkt der Ereigniskörper wieder ein Ereigniskörper; anderenfalls ist es nur ein formal mathematisches Gebilde. Weiter ist darauf zu achten, daß erst das ganze  $\mathfrak{H}$  sein  $H$  festlegt, nicht aber ein einzelnes  $E \in \mathfrak{H}$ , das auch zu einer Vergrößerung  $\tilde{H}$  gehören kann.

Wegen der Assoziativität und Kommutativität der direkten Produktbildung für Mengenkörper liefert A IV b für die Ereigniskörper der in A IV a genannten Schemata:  $\mathfrak{H}_{12} = \mathfrak{H}_{21}$ ,  $\mathfrak{H}_{123} = \mathfrak{H}_{132}$  und damit wegen  $S_1$ :

$S_2$ : Die Produktbildung für Schemata ist im Falle der Existenz kommutativ und assoziativ.

Für  $F(F(H_1, H_2), H_3)$  schreiben wir daher einfacher  $F(H_1, H_2, H_3)$  und entsprechend für mehr als drei Faktoren. Es seien jetzt  $\tilde{H}_1$  und  $\tilde{H}_2$  resp. Vergrößerungen von  $H_1$  und  $H_2$ . Die zugehörigen Ereigniskörper  $\tilde{\mathfrak{H}}$  sind Vergrößerungen der  $\mathfrak{H}$ .  $\tilde{\mathfrak{H}}_1 \times \tilde{\mathfrak{H}}_2$  ist eine Vergrößerung von  $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ . Existiert  $F(H_1, H_2)$ , so ist also  $\tilde{\mathfrak{H}}_1 \times \tilde{\mathfrak{H}}_2$  ein  $\tilde{\mathfrak{H}}$  und ist damit nach A III Ereigniskörper eines  $\tilde{F}$ . Existiert nun auch  $F(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ , so ist nach  $S_1$ :  $F(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \tilde{F}$ . Ist dagegen  $F(H_1, \tilde{H}_2)$  nicht definiert, so würde die Definition  $F(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \tilde{F}$  nicht in Widerspruch zu den Axiomen A kommen; sie kommt aber auch nicht in Widerspruch zu den Axiomen B, da in diesen letzteren allgemein von Ereignissen und nicht speziell von Ergebnissen die Rede ist, alle Ereignisse von  $\tilde{F}$  aber gleichzeitig solche von  $F$  sind. Wir notieren

$S_3$ : Existiert  $F = F(H_1, H_2)$ , so ist  $F(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$  erklärbar als diejenige Vergrößerung von  $F$ , die zu  $\tilde{\mathfrak{H}}_1 \times \tilde{\mathfrak{H}}_2$  gehört, wenn die  $\tilde{\mathfrak{H}}$  die Ereigniskörper der Vergrößerungen  $\tilde{H}$  der  $H$  sind.

Wir werden im folgenden stets annehmen, daß diese Erklärung von  $F(H_1, H_2)$  erfolgt sei.

Aus B 6 mit Def. VI folgt durch vollständige Induktion sofort

$S_4$ : Zu jedem vorgegebenen Schema  $H_0$  und jedem natürlichen  $N$  gibt es  $N$  Ereignisse  $E_r | H_r$  mit den Eigenschaften:

a)  $F(H_0, H_1, \dots, H_N)$  existiert<sup>4)</sup>;

b)  $|\varrho(E_r | H_r)| \geq \lambda$  und  $|\varrho(E_r | H_r) - 1| \geq \lambda$  mit  $\lambda > 0$  gemäß B 6.

Wir kommen nun zur nächsten Gruppe von Folgerungen  $M_1, M_2, \dots$ , die sich auf die in Def. IX—XI eingeführten Mengen  $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{L}$  beziehen, sowie zu Folgerungen  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  bezügl. der Funktionen  $f$  und  $\varphi$ . Aus A I mit B 1 und B 6 folgt zunächst

$M_1$ :  $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{L}$  sind nicht leer.

Aus B 6 mit Def. VI folgt insbesondere, daß es zu jedem  $H$  ein mit  $H$  formal koppelbares  $H_1$  gibt. Dies liefert

$M_2$ : Ist  $\xi \in \mathfrak{R}$  (resp.  $\mathfrak{R}$ ), so ist  $(\xi, 0) \in \mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{L}$  (bzw.  $\bar{\mathfrak{M}}$  und  $\bar{\mathfrak{L}}$ ), sowie  $(\xi, 1) \in \mathfrak{L}$  (bzw.  $\mathfrak{L}$ ).

Aus B 2 und B 3 ergibt sich nun wegen

$$\varrho = \varrho(E | H) = \varrho(E + 0 | H) = f(\varrho, 0):$$

<sup>4)</sup> Damit existieren auch alle  $F$  mit weniger Faktoren aus den  $H_r$ .

$\Phi_1$ : Ist  $\xi \in \overline{\mathfrak{M}}$ , so ist  $f(\xi, 0) = \xi$ . Ist  $(\xi, \eta) \in \overline{\mathfrak{M}}$ , so ist  $f(\xi, \eta) \geq \xi$ .

Entsprechend ist bei der formalen Koppelung  $F$  aus  $H_1$  und  $H_2$  wegen  $(E, 0) \mid F = 0 \mid F$ :

$\Phi_2$ : Ist  $\xi \in \overline{\mathfrak{M}}$ , so ist  $\varphi(\xi, 0) = 0$ .

Schließlich liefern B 2 und B 4 mit Def. VII

$\Phi_3$ : Ist  $\xi \in \overline{\mathfrak{M}}$ , so ist  $\varphi(\xi, 1) = \xi$ .

Ebenso selbstverständlich sind die beiden nächsten Folgerungen

$M_3$ : Ist  $(\xi, \eta) \in \mathfrak{M}$  (resp.  $\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}$ ), so auch  $(\eta, \xi)$ .

$\Phi_4$ : Für  $(\xi, \eta) \in \mathfrak{M}$  ist  $f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi)$ ; für  $(\xi, \eta) \in \overline{\mathfrak{L}}$  ist  $\varphi(\xi, \eta) = \varphi(\eta, \xi)$ .

Ist nun  $\varphi(E \mid H)$  ungleich Null oder Eins, so ist nach B 2 und 3 sowie  $\Phi_1$  und  $\Phi_4$ :

$$1 = \varphi(E + \overline{E} \mid H) = f(\varphi(E \mid H), \varphi(\overline{E} \mid H)) \geq \varphi(E \mid H) = \varphi(E + 0 \mid H) = f(0, \varphi(E \mid H)) > 0.$$

Dies liefert

$M_4$ :  $\mathfrak{M}$  liegt auf  $0 \leq \xi \leq 1$ ;  $\overline{\mathfrak{M}}$  und  $\mathfrak{L}$  liegen auf  $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ .

Einen Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{L}$  liefert die offensichtliche Folgerung

$M_5$ : Ist  $(\varrho', \varrho'') \in \mathfrak{M}$  und  $(\varrho', \varrho) \in \mathfrak{L}$ , so ist auch  $(\varrho'', \varrho) \in \mathfrak{L}$  und  $(f(\varrho', \varrho''), \varrho) \in \mathfrak{L}$ .

Bei  $M_5$  darf man jedoch nicht zu  $\overline{\mathfrak{M}}$  und  $\overline{\mathfrak{L}}$  übergehen. Im Falle von  $M_5$  gilt für die Funktionen  $f$  und  $\varphi$

$\Phi_5$ :  $\varphi(f(\varrho', \varrho''), \varrho) = f(\varphi(\varrho', \varrho), \varphi(\varrho'', \varrho))$ .

## § 12. Beweis des Transformationssatzes.

Wir kommen nun zum Beweis für den in Teil II angegebenen

**Satz 2:** Genügt ein System von  $\varphi(E \mid H)$  den Axiomen A I bis IV und B 1 bis 6, so gibt es eine stetige, monoton steigende Funktion  $h(x)$  mit  $h(0) = 0$  und  $h(1) = 1$  so, daß für  $p = h(\varrho)$  die zugehörigen Funktionen  $f_1$  und  $\varphi_1$  der Axiome 3 und 5 zu  $f_1 = \xi + \eta$  und  $\varphi_1 = \xi \cdot \eta$  werden.

Dieser Satz ist in gewissem Sinne analog einem bekannten Satze über einparametrische LIESCHE Gruppen. Der wesentliche Unterschied liegt darin, daß es negative infinitesimale Werte nicht gibt und daß die Definitionsgebiete von  $f$  und  $\varphi$  unbekannt sind. Dafür haben wir zwei unbekannte Funktionen, die miteinander verknüpft sind. Diese letztere Tatsache nützen wir dazu aus, die unbekannten Definitionsgebiete  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{L}$  zu bestimmen. Wir gliedern dabei den Beweis in verschiedene Hilfssätze.

**Lemma I:** Es gibt eine Funktion  $m(a)$  so, daß aus  $(\xi, \eta) \in \overline{\mathfrak{M}}$  mit  $\xi \geq a > 0$  folgt:  $\eta \leq m(a) < 1$ .

**Beweis:** Im Durchschnitt von  $\overline{\mathfrak{M}}$  mit  $\{\xi \geq a\}$  ist  $\eta$  stetig und nimmt daher sein Maximum  $\eta_0 = m(a)$  an einer Stelle  $(\xi_0, \eta_0)$  an. Es ist  $(\xi_0, \eta_0) \in \overline{\mathfrak{M}}$  und  $\xi_0 > 0$ , so daß wegen  $M_4, \Phi_4$  und B 3 b folgt:

$$1 \geq f(\xi_0, \eta_0) = f(\eta_0, \xi_0) > \eta_0 = m(a).$$

**Lemma II.** Es gibt eine Funktion  $l(a, b)$  so, daß aus  $(\xi, \eta) \in \overline{\mathfrak{L}}$  mit  $\xi \leq a < 1$  und  $\eta \geq b > 0$  folgt:  $\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta} \leq l(a, b) < 1$ .

*Beweis:* Nach B 5 a ist  $\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta}$  stetig in dem nach Voraussetzung nicht-leeren Durchschnitt  $\Omega_1$  von  $\bar{\Omega}$  mit  $\{\xi \leq a, \eta \geq b\}$ . Also ist  $\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta} \leq \frac{\varphi(\xi_0, \eta_0)}{\eta_0} = l(a, b)$  mit  $(\xi_0, \eta_0) \in \Omega_1$ . Es gilt also  $\xi_0 \leq a$  und  $\eta_0 \geq b$ .

Wegen  $(\xi_0, \eta_0) \in \bar{\Omega}$  gibt es eine Folge von nicht notwendig verschiedenen  $(\varrho'_r, \varrho_r) = (\varrho(E'_r | H'_r), \varrho(E_r | H_r)) \in \Omega$  mit  $\lim_{r \rightarrow \infty} (\varrho'_r, \varrho_r) = (\xi_0, \eta_0)$ . Setzen wir  $\varrho''_r = \varrho(\bar{E}'_r | H'_r)$ , so können wir eine Teilfolge so auswählen, daß  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho''_r = \zeta_0$  wird. Wir haben nach B 2 und B 3 die Formel  $f(\varrho'_r, \varrho''_r) = 1$  und deshalb nach  $\Phi_5$  und  $\Phi_3$

$$\varrho_r = f(\varphi(\varrho'_r, \varrho_r), \varphi(\varrho'_r, \varrho_r)).$$

Der Grenzübergang zu  $r \rightarrow \infty$  liefert dann:

$$(*) f(\xi_0, \zeta_0) = 1 \quad (**) \eta_0 = f(\varphi(\xi_0, \eta_0), \varphi(\zeta_0, \eta_0)).$$

Nun ist  $\xi_0 \leq a < 1$ , also folgt aus  $(*)$  wegen  $\Phi_1$  und  $M_4$ :  $\zeta_0 > 0$ . Da auch  $\eta_0 > 0$  ist, folgt aus B 5 b und  $M_4$ :  $\varphi(\zeta_0, \eta_0) > 0$ . Wegen B 3 b liefert dann  $(**)$ :  $\eta_0 > \varphi(\xi_0, \eta_0)$ , also  $l(a, b) = \frac{\varphi(\xi_0, \eta_0)}{\eta_0} < 1$ .

Lemma II liefert zusammen mit  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$  die auch unmittelbar ableitbare Formel

$$(12.1) \quad \varphi(\xi, \eta) \leq \min(\xi, \eta).$$

**Lemma III.** Zu vorgegebenen  $H_0$  und  $\delta > 0$  gibt es ein mit  $H_0$  formal koppelbares  $H$ , für dessen Ergebnisse  $x_r | H$  gilt:  $\varrho(x_r | H) < \delta$ .

*Beweis:* Wir wählen  $\lambda > 0$  gemäß B 6 und setzen  $\lambda' = \max(1 - \lambda, m(\lambda))$  mit  $m(\lambda)$  gemäß Lemma I. Es sei weiter  $N$  eine natürliche Zahl mit  $N \geq 1 + \frac{\log \delta}{\log l(\lambda', \delta)}$ , wo  $l(\lambda', \delta) < 1$  gemäß Lemma II gebildet ist. Zu  $H_0$  und  $N$  seien  $E_r, H_r$  gemäß  $S_4$  gewählt. Die Vergrößerung von  $H_r$  mit den Ergebnissen  $y'_r = E_r | H_r$  und  $y''_r = \bar{E}_r | H_r$  heiße  $\tilde{H}_r$ . Nach  $S_4 b$  und Lemma I ist  $\varrho(y^{(\mu)}_r | \tilde{H}_r) \leq \lambda'$  für  $\mu = 1$  oder 2. Nach  $S_3$  existieren bei  $1 \leq k \leq N$  die  $F_k = F(\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_k)$ , und jedes  $F_k$  ist mit  $H_0$  formal koppelbar.

Es sei nun  $(y^{(\mu_1)}_1, \dots, y^{(\mu_N)}_N) | F_N$  ein beliebiges Ergebnis von  $F_N$ . Wir betrachten alle zugehörigen  $\varrho_k = \varphi(y^{(\mu_1)}_1, \dots, y^{(\mu_k)}_k | F_k)$  mit  $1 \leq k \leq N$ . Ist nun  $\varrho_{N-1} < \delta$ , so nach (12.1) auch  $\varrho_N$ . Ist dagegen  $\varrho_{N-1} \geq \delta$ , so sind wegen (12.1) bei  $k \leq N-1$  alle  $\varrho_k \geq \delta$ . Es ist also  $\varrho_{k+1} = \varphi(\varphi(y^{(\mu_{k+1}}_{k+1} | H_{k+1}), \varrho_k)$  mit  $\varphi(y^{(\mu_{k+1}}_{k+1} | H_{k+1}) \leq \lambda' < 1$  und  $\varrho_k \geq \delta > 0$ , so daß nach Lemma II gilt:  $\varrho_{k+1} \leq \varrho_k \cdot l(\lambda', \delta)$ . Es folgt  $\varrho_N \leq \lambda' \cdot l^{N-1}(\lambda', \delta) < \delta$ .  $F_N$  ist also ein verlangtes  $H$ .

Als besonders kräftig erweisen wird sich das folgende

**Lemma IV.** Ist  $(\varrho_1, \varrho_2) \in \mathfrak{M}$  mit  $\varrho_1 \neq 0$ , so liegt bei vorgegebenen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  mit  $0 \leq \vartheta_1 < 1$  und  $0 \leq \vartheta_2 \leq 1$  der Punkt  $(\vartheta_1 \varrho_1, \vartheta_2 \varrho_2)$  in  $\mathfrak{M}$ , und es ist  $f(\vartheta_1 \varrho_1, \vartheta_2 \varrho_2) < 1$ .

*Beweis:* Nach Voraussetzung gibt es zwei disjunkte Ereignisse  $E_1 | H_0$  und  $E_2 | H_0$  mit  $\varrho_r = \varphi(E_r | H_0)$ . Gemäß B 3 a und  $\Phi_1$  wählen wir  $\delta_1 > 0$  so klein, daß  $f(\xi, \eta) - \xi < \varrho_1 \cdot (1 - \delta_1)$  wird für  $\eta < \delta_1$ . Die Anwendung von Lemma III mit  $\delta = \delta_1$  liefert ein mit  $H_0$  formal koppelbares  $H$ , für dessen Ergebnisse  $x_1 | H, \dots, x_n | H$  gilt:  $\varrho(x_r | H) < \delta_1$ . In  $H_0 = F(H_0, H)$  betrachten wir die aus den  $(E_1, x_r)$  und  $(E_2, \Omega(H))$  bestehende (im allgemeinen unvollständige)

Ereignisdisjunktion. Nach (12.1) ist  $\varrho((E_1, x_r) | H'_0) < \delta_1$ . Weiter ist nach  $\Phi_3$ :  $\varrho((E_r, \Omega(H)) | H'_0) = \varrho_r$ . Gemäß der Wahl von  $\delta_1$  können wir also ein  $(E_1, \sum_1^k x_r) | H'_0 = E'_1 | H'_0$  so finden, daß für  $\varrho'_1 = \varrho(E'_1 | H'_0)$  gilt:  $\vartheta_1 \varrho_1 \leq \varrho'_1 < \varrho_1$ .

Es ist also  $k < n$  und für  $E'_3 | H'_0 = (E_1, \sum_{k+1}^n x_r) | H'_0$  gilt:  $\varrho'_3 = \varrho(E'_3 | H'_0) > 0$ . Setzen wir noch  $E'_2 | H'_0 = (E_2, \Omega(H)) | H'_0$ , so haben wir damit in  $H'_0$  die disjunkten Ereignisse  $E'_1, E'_2$  und  $E'_3$  mit den Erwartungskoeffizienten  $\varrho'_i = \varrho(E'_i | H'_0)$  bei:

$$\varrho'_1 \geq \vartheta_1 \varrho_1 \quad \varrho'_2 = \varrho_2 \quad \varrho'_3 > 0.$$

Es sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben; dann nehmen wir  $\delta_2 > 0$  so, daß  $f(\xi, \eta) - \xi < \varepsilon$  wird bei  $\eta < \delta_2$ . Auf  $H'_0$  mit  $\delta_2$  wenden wir nochmals Lemma III an und finden ein  $H'$  für dessen Ergebnisse  $y_\mu | H'$  gilt:  $\varrho(y_\mu | H') < \delta_2$ . In  $F = F(H'_0, H')$  haben wir die disjunkten Ereignisse:  $(E'_1, y_\mu), (E'_2, y_\mu)$  und  $E'_3 = (E'_3, \Omega(H'))$ . Genau wie soeben finden wir  $E''_1 = (E'_1, \sum_1^p y_\mu)$  und  $E''_2 =$

$= (E'_2, \sum_1^q y_\mu)$  mit den EK  $\varrho''_1$  und  $\varrho''_2$  so, daß  $|\varrho''_1 - \vartheta_1 \varrho'_1| < \varepsilon$  und  $|\varrho''_2 - \vartheta_2 \varrho'_2| < \varepsilon$  wird, während  $\varrho''_3 = \varrho'_3 > 0$  ist. Nach Konstruktion ist dann  $(\varrho''_1, \varrho''_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$  und  $(f(\varrho''_1, \varrho''_2), \varrho''_3) = (f(\varrho'_1, \varrho'_2), \varrho'_3) \in \mathfrak{M}$ . Bei  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt:  $(\vartheta_1 \varrho_1, \vartheta_2 \varrho_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$  und  $(f(\vartheta_1 \varrho_1, \vartheta_2 \varrho_2), \varrho_3) \in \mathfrak{M}$ . Wegen  $\varrho_3 > 0$  und Lemma I ist  $f(\vartheta_1 \varrho_1, \vartheta_2 \varrho_2) < 1$ .

Für den Beweis von Lemma IV ist wesentlich, daß  $(\varrho_1, \varrho_2) \in \mathfrak{M}$  und nicht beliebig aus  $\overline{\mathfrak{M}}$  ist. Dagegen ist die Voraussetzung  $\varrho_1 \neq 0$  nur wegen der Beweisaneinanderordnung angegeben, da das Lemma bei  $(\varrho_1, \varrho_2) = (0, 0)$  und bei  $(0, \varrho_2)$  mit  $\vartheta_2 = 1$  uninteressant ist, dagegen bei  $(0, \varrho_2)$  mit  $\vartheta_2 < 1$  nebst  $\varrho_2 > 0$  die Rollen der  $\varrho_r$  vertauscht werden können. Da sicher  $(1, 0) \in \mathfrak{M}$  ist, folgt aus Lemma IV insbesondere:

$\mathfrak{R}$  ist das abgeschlossene Intervall von Null bis Eins.

**Lemma V:** Es gibt eine in  $0 \leq \xi \leq 1$  stetige, monoton fallende Funktion  $g(\xi)$  mit den Eigenschaften:

- $g(0) = 1; g(1) = 0$ ;
- $g(g(\xi)) = \xi$ ;
- $\mathfrak{M}$  ist die Menge der Punkte  $(\xi, \vartheta g(\xi))$  mit  $0 \leq \vartheta \leq 1$ ;
- die Punkte  $(\xi, g(\xi))$  sind genau die Lösungen der Gleichung  $f(\xi, \eta) = 1$ .

**Beweis:** Ist  $\varrho \in \mathfrak{R}$ , also  $\varrho = \varrho(E | H)$ , so gilt für  $\bar{\varrho} = \varrho(E | H)$ :  $(\varrho, \bar{\varrho}) \in \mathfrak{M}$  mit  $f(\varrho, \bar{\varrho}) = 1$ . Gilt für die gleiche Zahl  $\varrho$  noch  $(\varrho, \varrho^*) \in \mathfrak{M}$  mit  $f(\varrho, \varrho^*) = 1$ , so ist nach Lemma IV:  $\varrho^* = \bar{\varrho}$ . Für jedes  $\varrho \in \mathfrak{R}$  ist also  $\bar{\varrho} = g(\varrho)$  eindeutig bestimmt, und  $g(\varrho)$  erzeugt eine involutorische Abbildung von  $\mathfrak{R}$  in sich mit  $g(0) = 1$  und  $g(1) = 0$ .

Ist  $\varrho_1 < \varrho_2, \varrho_r \in \mathfrak{R}$ , so ist wegen  $f(\varrho_r, g(\varrho_r)) = 1$  nach Lemma IV:  $g(\varrho_1) > g(\varrho_2)$ ; d. h.  $g(\varrho)$  fällt auf  $\mathfrak{R}$  monoton. Da nun Argument- und Wertebereich dicht in  $0 \leq \xi \leq 1$  liegen, kann  $g(\varrho)$  zu einer stetigen, monoton fallenden, involutorischen Funktion  $g(\xi)$  mit  $g(0) = 1$  und  $f(\xi, g(\xi)) = 1$  ergänzt werden: Eigenschaften a) und b), Teil der Eigenschaft d).

Ist  $(\varrho_1, \varrho_2) \in \mathfrak{M}$ , so gibt es ein  $H$  so, daß  $\varrho_r = \varrho(E_r | H)$  mit  $E_2 \in \bar{E}_1$  ist und daher nach  $\Phi_3$  gilt:  $\varrho_2 \leq \varrho(\bar{E}_1 | H) = g(\varrho_1)$ . Jeder Punkt von  $\mathfrak{M}$  gehört also zur Menge der  $(\xi, \vartheta g(\xi))$ . Die Umkehrung folgt unmittelbar aus Lemma IV: Eigenschaft c).

Nehmen wir schließlich bei  $0 < \xi < 1$  ein  $(\xi, \vartheta g(\xi))$  mit  $\vartheta < 1$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $g(\xi)$  und der Dichtheit von  $\mathfrak{R}$  ein  $\varrho \in \mathfrak{R}$  so, daß  $\xi < \varrho$  und  $\vartheta g(\xi) < g(\varrho)$  ist. Aus Lemma IV folgt  $f(\xi, \vartheta g(\xi)) < 1$ , so daß in der Tat  $f(\xi, \eta) = 1$  genau für die  $(\xi, g(\xi))$  ist: Restteil der Eigenschaft d).

Ist  $\varrho = \varrho(E|H)$ , so ist  $g(\varrho) = \varrho(E|H)$ . Wir bilden daher

**Def. XII.**  $g(\xi)$  heißt der komplementäre Wert von  $\xi$  und wird mit  $\bar{\xi}$  bezeichnet.

Sind  $E_1, E_2$  und  $E_3$  disjunkte Ereignisse in einem  $H$  mit den bzw. EK  $\varrho_v$ , so folgt aus  $(E_1 + E_2) + E_3 = E_1 + (E_2 + E_3)$ :

$$(12.2) \quad f(f(\varrho_1, \varrho_2), \varrho_3) = f(\varrho_1, f(\varrho_2, \varrho_3)).$$

Will man diese zunächst sehr eingeschränkte Assoziativität von  $f$  auf beliebige Argumente übertragen, für die die linke Seite von (12.2) sinnvoll ist, so muß man erst sicherstellen, daß die auf der rechten Seite vorkommenden Argumente in  $\mathfrak{M}$  liegen. Dies behauptet

**Lemma VI:** Ist  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{M}$  und  $(f(\xi_1, \xi_2), \xi_3) \in \mathfrak{M}$ , so liegen auch  $(\xi_2, \xi_3)$  und  $(\xi_1, f(\xi_2, \xi_3))$  in  $\mathfrak{M}$ , und es gilt:

$$f(f(\xi_1, \xi_2), \xi_3) = f(\xi_1, f(\xi_2, \xi_3)).$$

*Beweis:* Ist eines der  $\xi_v = 0$ , so ist das Lemma trivial; es seien daher alle  $\xi_v > 0$ . Wegen  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{M}$  gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  in einem passenden  $H_0$  disjunkte Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$ , für deren  $\varrho_v = \varrho(E_v|H_0)$  gilt:  $|\varrho_v - \xi_v| < \varepsilon$ . Hieraus folgt nach B 3 a:  $|f(\varrho_1, \varrho_2) - f(\xi_1, \xi_2)| < \varepsilon_1$  mit  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  bei  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Es ist dann nach Lemma V:  $|f(\varrho_1, \varrho_2) - f(\xi_1, \xi_2)| < \varepsilon_2$  mit  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  bei  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; des weiteren  $f(\varrho_1, \varrho_2) = \varrho(E_1 + E_2|H_0)$  und  $f(\xi_1, \xi_2) \geq \xi_3$ . Also ist  $\varrho_3 = \varrho(E_1 + E_2|H_0) \geq \xi_3 - \varepsilon_2$ .

Genau so wie im Beweis von Lemma IV konstruieren wir nun mit Hilfe von Lemma III ein  $H'$  mit disjunkten Ereignissen  $E'_1, E'_2$  und  $E'_3$  so, daß für die  $\varrho'_v = \varrho(E'_v|H')$  gilt:  $\varrho'_1 = \varrho_1, \varrho'_2 = \varrho_2$  und  $\xi_3 - \varepsilon_2 \leq \varrho'_3 \leq \xi_3$ . Für die  $\varrho'$  gilt dann:  $(\varrho'_2, \varrho'_3) \in \mathfrak{M}$ ;  $(\varrho'_1, f(\varrho'_2, \varrho'_3)) \in \mathfrak{M}$ , und die Gleichung (12.2) ist erfüllt. Bei  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird  $\varrho'_3 \rightarrow \xi_3$ , was die Behauptung liefert.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endlich zum

*Beweis von Satz 2.*

Wir betrachten zunächst die Lösbarkeit der Gleichung

$$f(\xi, \eta) = \zeta$$

bei vorgegebenen  $\eta$  und  $\zeta$ . Wegen  $\Phi_1$  ist  $\zeta \geq \eta$  notwendig für die Lösbarkeit. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; denn bei  $\zeta \geq \eta$  ist nach Lemma V und Def. XII:  $\bar{\zeta} \leq \bar{\eta}$ . Es existiert damit  $f(\eta, \bar{\zeta})$  und  $\xi = f(\eta, \bar{\zeta})$ . Mit diesem  $\xi$  wird dann

$$f(\xi, f(\eta, \bar{\zeta})) = 1$$

und nach Lemma VI

$$f(f(\xi, \eta), \bar{\zeta}) = 1,$$

also

$$f(\xi, \eta) = \bar{\bar{\zeta}} = \zeta.$$

Die rückwärtige Verfolgung dieser Rechnung zeigt, daß das angegebene  $\xi$  auch die einzige Lösung unserer Gleichung ist.

Betrachten wir nun  $f(\xi, \eta)$  bei festem  $\eta < 1$  als Funktion von  $\xi$  in  $0 \leq \xi \leq \bar{\eta}$ , so ist  $f(\xi, \eta)$  stetig und invertierbar mit  $f(0, \eta) = \eta$  und  $f(\bar{\eta}, \eta) = 1 > \eta$ . Es ist also  $f(\xi, \eta)$  monoton wachsend:

$$(12.3) \quad f(\xi_1, \eta) < f(\xi_2, \eta) \text{ bei } \xi_1 < \xi_2 \leq \bar{\eta}.$$

Es sei nun definiert:

$$\psi(\xi) = f(\xi, \xi);$$

dann wächst auch  $\psi(\xi)$  monoton und stetig von Null bis Eins in einem gewissen Intervall  $0 \leq \xi \leq \alpha_1$  mit  $\alpha_1 < 1$ . Wir bestimmen die monoton fallende Folge der Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  mit  $\alpha_r = \psi(\alpha_{r+1})$ . Der untere Limes heiße  $\alpha_0$ . Dann ist  $\alpha_0 = \psi(\alpha_0) = f(\alpha_0, \alpha_0)$ , also  $\alpha_0 = 0$ . Für jedes  $\alpha_r$  bestimmen wir weiter die monoton wachsende Folge der Zahlen  $\alpha_{r,s}$  gemäß  $\alpha_{r,1} = \alpha_r, \alpha_{r,s+1} = f(\alpha_{r,s}, \alpha_r)$ . Wegen Lemma VI ist

$$(12.4) \quad f(\alpha_{r,s_1}, \alpha_{r,s_2}) = \alpha_{r,s_1+s_2}.$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion unter Beachtung der Definitionsgleichungen

$$\alpha_{r,2} = \alpha_{r-1,1} \quad \text{und} \quad f(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,1}) = 1$$

sowie des monotonen Wachsens jeder Folge  $\alpha_{r,1}, \alpha_{r,2}, \dots$ :

$$(12.5a) \quad \alpha_{r,2^r} = 1$$

$$(12.5b) \quad \alpha_{r,s} = \alpha_{r',s'}, \text{ genau dann, wenn } \frac{s}{2^r} = \frac{s'}{2^{r'}} \text{ ist.}$$

Wir definieren nun auf der Menge  $\mathfrak{P}$  der  $\alpha_{r,s}$  die monoton wachsende Funktion  $h(\alpha)$  durch

$$(12.6) \quad h(\alpha_{r,s}) = \frac{s}{2^r},$$

was wegen (12.5 b) widerspruchsfrei möglich ist. Gemäß  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r = 0$  und der Stetigkeit von  $f$  ist die Menge  $\mathfrak{P}$  dicht in  $0 \leq \alpha \leq 1$ .  $h(\alpha)$  besitzt also dichten Argument- und Wertebereich und kann zu einer stetigen, monoton wachsenden Funktion  $y = h(x)$  in  $0 \leq x \leq 1$  mit  $h(0) = 0$  und  $h(1) = 1$  und der Umkehrfunktion  $x = \chi(y)$  ergänzt werden.

Wir setzen nun für alle  $E|H$

$$(12.7) \quad p(E|H) = h(p(E|H));$$

dann genügt das System der EK  $p(E|H)$  dem Axiom B 3 mit einer Funktion  $f_1$  gemäß:

$$f_1(\xi_1, \xi_2) = h[f(\chi(\xi_1), \chi(\xi_2))]$$

bei  $(\xi_1, \xi_2) \in \overline{\mathfrak{M}}_1$  mit einem analog zu Lemma V durch ein  $g_1(\xi)$  definierten Bereich  $\overline{\mathfrak{M}}_1$ . Sind speziell die  $\xi_r$  Dualzahlen:  $\xi_r = \frac{s_r}{2^r}$ , so wird nach (12.4)

und (12.6):

$$f_1(\xi_1, \xi_2) = h[f(\alpha_{r,s_1}, \alpha_{r,s_2})] = h(\alpha_{r,s_1+s_2}) = \frac{s_1 + s_2}{2^r} = \xi_1 + \xi_2.$$

Für Dualzahlen vermittelt also  $f_1$  die Addition, und damit ist wegen der Stetigkeit allgemein  $f_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$ .

Wie in Teil II schließen wir nun weiter: Sind positive Zahlen mit  $p_1 < 1$  und  $p_2 + p_3 < 1$  beliebig vorgegeben, so finden wir für jedes  $\varepsilon > 0$  mit Hilfe von Lemma III und wegen der Dichtheit von  $\mathfrak{R}_1$  zwei formal koppelbare Schemata  $H_1$  und  $H_2$  mit:

$|p(E|H_1) - p_1| < \varepsilon$ ;  $|p(E'|H_2) - p_2| < \varepsilon$ ;  $|p(E''|H_2) - p_3| < \varepsilon$  und  $E' E'' = 0|H_2$ .  $\Phi_5$  liefert wegen  $f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$  bei  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\varphi_1(p_2 + p_3, p_1) = \varphi_1(p_2, p_1) + \varphi_1(p_3, p_1),$$

was sofort wegen  $\Phi_4$  zu  $\varphi_1(\xi, \eta) = C \cdot \xi \cdot \eta$  mit  $C = 1$  wegen  $\Phi_3$  führt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

(Eingegangen am 19. Mai 1952.)

# Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten.

Von  
KLAUS PÖSCHL in München.

1. Über das Wachstum der ganzen transzendenten Lösungen einer Differentialgleichung der Form

$$(1) \quad w'' + c_1(z) w' + c_2(z) w = 0$$

mit den Polynomen

$$(2) \quad c_1(z) = az^{k_1} + bz^{k_1-1} + \dots, \quad c_2(z) = \alpha z^{k_2} + \beta z^{k_2-1} + \dots$$

als Koeffizienten gibt eine von WITTICH [1] diskutierte quadratische Gleichung Aufschluß; aus dieser erhält man ferner die Richtungen, in die asymptotisch die Punkte  $\zeta$  fallen können, für die auf  $|z| = r$   $M(r) = |w(\zeta)|$  angenommen wird. Es zeigt sich, daß Ordnung

$$\varrho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

und numerischer Wert des Typus

$$t = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^{\varrho}}$$

eindeutig gegeben sind<sup>1)</sup>, bis auf die folgenden Fälle von (1):

a) Die Grade  $k_1, k_2$  von  $c_1(z), c_2(z)$  erfüllen die Ungleichung:

$$\frac{k_2}{2} < k_1 \leq k_2;$$

dann läßt die quadratische Gleichung die Werte  $1 + k_1$  und  $1 + \Delta k = 1 + k_2 - k_1$  für  $\varrho$  zu. Beispiele zeigen, daß beide Werte vorkommen können [1].

b) Es ist  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $|s_1| \neq |s_2|$ , d. h. es liegt eine Differentialgleichung vor mit konstanten Koeffizienten und Wurzeln verschiedenen Betrages der charakteristischen Gleichung

$$(3) \quad s^2 + \frac{a}{2}s + \frac{\alpha}{4} = 0.$$

c) Es gilt  $k_2 = 2k_1 > 0$  und  $|s_1| \neq |s_2|$ , dann sind für  $t$  die beiden Werte  $\frac{2|s_j|}{k_1 + 1}$ ,  $j = 1, 2$ , zur Ordnung  $\varrho = k_1 + 1$  möglich.

An dem Beispiel

$$(4) \quad w'' - zw' - z^2w = 0$$

zeigt WITTICH in Beantwortung einer seinerzeit von WIMAN [2] aufgeworfenen

<sup>1)</sup> Für jede ganze transzendente Lösung  $w(z)$  von (1) ist  $\varrho$  rational und  $0 < t < \infty$  (Normaltypus).



Frage, daß sie nur Lösungen vom größeren Typus  $t = \frac{\sqrt{s} + 1}{4}$  besitzt, während für keine Lösung  $\log M(r) \sim \frac{\sqrt{s} - 1}{4} r^2$  gelten kann.

Es sollen nun die Bedingungen angegeben werden, unter denen in den Fällen a) und c) das kleinere Wachstum bei den Lösungen auftreten kann; im allgemeinen ist es auszuschließen.

2. Zunächst lassen sich eine Reihe von Gleichungen wie (4) dank ihres Zusammenhangs mit der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung behandeln und die gewünschten Bedingungen leicht angeben. Dies nebst den erforderlichen Transformationen werde kurz angedeutet. Es handelt sich vor allem um Gln. c) mit  $k_1 = 1$ , also

$$(5) \quad w'' + (az + b) w' + (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) w = 0.$$

Durch die Substitution

$$(6) \quad w = \exp \left\{ \left( -s - \frac{\alpha}{2} \right) z_1^2 + g z_1 \right\} y(t), \quad t = \frac{\alpha + 4s}{2} z_1^2$$

mit

$$(6a) \quad z_1 = z + \frac{ab - \beta}{a^2 - 4\alpha} = z + h, \quad g = \frac{\beta - 2\alpha h - (b - ah)(\alpha + 2s)}{\alpha + 4s}$$

geht (5) über in die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung für  $y(t)$ :

$$(7) \quad t y''(t) + (C - t) y'(t) - A y(t) = 0,$$

in der

$$(7a) \quad C = \frac{1}{2} \text{ und } A = \frac{1}{2(\alpha + 4s)^2} \{ (\alpha + 4s)^2 (\alpha + 2s - \gamma) - (\beta + 2bs)(\beta - \alpha h - 2bs) \}$$

ist. Diese besitzt ein Fundamentalsystem der Form:

$$\overset{\circ}{y}_1 = {}_1F_1(A, C, t), \quad \overset{\circ}{y}_2 = t^{1-C} {}_1F_1(A + C - 1, 2 - C, t)$$

und ein weiteres  $\overset{\infty}{y}_1, \overset{\infty}{y}_2$ , das in  $-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2}$  durch bekannte asymptotische Entwicklungen (s. z. B. [3], [4]) dargestellt wird. Dazu gehören entsprechend (6) zwei Fundamentalsysteme  $\overset{\circ}{w}_j$  und  $\overset{\infty}{w}_j$  ( $j = 1, 2$ ) der Gleichung (5). Zwischen beiden besteht ein linearer Zusammenhang

$$(8) \quad \overset{\circ}{y}_j(t) = \sum_{k=1}^2 c_{jk} \overset{\infty}{y}_k(t) \text{ bzw. } \overset{\circ}{w}_j(z_1) = \sum_{k=1}^2 c_{jk} \overset{\infty}{w}_k(z_1)$$

mit  $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$  und folgenden Werten der  $c_{jk}$  (s. [3], [4]):

$$(9) \quad c_{11} = \frac{e^{-i\pi A} \Gamma(C)}{\Gamma(C - A)}, \quad c_{12} = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(A)}, \quad c_{21} = \frac{e^{-i\pi(A - C + 1)} \Gamma(2 - C)}{\Gamma(1 - A)},$$

$$c_{22} = \frac{\Gamma(2 - C)}{\Gamma(A - C + 1)}.$$

Es gelten die Umsetzungsformeln:

$$(10) \quad \overset{\circ}{w}_1(e^{i\pi} z_1) = e^{-2\pi i} \overset{\circ}{w}_1(z_1), \quad \overset{\circ}{w}_2(e^{i\pi} z_1) = e^{i\pi - 2\pi i} \overset{\circ}{w}_2(z_1),$$

<sup>2)</sup> Man beachte die Unabhängigkeit der Größen  $\varrho$  und  $t$  für die ganze transzendente Lösung von der Wahl des Nullpunktes der  $z$ -Ebene.

und in

$$(11) \quad -\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg(a+4s) < \arg z_1 < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg(a+4s)$$

hat man

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(z_1) &\sim \exp(s^* z_1^2) \left(\frac{a+4s}{2} z_1^2\right)^{-A} \{1 + \dots\}, \\ \bar{w}_2(z_1) &\sim \exp(s z_1^2) \left(\frac{a+4s}{2} z_1^2\right)^{A-C} \{1 + \dots\}, \end{aligned}$$

wo  $s^*$  die andere der Lösungen von (3) ist.

Für  $A \neq \frac{n}{2}$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) sind alle  $c_{jk} \neq 0$ , und es läßt sich ähnlich wie bei WITTICH [1] schließen:

Sei  $|s| > |s^*|$ . Gäbe es eine Lösung

$$w = d_1 \bar{w}_1 + d_2 \bar{w}_2$$

vom kleineren Typus, so würde in der Richtung des Winkelraumes (11), wo  $\bar{w}_2$  das Verhalten  $\log |\bar{w}_2(\zeta)| \sim |s z_1^2|$  zeigt,

$$w(\zeta) = (d_1 c_{11} + d_2 c_{21}) \bar{w}_1(\zeta) + (d_1 c_{12} + d_2 c_{22}) \bar{w}_2(\zeta)$$

gelten; es muß also  $d_1 c_{12} + d_2 c_{22} = 0$  sein. Ferner verlangt

$$e^{2s\zeta} w(e^{i\pi} \zeta) = (d_1 c_{11} - d_2 c_{21}) \bar{w}_1(\zeta) + (d_1 c_{12} - d_2 c_{22}) \bar{w}_2(\zeta),$$

daß auch  $d_1 c_{12} - d_2 c_{22} = 0$ , somit  $d_1 = d_2 = 0$  ist. Es gibt folglich keine Lösung des Verhaltens  $\log M(r) \sim r^2 \min(|s|, |s^*|)$ . Das gilt auch noch, wenn  $c_{11}$  oder  $c_{21}$  verschwindet, also  $A = \frac{n}{2}$  ist ( $n=1, 2, \dots$ ). Ist dagegen  $A = -\frac{n}{2}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), so gilt für gerade  $n$

$$\bar{w}_1 = \exp(s^* z_1^2 + g z_1) \cdot (\text{Polynom in } z_1^2)$$

bzw. für ungerade  $n$

$$\bar{w}_2 = \exp(s^* z_1^2 + g z_1) z_1 \cdot (\text{Polynom in } z_1^2).$$

$$(12) \quad A = -\frac{n}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

ist daher notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten von Lösungen beider Typenwerte. Ist sie nicht erfüllt, so hat jede Lösung von (5) in mindestens einer der Richtungen

$$\arg z = -\frac{1}{2} \arg s + j\pi \quad (j=0 \text{ oder } 1)$$

das Verhalten  $\log M(r) \sim r^2 \max(|s|, |s^*|)$ .

Für  $\beta=0$  insbesondere lautet die Bedingung (12):

$$\alpha = \frac{n(n+1)a^2 - \gamma(\gamma-a)}{(2n+1)^2} \quad \text{und} \quad |\gamma-a| > |\gamma|.$$

3. Diese Ergebnisse lassen sich übertragen auf Differentialgleichungen der Form:

$$(13) \quad w'' + a z^{k_1} w' + (\alpha z^{2k_1} + \eta z^{k_1-1}) w = 0$$

( $k_1 > 1$ , ganz); (13) wird durch die Transformation

$$(14) \quad w = e^{\lambda t} y(t), \quad t = \frac{a+4s}{k_1+1} z^{k_1+1}, \quad \lambda = -\frac{a+2s}{a+4s}$$

ebenfalls in (7) übergeführt, worin

$$C = 1 - \frac{1}{k_1 + 1}, \quad A = \frac{k_1(a+2s) - \eta}{(k_1 + 1)(a + 4s)}$$

zu setzen ist; die Umsetzungsformeln lauten jetzt:

$$\overset{\circ}{w}_1 \left( \exp \left( \frac{2i\pi\nu}{k_1 + 1} z \right) \right) = \overset{\circ}{w}_1(z), \quad \overset{\circ}{w}_2 \left( \exp \left( \frac{2i\pi\nu}{k_1 + 1} z \right) \right) = \exp \left( \frac{2i\pi\nu}{k_1 + 1} \right) \overset{\circ}{w}_2(z),$$

$\nu = 1, 2, \dots, k_1$ . Die entsprechenden Überlegungen erlauben wieder den kleineren Typenwert auszuschließen, außer wenn  $A$  einen Wert  $-n$  oder  $-n + \frac{1}{k_1 + 1}$  besitzt ( $n = 0, 1, \dots$ ).

Bei der Substitution

$$w(z) = \omega(z) \exp \left( -\frac{1}{2(k_1 + 1)} z^{k_1 + 1} \right)$$

erhält man aus (13) die Differentialgleichung

$$\omega'' + Q(z)\omega = 0 \quad \text{mit} \quad Q(z) = \left( \eta - \frac{a^2}{4} \right) z^{2k_1} + \left( \eta - \frac{ac}{2} \right) z^{k_1 - 1};$$

solche Gleichungen sind hinsichtlich anderer Fragen ausführlich von H. WAGNER [5] behandelt worden.

4. Einer Differentialgleichung a) mit  $k_1 = 1$ , d. i.

$$(15) \quad u'' + (a_1 z + b_1) u' + (a_2 z + b_2) u = 0$$

läßt sich immer eine Gleichung (sogar unendlich viele) der Klasse (5) zuordnen mittels der Transformation

$$u(z) = e^{sz} w(z);$$

man hat dann

$$a_1 = a + 4s, \quad b_1 = b, \quad a_2 = \beta + 2bs, \quad b_2 = \gamma + 2s.$$

Es sei  $|s| = \min(|s|, |s^*|)$  für die transformierte Gleichung; hat diese nur Lösungen mit  $\log M(r) \sim |s^*| r^2$ , so kann (15) keine Lösung der Ordnung  $\rho = 1$  besitzen. Aus (15) erhält man mittels

$$u = \exp \left( -\frac{a_2}{a_1} z \right) e^{-t} y(t), \quad z = \sqrt{\frac{2t}{a_1}} - \frac{a_1 b_1 - 2a_2}{a_1^2}$$

wieder die konfluente hypergeometrische Dgl. (7). Lösungen  $u(z)$  mit  $\rho = 1$  können daher nur auftreten, wenn

$$(16) \quad -a_1^2 b_2 + a_1 b_1 a_2 - a_2^2 = n a_1^3 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ist; gilt (16), so ist

$$u_n = \exp \left( -\frac{a_2}{a_1} z \right) \cdot (\text{Polynom in } z).$$

5. Die eingangs gestellte Frage läßt sich jedoch allgemein mit Hilfe elementarer Transformationen entscheiden; dabei spielen wiederum Polynomlösungen verwandter Differentialgleichungen eine Rolle.

Sei zunächst  $k_2 = k_1 = k > 1$  in (1) und  $c_1(z) = a_1 z^k + q_1(z)$ ,  $c_2(z) = a_2 z^k + q_2(z)$ ; die Polynome  $q_j(z) = b_j z^{k-1} + \dots$  ( $j = 1, 2$ ) sind höchstens vom Grad  $(k-1)$ . Aus

$$(17) \quad w'' + (a_1 z^k + q_1(z)) w' + (a_2 z^k + q_2(z)) w = 0$$

gewinnt man durch die Substitution  $w = v \exp\left(-\frac{a_2}{a_1} z\right)$  die Differentialgleichung

$$(18) \quad v'' + \left(a_1 z^k + q_1(z) - \frac{2a_2}{a_1}\right) v' + \left(q_2(z) - \frac{a_2}{a_1} q_1(z) + \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) v = 0$$

in  $v$ , deren ganze transzendente Lösungen sämtlich von der Ordnung  $k+1$  sind, da der Koeffizient von  $v$  von kleinerem Grade ist als der von  $v'$ . Nur wenn (18) Polynomlösungen besitzt, kann es ganze transzendente Lösungen  $w$  von der Ordnung  $\varrho = 1$  geben. Dies erfordert das Bestehen gewisser Koeffizientenbedingungen, die man durch elementare Überlegungen gewinnt; die erste davon,

$$(19) \quad b_2 - \frac{a_2}{a_1} b_1 = -a_1 n,$$

muß für ein ganzzahliges  $n$  erfüllt sein, das dann den Grad des Polynoms angibt. Für

$$q_2(z) - \frac{a_2}{a_1} q_1(z) + \frac{a_2^2}{a_1^2} \equiv 0$$

insbesondere ist  $n = 0$ , wie schon aus (18) ersichtlich.

Die (19) entsprechende Bedingung (16) für  $k = 1$  führt über die Substitution  $x = i \sqrt{\frac{a_1}{2}} \left(z + \frac{a_1 b_1 - 2a_2}{a_1^2}\right)$  zu den HERMITESCHEN Polynomen (vgl. auch [3], S. 271 f.).

6. Gilt jetzt  $0 < \Delta k = k_2 - k_1 < k_1$  und sei wieder  $q_j(z) = c_j(z) - a_j z^{k_j} = b_j z^{k_j-1} + \dots$  ( $j = 1, 2$ ), so entsteht beim Übergang zu  $v = w \exp\left(\frac{a_2}{a_1} \frac{1}{1 + \Delta k} z^{1 + \Delta k}\right)$  eine Differentialgleichung in  $v$ :

$$v'' + \left(a_1 z^{k_1} + q_1(z) - 2 \frac{a_2}{a_1} z^{\Delta k}\right) v' + c_2^{(1)}(z) v = 0$$

mit einem Koeffizienten  $c_2^{(1)}(z) = a^{(1)} z^{k_2-1} + \dots$  von  $v$ , dessen Grad um mindestens 1 gegenüber dem von  $c_2(z)$  erniedrigt ist. Nach  $p$ -maliger Anwendung dieses Schrittes mit  $p \leq \Delta k$  erhält man ein  $c_2^{(p)}(z)$  von einem Grade  $\leq k_1 - 1$  und kommt damit auf den früheren Fall in 5. zurück. Man braucht also nur von  $w(z)$  durch eine Transformation

$$(20) \quad w = y \prod_{v=0}^{\Delta k} \exp\left(-\frac{a_2^{(v)}}{a_1} z^{1 + \Delta k - v}\right)$$

zu  $y(z)$  überzugehen mit geeigneten Konstanten  $a_2^{(v)}$ :

$$a_2^{(0)} = a_2, \quad a_2^{(1)} = b_2 - \frac{a_2^{(0)}}{a_1} b_1 + \left(\frac{a_2^{(0)}}{a_1}\right)^2 \delta_{1, 2k_1 - k_2}, \dots,$$

von denen einige  $= 0$  sein können, und festzustellen, ob die entstehende Gleichung

$$y'' + c_1^{(p)}(z) y' + c_2^{(p)}(z) y = 0$$

( $c_1^{(p)}(z)$  ist vom Grad  $k_1$ ,  $c_2^{(p)}(z)$  von einem Grad  $\leq k_1 - 1$ ) Polynomlösungen besitzt oder nicht, um zu entscheiden, ob unter den Lösungen der Ausgangsgleichung auch solche der kleineren Ordnung  $\varrho = 1 + \Delta k$  vorkommen können oder nicht.

## 7. Einer Differentialgleichung c):

$$(21) \quad w'' + (a z^{k_1} + r_1(z)) w' + (\alpha z^{2k_1} + r_2(z)) w = 0, \\ r_1(z) = b z^{k_1-1} + \dots, \quad r_2(z) = \beta z^{2k_1-1} + \dots,$$

läßt sich immer auf dem Wege über  $w = \omega \exp\left(\frac{2s}{k_1+1} z^{k_1+1}\right)$  eine Differentialgleichung der zuletzt betrachteten Form zuordnen:

$$(22) \quad \omega'' + \omega'((a+4s)z^{k_1} + r_1(z)) + \omega(r_2(z) + 2r_1(z)s z^{k_1}) = 0,$$

die insbesondere für  $r_1(z) = \text{const}$  und  $(\text{Grad von } r_2(z)) \leq k_1$  Koeffizienten mit gleichem Grad besitzt. Für  $s$  werde die Wurzel von (3) mit dem kleineren Betrag gewählt. Gibt es dann Lösungen  $\omega$  von der Ordnung  $1 + \Delta k = 1 + (\text{Grad von } r_2 + 2s r_1 z^{k_1}) - k_1$ , so auch Lösungen  $w$  von (21) mit dem schwächeren Wachstum. Haben dagegen alle Lösungen  $\omega$  das Verhalten

$$\log M(r) \sim -\frac{(4s+a)}{k_1+1} \zeta^{k_1+1}$$

in mindestens einer der zugehörigen asymptotischen Richtungen  $\arg \zeta$ , so können Lösungen  $w$  des kleineren Typus  $\frac{2|s|}{k_1+1}$  zur Ordnung  $k_1+1$  nicht auftreten.

Insgesamt folgt, daß nur für spezielle Koeffizienten zu dem kleineren zunächst möglichen Wachstum auch Lösungen gehören, die jenes Verhalten zeigen, und zwar in solchen Fällen, die mit Polynomlösungen zugeordneter Gleichungen zusammenhängen und in denen sich die gegebene Differentialgleichung vollständig integrieren läßt.

## Literatur.

- [1] WITTICH, H.: a) Ganze transzendente Lösungen algebraischer Differentialgleichungen. Math. Ann. 122, 221—234 (1950). b) Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. 124, 277—288 (1952). — [2] WIMAN, Å.: Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion. Acta math. 41 (1916). — [3] KIENAST, A.: Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung  $x y'' + (\gamma - x) y' - \beta y = 0$ . Denkschr. schweiz. naturf. Ges. 57, 247—325 (1921). — [4] MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik. Berlin 1943. — [5] WAGNER, H.: Über eine Klasse RIEMANN-scher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. J. reine angew. Math. 175, 6—49 (1936).

(Eingegangen am 4. Juli 1952.)

## Über die Summe der Inkreisradien bei Überdeckung.

Von

D. OHMANN in Frankfurt a. Main.

Diese Arbeit soll dem Beweis des folgenden Satzes gewidmet sein:

*Wird ein konvexer Bereich der euklidischen Ebene durch eine endliche Anzahl von konvexen Bereichen vollständig überdeckt, so ist die Summe der Inkreisradien der überdeckenden Bereiche nicht geringer als der Inkreisradius des überdeckten Bereichs.*

Während bei gleicher oder ähnlicher Problemstellung Durchmesser, Umkreisradius und Dicke schon Gegenstand von Untersuchungen gewesen sind, scheinen für den Inkreisradius noch keine Ergebnisse vorzuliegen.

§ 1. Es möge der konvexe Bereich  $B$  durch die konvexen Bereiche  $B_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ) überdeckt werden. Dann läßt sich, wenn  $\varrho$  den Inkreisradius bezeichnet, der angeführte Satz durch die Ungleichung

$$(1) \quad \sum \varrho(B_v) \geq \varrho(B)$$

wiedergeben. Beschreibt man nun jedem Bereich  $B_v$  in dreien seiner Berührungspunkte mit seinem Inkreis ein Dreieck  $D_v$ , um (zwei der Berührungspunkte können dabei auch zusammenfallen, wodurch  $D_v$  zu einem Parallelstreifen entartet), so überdecken die Dreiecke  $D_v$  ebenfalls den Bereich  $B$  und erst recht seinen Inkreis  $K$ , dessen Radius man noch gleich eins setzen kann:  $\varrho(K) = 1$ , ohne die Allgemeinheit der Betrachtungen zu beeinträchtigen. Da  $\varrho(D_v) = \varrho(B_v)$ , genügt es mithin zu zeigen, daß bei Überdeckung des Einheitskreises  $K$  mit Dreiecken  $D_v$ , die auch zu Parallelstreifen entartet sein dürfen, die Ungleichung

$$(2) \quad \sum \varrho(D_v) \geq 1$$

besteht.

Nun denke man sich die Ebene mit Masse der vom Abstand  $r$  vom Mittelpunkt des Einheitskreises  $K$  abhängigen Dichte

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (r < 1); \quad \mu = 0 \quad (r \geq 1)$$

belegt. Dann findet man für die Masse eines Parallelstreifens  $S$

$$M(S) = 2\pi \varrho(S),$$

während das schon hier zu benutzende Ergebnis des § 3 sein wird, daß für die Masse eines Dreiecks die Ungleichung statthat:

$$(3) \quad M(D) \geq 2\pi \varrho(D).$$

Damit  $K$  durch die Dreiecke  $D_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ) bedeckt werden kann, ist nun offenbar

$$\sum M(D_v) \geq M(K) = 2\pi$$

erforderlich, d. h. aber wegen (3) die Existenz der Ungleichung (2). Der Beweis unseres Satzes hat sich damit auf den Beweis der Ungleichung (3) reduziert.

§ 2. Bevor wir uns dem Nachweis von (3) zuwenden, müssen einige Hilfsbetrachtungen eingeschoben werden:

1. Der Einheitskreis  $K$  möge durch die Sehne  $S_0(A, B)$  in die beiden Segmente  $K_1$  und  $K_2$  zerlegt werden, von denen  $K_1$  wenigstens eine Halbkreis-scheibe umfasse. Als dann betrachte man eine zweite parallel verschiebbare Sehne  $S(x)$ , die  $S_0$  im Abstand  $x$  von  $A$  treffen soll (Fig. 1). Wird dann  $S(x)$  durch  $S_0$  in die Abschnitte  $S_1(x) \subset K_1$  und  $S_2(x) \subset K_2$  zerlegt und gibt  $s(x)$ ,  $s_j(x)$  die Länge von  $S(x)$ ,  $S_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) an, so bestehen für das Verhalten der Quotienten

$$\lambda_j(x) = \frac{s_j(x)}{s(x)} \quad (j = 1, 2)$$

auf  $\langle 0, x_0 \rangle$  ( $x_0$  = Länge von  $S_0$ ) die beiden folgenden Möglichkeiten: a)  $s_1(0) = 0$  ( $s_1(x_0) = 0$ ):  $\lambda_1(x)$  ist eine auf  $\langle 0, x_0 \rangle$  monoton nicht abnehmende (nicht zunehmende) Funktion; und  $\lambda_2(x)$  ist entsprechend monoton nicht zunehmend (nicht abnehmend).

b)  $s_1(0) > 0$  und  $s_1(x_0) > 0$ :  $\lambda_1(x)$  ( $\lambda_2(x)$ ) nimmt bis zu einem Minimum  $\lambda_1(x^*)$  (Maximum  $\lambda_2(x^*)$ ) monoton ab (zu) und dann wieder bis  $x_0$  monoton zu (ab). Als Bedingung für  $x^*$  erhalten wir dabei, wenn  $s'_j(x)$  die Ableitung von  $s_j(x)$  nach  $x$  bezeichnet:

$$(4) \quad s_1(x^*) s'_2(x^*) = s_2(x^*) s'_1(x^*).$$

Bezeichnet  $T_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) die Tangente an  $K$  in dem Punkt, den  $S_j(x)$  mit dem Umfang von  $K$  gemeinsam hat, und  $l_j(x)$  die Länge der Strecke, die durch  $T_j(x)$  und  $S(x)$  aus der  $S_0$  enthaltenden Geraden  $G_0$  herausgeschnitten wird, so haben wir zudem  $s'_j(x) = \frac{s_j(x)}{l_j(x)}$  und können aus (4) folgern, daß sich die Tangenten  $T_j(x^*)$  auf  $G_0$  schneiden müssen. Damit geht die  $S(x^*)$  enthaltende Gerade  $G(x^*)$  aber gerade durch den Pol  $P_0$  zur Polaren  $G_0$ .

2. Wir betrachten nun die Masse  $M_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) des von  $K_j$  durch  $S(x)$  abgeschnittenen Stückes  $B_j(x)$ , die sich durch das Integral

$$M_j(x) = M_j(0) + \int_0^x \int_0^{\xi} \frac{d\sigma_j}{\sqrt{1-r^2}} \sin \alpha \, d\xi$$

wiedergeben läßt, wenn  $\alpha$  den Winkel zwischen  $S_0$  und  $S(x)$  angibt. Daraus ergibt sich nach einfacher Umrechnung für die Ableitung nach  $x$ :

$$M'_j(x) = \sin \alpha \cdot \arccos(1 - 2\lambda_j(x)).$$

Wir brauchen nun nur noch zu bemerken, daß  $M'_j(x)$  damit eine mit wachsendem  $\lambda_j(x)$  monoton zunehmende Funktion darstellt, um zu den unter 1. unterschiedenen Fällen a) und b) die folgenden Aussagen machen zu können:

a\*) Ist  $s_1(0) = 0$  ( $s_1(x_0) = 0$ ), so stellt  $M'_1(x)$  auf  $\langle 0, x_0 \rangle$  eine monoton nicht abnehmende (nicht zunehmende) Funktion dar und damit  $M_1(x)$  selbst eine konvexe (konkave) Funktion. Umgekehrt ist dann  $M'_2(x)$  monoton nicht zunehmend (nicht abnehmend), und es ist  $M_2(x)$  konkav (konvex).

b\*) Ist  $s_1(0) > 0$ ;  $s_1(x_0) > 0$  und ist wieder:  $\lambda_1(x^*) = \min \lambda_2(x)$ ,  $\lambda_1(x^*) = \max \lambda_2(x)$ , so nimmt  $M_1(x)$  ( $M'_2(x)$ ) auf  $\langle 0, x^* \rangle$  monoton ab (zu) und auf  $\langle x^*, x_0 \rangle$  monoton zu (ab), so daß  $M_1(x)$  ( $M_2(x)$ ) auf  $\langle 0, x^* \rangle$  eine konkave (konvexe) und auf  $\langle x^*, x_0 \rangle$  eine konvexe (konkave) Funktion darstellt.

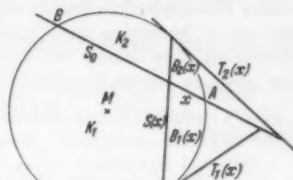


Fig. 1.

§ 3. Wir wenden uns nun dem Beweis der Ungleichung (3) zu, die wir unter Benützung des Funktional  $\Phi = 2\pi\varrho - M$  auch so schreiben können: (3\*)

$$\Phi(D) \geq 0.$$

Zunächst schalten wir die Möglichkeit aus, daß der Inkreis  $I$  des Dreiecks  $D$  nicht ganz auf dem Einheitskreis  $K$  liegt: Ist nämlich  $I'$  der Inkreis des konvexen Durchschnitts von  $D$  mit  $K$ , so berührt, wenn  $I'$  nicht mit  $I$  übereinstimmt,  $I'$  höchstens zwei Seiten von  $D$  und die Peripherie von  $K$ . Die Tangenten an  $I'$  in diesen Berührungspunkten umschließen dann ein Dreieck  $D'$ , das auch zu einem Parallelstreifen entartet sein kann und für das gilt:

$$M(D') \geq M(D); \varrho(D') < \varrho(D)$$

und mithin:

$$\Phi(D') < \Phi(D).$$

Um (3\*) zu erweisen, darf also vorausgesetzt werden, daß  $I$  ganz auf  $K$  liegt. Nach der Anzahl der Eckpunkte von  $D$ , die nicht im Innern von  $K$  liegen, unterscheiden wir alsdann verschiedene Fälle:

1. Liegt kein Eckpunkt  $A_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) von  $D$  innerhalb  $K$ , so schneidet bei  $\varrho(D) < 1$  wenigstens eine Seite von  $D$  (etwa  $A_2 A_3$ ) ein Segment  $K_1$  positiver Höhe  $h_1 > 0$  von  $K$  ab. Nun verschieben wir die Seite  $A_2 A_3$  parallel zu sich um  $h_1$  nach außen und erhalten dadurch eine Zunahme von  $M(D)$  um die Masse des Segments  $K_1$ , d. h. um  $\pi h_1$  und — wie man leicht verifiziert — eine Zunahme von  $\varrho(D)$  um  $h_1 \cdot \frac{a_1}{L}$ , wenn  $L$  den Umfang von  $D$  und  $a_1$  die Länge von  $A_2 A_3$  angibt. Für das neue Dreieck  $D'$  gilt also:

$$\Phi(D') = \Phi(D) + \pi h_1 \left( \frac{2a_1}{L} - 1 \right).$$

Folgern wir aus der Dreiecksungleichung noch

$$\frac{a_1}{L} < \frac{1}{2},$$

so ergibt sich

$$\Phi(D') < \Phi(D).$$

Wenn wir in gleicher Weise alle durch  $D$  abgeschnittenen Segmente ausgemerzt haben, ist das dadurch entstandene Dreieck  $D^*$  dem Einheitskreis  $K$

umbeschrieben, so daß  $\Phi(D^*) = 0$  statthat und man aus  $\Phi(D^*) < \Phi(D)$  sofort  $\Phi(D) > 0$  entnehmen kann.

2. Es liege genau ein Eckpunkt (etwa  $A_1$ ) innerhalb  $K$ . In den Fällen, daß die  $A_1$  gegenüberliegende Seite  $A_2 A_3$  ein Segment positiver Höhe von  $K$  abschneidet, oder der Inkreis von  $D$  nicht ganz auf  $K$  liegt, lassen sich nach den obigen Entwicklungen jeweils Verringerungen von  $\Phi$  erzielen so daß wir nur noch den Fall ins Auge zu fassen brauchen, daß die

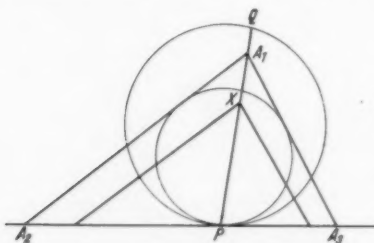


Fig. 2.

Seite  $A_2 A_3$  den Einheitskreis  $K$  und den Inkreis  $I$  im gleichen Punkt  $P$  berührt (Fig. 2). Dann sei  $Q$  der Schnittpunkt der  $A_1$  und  $P$  verbindenden Geraden mit dem Umfang von  $K$ ,  $X$  der Punkt auf  $PQ$ , der von  $P$  den Abstand  $x$  besitzt, und  $D(x)$  das Dreieck, das aus  $D$  dadurch entstanden ist, daß man  $A_1$  unter Parallelverschiebung der Seiten  $A_1 A_2$  und  $A_1 A_3$  auf  $PQ$  nach  $X$  wandern ließ.



Indem wir dann das Ergebnis von § 2, 2, a\*) auf die Masse der beiden Teildreiecke anwenden, in die  $D(x)$  durch  $PQ$  zerlegt wird, erkennen wir, daß  $M[D(x)]$  eine konvexe Funktion von  $x$  darstellt. Aus der linearen Abhängigkeit von  $\varrho[D(x)]$  von  $x$  folgt schließlich die Konkavität des Funktional  $\Phi[D(x)]$ , das damit in einer der beiden Grenzlagen  $X = P$  oder  $X = Q$  sein Minimum annimmt. Da  $\Phi = 0$  für  $X = P$  und  $\Phi \geq 0$  nach 1. für  $X = Q$ , ergibt sich also auch in diesem Fall die Richtigkeit von (3\*).

3. Wenn genau 2 Eckpunkte ( $A_1$  und  $A_3$ ) innerhalb  $K$  liegen, unterscheiden wir eine Reihe von Möglichkeiten:

a)  $A_3$  liegt auf der Peripherie von  $K$ : Drehen wir  $D$  auf  $K$  um den Punkt  $A_3$ , so bemerken wir, daß die Massendichte  $\mu(\xi, \varphi)$  in dem auf  $D$  fixierten Punkt  $\xi$  eine konvexe Funktion des Drehwinkels  $\varphi$  darstellt. Entsprechendes gilt dann aber auch von dem über das gedrehte Dreieck  $L(\varphi)$  erstreckte Integral

$$M(D(\varphi)) = \int_{D(\varphi)} \mu d\xi.$$

Da  $\varrho(D)$  hierbei erhalten bleibt, ist  $\Phi[D(\varphi)]$  mithin wieder konkav und nimmt das Minimum in einer der beiden Grenzlagen an, in denen wir Anschluß an 2. gewinnen.

b) In dem nun zu behandelnden Fall wollen wir voraussetzen, daß die Berührungspunkte des zu  $A_1 A_3$  ( $j=1, 2$ ) parallelen Tangentenpaares an  $K$  für wenigstens ein  $j$  nicht beide innerhalb der gleichen durch die Gerade  $A_1 A_3$  definierten Halbebene liegen.

Da wir dann bei Parallelverschiebung von  $A_1 A_3$  oder  $A_2 A_3$  wieder unter Benutzung des Ergebnisses von § 2, 2a\*) ähnlich wie in 2. auf die Konkavität des Funktional  $\Phi$  schließen können, nimmt dieses sein Minimum in einer der beiden Grenzlagen an, in denen entweder  $A_k$  ( $k \neq j$ ) oder  $A_3$  auf dem Umfang von  $K$  zu liegen kommt und damit entweder zu 2. oder 3a) Anschluß erreicht ist.

c) Ist die Voraussetzung b) weder für  $A_1 A_3$  noch für  $A_2 A_3$  erfüllt, so treffen wir noch einmal eine Fallunterscheidung:

$\alpha$ ) Die Gerade  $A_1 A_2$  läßt  $A_3$  und den Mittelpunkt von  $K$  in der gleichen Halbebene liegen;

$\beta$ ) Die Gerade  $A_1 A_2$  trennt  $A_3$  vom Mittelpunkt.

Der Fall  $\alpha$  erlaubt es, die Ergebnisse von § 2, 2b\*) in Anwendung zu bringen. Dazu bezeichne  $C_1, C_2$  die Schnittpunkte der Geraden  $A_1 A_2$  mit der Peripherie von  $K$  und  $A_1^*, A_2^*$  ihre Schnittpunkte mit den zu  $A_1 A_3$  bzw.  $A_2 A_3$  parallelen Geraden durch ihren Pol  $P_0$  (Fig. 3). Da sich die Intervalle  $C_1 A_1^*$  und  $A_2^* C_2$  dann überlappen, muß wenigstens ein  $A_j$  ( $j=1$  oder 2) sich auf dem zugehörigen Intervall  $C_j A_j$  befinden. Dann stellt  $M(D(x))$  bei Verschiebung von  $A_1 A_3$  parallel zu sich gemäß § 2, 2b\*) eine konvexe Funktion des Verschiebungsparameters  $x$  dar und  $\Phi[D(x)]$  wegen der linearen Abhängigkeit des Inkreisradius  $\varrho[D(x)]$  von  $x$  eine konkave Funktion. Dies gilt auf dem kleineren der Intervalle  $C_j A_j^*$  bzw.  $C_j \bar{A}_j$ , wenn  $\bar{A}_j$  dadurch definiert ist, daß der Eckpunkt  $A_3(x)$  für  $A_j(x) = \bar{A}_j$  auf den Umfang von  $K$  fällt. Da  $\Phi[D(x)]$  sein Minimum auf dem Rande dieses

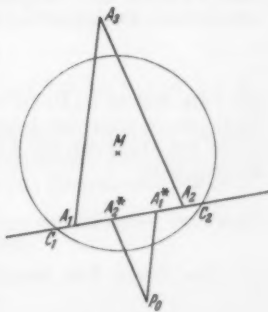


Fig. 3.

Intervalls annimmt, gewinnen wir im Fall  $\bar{A}_j \in C_j A_j^*$  entweder Anschluß an 2. oder 3a). Im Fall  $\bar{A}_j \notin C_j A_j^*$  bedarf es, wenn  $\Phi[D(x)]$  sein Minimum im Punkte  $A_j$  annimmt, einer unter den Voraussetzungen  $A_k^* \in C_k A_k$  ( $k = 1$  oder  $2$ ;  $k \neq j$ ) und  $\bar{A}_k \in C_k A_k$  durchzuführenden zusätzlichen Verschiebung von  $A_k A_3$ , um endgültig auf 2. oder 3a) zurückführen zu können.

Im Fall  $\beta$  mögen  $E_1$  und  $E_2$  die Schnittpunkte von  $A_1 A_3$  bzw.  $A_2 A_3$  mit dem Umfang von  $K$  sein. Liegt dann  $E_j$  näher an der  $A_1 A_2$  enthaltenden Sehne  $C_1 C_2$  als  $E_k$  ( $j, k = 1$  oder  $2$ ;  $j \neq k$ ), so verschieben wir alle zu  $C_1 C_2$  parallelen Sehnen von  $D$  unter Beibehaltung ihrer Länge derart in ihrer Richtung, daß ein neues Dreieck  $D^*$  entsteht, dessen eine Seite auf der Geraden  $C_j E_j$  liegt (Fig. 4).  $D^*$  ordnet sich dann Fall 2). unter; zu zeigen bleibt mithin, daß

$$(5) \quad \Phi(D^*) \leq \Phi(D)$$

besteht.

Indem wir uns an die Voraussetzung dieses Abschnitts 3a) erinnern, daß die zu  $A_1 A_3$  ( $\lambda = 1, 2$ ) parallelen Tangentenpaare jeweils das gleiche durch  $C_1 C_2$  abgeschnittene Segment von  $K$  berühren sollen, erkennen wir, daß  $\angle E_j C_j C_k$  geringer ist als jeder der Winkel  $A_3 A_1 A_2$  bzw.  $A_3 A_2 A_1$ , woraus sich

aber schon unmittelbar eine Verringerung des Inkreisradius beim Übergang von  $D$  zu  $D^*$  ableitet. Da andererseits das Integral über die Massendichte  $\mu$  längs jeder zu  $C_1 C_2$  parallelen Sehne von  $D$  durch die beschriebene Verschiebung nur vergrößert werden kann, ergibt sich eine Zunahme der Masse, womit (5) erwiesen ist.

Ordnen wir den Fall, daß der Mittelpunkt von  $K$  auf der Geraden  $A_1 A_2$  liegt, noch Fall  $\beta$  unter, so sind damit für die Voraussetzung, daß genau 2 Eckpunkte von  $D$  innerhalb  $K$  liegen sollen, alle Möglichkeiten erschöpft.

4. Der letzte Fall, daß alle drei Eckpunkte von  $D$  innerhalb  $K$  liegen, wird ähnlich wie 3a) erledigt: Bei Translation von  $D$  auf  $K$  in fester Richtung stellt die Massendichte  $\mu(p, x)$  eines auf  $D$  fixierten Punktes  $p$  offenbar eine konvexe Funktion der Verschiebung  $x$  dar, womit das gleiche für das über das verschobene Dreieck  $D(x)$  zu erstreckende Integral

$$M(D(x)) = \int_{D(x)} \mu \, d p$$

gilt. Da zudem  $\rho[D(x)] = \text{const.}$  wird  $\Phi[D(x)]$  konkav und nimmt das Minimum in einer der beiden Grenzlagen an, in denen wenigstens ein Eckpunkt von  $D$  auf den Rand von  $K$  fällt und damit einer der bisher behandelten Fälle eintritt.

(Eingegangen am 10. Mai 1952.)

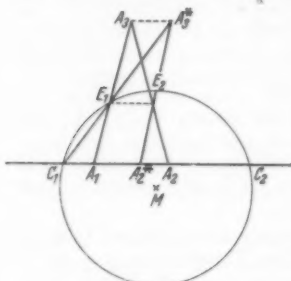


Fig. 4.

# Eindeutige Lösungen der Differentialgleichungen

$$w'' = P(z, w).$$

Von

HANS WITTICH in Karlsruhe.

In den Differentialgleichungen

$$(1) \quad w'' = P(z, w) = a_0(z) w^n + a_1(z) w^{n-1} + \dots + a_n(z), \quad n \geq 2,$$

seien die Koeffizienten  $a_j(z)$  Polynome. Die Forderung, daß (1) mindestens eine in  $|z| < \infty$  eindeutige analytische, nichtrationale Lösung  $w(z)$  besitzen soll, bedingt die Gradbeschränkung  $n \leq 3$ , so daß für  $n$  nur die Werte 2 und 3 in Frage kommen. Bekanntlich sind alle Lösungen von  $w'' = 6w^2 + A_1 w + A_2$  und  $w'' = 2w^3 + A_1 w^2 + A_2 w + A_3$  für konstante  $A_j$  in  $|z| < \infty$  eindeutig. Diese Differentialgleichungen haben überdies die Eigenschaft, daß es zu beliebigem endlichen  $z = p$  stets eine Lösung  $w(z)$  gibt, die  $z = p$  zur Polstelle hat. Fordert man entsprechend für nichtkonstante Koeffizienten  $a_j(z)$  die Eigenschaften

$E_1$ : Es gibt mindestens eine in  $|z| < \infty$  eindeutige analytische, nichtrationale Lösung  $w(z)$  von (1),

$E_2$ : Zu beliebigem endlichen  $z = p$  gibt es eine in  $|z - p| < r$  eindeutig analytische Lösung, die  $z = p$  zur Polstelle hat:  $w(z) = \frac{1}{(z-p)^2} + \dots$ , falls

$$n = 2, \quad w(z) = \frac{A}{z-p} + \dots, \quad \text{falls } n = 3, \quad A = \pm 1,$$

so verbleiben von (1) nur die Gleichungen der Form

$$(2) \quad w'' = a(z) + b(z)w + 6w^2$$

$$(3) \quad w'' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2 + 2w^3,$$

wobei die Koeffizienten in (2) und (3) noch gewissen Bedingungen genügen müssen.

Für jede Lösung  $w(z)$  geht, wie zu erwarten ist, die Ungleichung des zweiten Hauptsatzes<sup>1)</sup> in eine Gleichheit über

$$(4) \quad \sum_{j=1}^q m(r, c_j) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + 2N(r, w) - N(r, w') = 2T(r, w) + S(r), \quad q \geq 3.$$

(4) gilt für alle  $r$ , und das Restglied ist von der Form  $S(r) = O(\log r)$ , da jede Lösung von endlicher Ordnung ist. Die hier betrachteten Differentialgleichungen gestatten nämlich, die vom Beweis des zweiten Hauptsatzes bekannte Beziehung  $m(r, 1/w') \geq \sum_{j=1}^q m(r, c_j) - K_1 \log r$  (da  $w(z)$  von endlicher Ordnung)

durch  $m(r, 1/w') \leq \sum_{j=1}^q m(r, c_j) + K_2 \log r$  zu ergänzen und damit auf die

<sup>1)</sup> Für Bezeichnungen und Ergebnisse vgl. man R. NEVANLINNA: *Eindeutige analytische Funktionen*. Berlin 1936.

Gültigkeit von  $m(r, 1/w') = \sum_{j=1}^q m(r, c_j) + 0 (\log r)$  zu schließen, was nach dem ersten Hauptsatz (4) entspricht. Weiter lassen sich noch Aussagen über das relative Anwachsen der im zweiten Hauptsatz vorkommenden Größen machen. Zur Herleitung dieser Eigenschaften der Lösungen wird nur die gegebene Differentialgleichung herangezogen, also ein Aufbau auf Ergebnisse einer eingehenden Integrationstheorie bewußt vermieden. Ein solches Vorgehen scheint insbesondere dann gerechtfertigt zu sein, wenn eine Differentialgleichung als Definition einer bestimmten, evtl. neuen Gattung transzender Funktionen angesehen und ein erster Einblick in die funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen angestrebt wird.

1. Zuerst werden unter der Annahme, daß  $E_1$  und  $E_2$  erfüllt sind, notwendige Bedingungen für die Gestalt von (1) abgeleitet. Eine gegebene Differentialgleichung (1) besitze gemäß  $E_1$  eine in  $|z| < \infty$  eindeutige nichtrationale Lösung  $w(z)$ . Da in (1) nur das Glied  $a_0(z) w^n$  die maximale Dimension  $n \geq 2$  hat, kann  $w(z)$  nicht ganz transzendent sein.  $w(z)$  muß also Pole besitzen, und zwar in unendlicher Anzahl. Hätte nämlich  $w(z)$  nur endlich viele Pole, so wäre mit einem passenden Polynom  $p(z)$  die Funktion  $g(z) = p(z) w(z)$  ganz transzendent.  $g(z)$  müßte dann Lösung einer algebraischen Differentialgleichung  $Q(z, g, g', g'') = 0$  sein, in der nur ein Glied, nämlich  $a_0 p^3 g^n$ , mit größter Dimension  $n \geq 2$  vorkommt, was unmöglich ist. Danach gibt es eine Lösung  $w(z)$ , die für  $z = p$  mit  $a_0(p) \neq 0$  einen Pol hat. Mit dem für  $|z - p| < r$  gültigen Ansatz  $w(z) = \frac{A_{-\lambda}}{(z-p)^\lambda} + \dots$  folgt wegen  $A_{-\lambda} \neq 0$  aus (1)  $\lambda + 2 = \lambda n$ , eine Beziehung, die nur für  $\lambda = 1, n = 3$  und  $\lambda = 2, n = 2$  möglich ist. Nach  $E_2$  soll (1) auch im Punkte  $z = p$  mit  $a_0(p) = 0$  eine Lösung haben mit einem Pol der Ordnung 2 bzw. 1, was aber für  $a_0(z) \equiv \text{const.}$  unmöglich ist. Wegen der in  $E_2$  getroffenen Normierung gilt  $a_0(z) \equiv 6$  bzw.  $a_0(z) \equiv 2$ . Das sind aber die Gleichungen (2) und (3).

Mit  $w(z) = u(z) - \frac{b(z)}{12} = u(z) + h(z)$  geht (2) über in

$$(2') \quad u'' = \alpha(z) + 6u^2, \quad \alpha(z) = a + b'h + 6h^2 - h''.$$

Geht man mit dem Ansatz  $u = \frac{1}{(z-p)^2} + \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + \dots$  in (2') ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich  $c_{-1} = c_0 = c_1 = 0$  und  $12c_2 = \frac{\alpha''(p)}{2} + 12c_4$ . Da mit  $w(z)$  auch  $u(z)$  unendlich viele Pole hat und für jede Polstelle  $\alpha''(p) = 0$  gilt, muß  $\alpha''(z) = 0$ , also  $\alpha(z) = \alpha_0 z + \beta_0$  erfüllt sein. (2') hat also die Form

$$(\bar{P}_1) \quad u'' = (\alpha_0 z + \beta_0) + 6u^2.$$

Die entsprechende Transformation führt bei der Wahl  $h(z) = -\frac{c(z)}{6}$  (3) über in

$$(3') \quad \begin{aligned} u'' &= \alpha(z) + \beta(z)u + 2u^3 \\ \alpha(z) &= a + b'h + c'h^2 - h'', \quad \beta(z) = b + 2c'h + 6h^2. \end{aligned}$$

Mit  $u(z) = \frac{A}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + \dots$  ergeben sich die Gleichungen  $A^2 = 1$ ,  $c_0 = 0$ ,  $A\beta(p) + 6c_1 = 0$ ,  $2c_2 = \alpha(p) + A\beta'(p) + 6c_2$ ,  $6c_3 = \alpha'(p) + \beta(p) \cdot c_1 + \beta''(p) \frac{A}{2} + 6Ac_1^2 + 6c_3$ .

Aus der letzten Gleichung folgt wegen  $\beta(p) c_1 = -6 A c_1^2$ :

$$\alpha'(p) + \frac{A}{2} \beta''(p) = 0.$$

Für jede Polstelle einer Lösung von (3') muß also  $\alpha'(p) + \frac{A(p)}{2} \beta''(p) = 0$  mit  $A^2(p) = 1$  erfüllt sein. Es wird behauptet, daß  $\alpha'(z) \equiv \beta''(z) \equiv 0$  gelten muß. Ist im Gegensatz zur Behauptung  $\alpha'(z) \not\equiv 0$ ,  $\beta''(z) \not\equiv 0$ , so läßt sich aus den unendlich vielen Polstellen von  $u(z)$   $z = p$  so wählen, daß  $\alpha'(p) \neq 0$  und  $\beta''(p) \neq 0$  erfüllt ist. Für dieses  $z = p$  gilt dann  $\alpha'(p) + \frac{A(p)}{2} \beta''(p) = 0$ . Nach  $E_3$  gibt es eine für  $|z - p| < r$  gültige Lösung  $u_1(z)$  mit der Entwicklung  $u_1(z) = \frac{A_1(p)}{z - p} + \dots$ ,  $A_1(p) = -A(p)$ . Wegen  $\alpha'(p) + \frac{A_1(p)}{2} \beta''(p) = \alpha'(p) - \frac{A(p)}{2} \beta''(p) = 0$  muß  $\alpha'(p) = \beta''(p) = 0$  sein, was der Wahl des Punktes  $z = p$  widerspricht. Es ist also  $\alpha(z) = \alpha_0$ ,  $\beta(z) = \beta_1 z + \beta_0$ , und man erhält für (3') die Form

$$(\bar{P}_2) \quad u'' = \alpha_0 + (\beta_1 z + \beta_0) u + 2 u^3.$$

Durch die Substitutionen  $u = \mu y$ ,  $z = \kappa + \lambda x$ ,  $\mu, \kappa$  und  $\lambda$  passende Konstanten, gehen  $(\bar{P}_1)$ ,  $(\bar{P}_2)$  über in die Normalformen

$$\begin{array}{lll} (P_1) & y'' = x + 6 y^2 & \text{falls in } (\bar{P}_1) \quad \alpha_0 \neq 0, \\ (P_2) & y'' = c + x y + 2 y^3 & \text{falls in } (\bar{P}_2) \quad \beta_1 \neq 0, \\ (E_1) & y'' = a + 6 y^2 & \text{falls in } (\bar{P}_1) \quad \alpha_0 = 0, \\ (E_2) & y'' = a + b y + 2 y^3 & \text{falls in } (\bar{P}_2) \quad \beta_1 = 0. \end{array}$$

$(P_1)$  und  $(P_2)$  sind die beiden ersten PAINLEVÉschen Differentialgleichungen<sup>2)</sup>.  $(E_1)$ ,  $(E_2)$  sind durch elliptische Funktionen oder Ausartungen derselben integrierbar. Geht man von  $(\bar{P}_1)$  und  $(\bar{P}_2)$  zu (2) und (3) zurück, so erhält man

$$\begin{array}{ll} (\bar{2}) & a(z) = \alpha_0 z + \beta_0 + 6 h^2 - h'', \quad b(z) = 12 h(z), \\ (\bar{3}) & a(z) = \alpha_0 + \beta_1 z h + \beta_0 h + 2 h^3 - h'', \quad b(z) = \beta_1 z + \beta_0 + 6 h^2, \\ & c(z) = 6 h. \end{array}$$

Man bekommt danach alle Differentialgleichungen (2) und (3), die den angegebenen notwendigen Bedingungen genügen, indem man in  $(\bar{2})$  und  $(\bar{3})$  für  $h(z)$  ein beliebiges Polynom einsetzt.

2. Zum Nachweis, daß umgekehrt jede Differentialgleichung (2) bzw. (3) mit den in  $(\bar{2})$  bzw.  $(\bar{3})$  angegebenen Koeffizienten die Eigenschaften  $E_1$  und  $E_2$  hat, darf man sich auf die Gln.  $(P_1)$ ,  $\dots$ ,  $(E_2)$  beschränken. Weiter genügt es, die Betrachtungen für  $(P_2)$  durchzuführen, da sich die restlichen Differentialgleichungen entsprechend behandeln lassen.

Zum Nachweis von  $E_3$  wird eine beliebige endliche Stelle  $x = p$  ausgewählt und dazu eine Zahl  $A(p) = 1$  oder  $-1$ . Mit  $y(x) = \frac{A}{x-p} + c_1(x-p) + \dots$

=  $\frac{A}{x-p} + h(x-p)$ ,  $t = x - p$ , erhält man formal

$$h''(t) = c + (t + p) \left( \frac{A}{t} + h \right) + 6 \frac{A^2}{t^2} h + \frac{6A}{t} h^2 + 2 h^3$$

<sup>2)</sup> Vgl. E. L. INCE: Ordinary Differential Equations. Dover Publications. — G. VALIRON: Equations Fonctionnelles Applications. Paris 1945.

und durch Koeffizientenvergleich

$$(5) \quad \begin{cases} 6c_1 + pA = 0, & 4c_2 + c + A = 0, & 6c_3 = 6c_3 + pc_1 + 6Ac_1^2, \\ (n(n-1) - 6)c_n = c_{n-3} + pc_{n-2} + 6Aa_{n-1} + 2B_{n-2} = P(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}) \end{cases}$$

für  $n \geq 4$ . In (5) ist  $A_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j c_{n-j}$ ,  $B_n = \sum_{j=1}^{n-2} c_j A_{n-j}$  und  $P$  ein Polynom in  $c_1, c_2, \dots, c_{n-2}$ . Aus den beiden ersten Gleichungen berechnen sich bei gegebenem  $p$  und  $A(p)$   $c_1$  und  $c_2$  eindeutig. Mit diesem  $c_1$  ist wegen  $c_1(pA^2 + 6Ac_1) = c_1A(pA + 6c_1) = 0$  die dritte Gleichung für beliebiges  $c_3$  erfüllt. Nach Wahl von  $c_3$  berechnen sich dann alle weiteren Koeffizienten eindeutig, so daß zu gegebenem  $p$  und  $A(p)$  stets eine formale Lösung von  $(P_2)$  gefunden werden kann.

Es sei nun  $C = \max(|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, K)$  mit  $K = \max(|p|, 6)$ , also  $C > 1$ . Mit diesem  $C$  gilt dann für alle  $n$   $|c_n| < C^n$ . Für  $j = 1, 2, \dots, n-1 \geq 3$  sei  $|c_j| < C^j$  richtig. Dann folgt aus dieser Annahme auch die Gültigkeit von  $|c_n| < C^n$ . Nach (5) gilt nämlich

$$(n(n-1) - 6)|c_n| \leq K(|c_{n-3}| + |c_{n-2}| + |A_{n-1}| + |c_1 A_{n-3}| + \dots + |c_{n-4} A_2|)$$

und wegen  $|A_j| < (j-1)C^j$  weiter

$$\begin{aligned} (n(n-1) - 6)|c_n| &< K(C^{n-3} + C^{n-2} + C^{n-2}(1+2+\dots+n-4) + (n-2)C^{n-1}) \\ &< K(2C^{n-1} + C^{n-1}(1+2+\dots+n-4+n-2)) \\ &< KC^{n-1}(1+2+\dots+n-1) = K \frac{n(n-1)}{2} C^{n-1} \text{ oder} \end{aligned}$$

$$|c_n| < \frac{K}{2} \frac{n(n-1)}{n(n-1)-6} C^{n-1} \leq KC^{n-1} \leq C^n.$$

Die Abschätzung gilt also, wie behauptet, für alle  $n$ . Für  $|x-p| < r = \frac{1}{2C}$  ist danach  $|c_n(x-p)^n| < \frac{1}{2^n}$ , und  $y(x) = \frac{A(p)}{x-p} + c_1(x-p) + \dots$  stellt in  $|x-p| < r$  eine Lösung von  $(P_2)$  der gewünschten Art dar. Nach der hier durchgeführten Abschätzung hängt die Zahl  $r = \frac{1}{2C}$  von der Stelle  $p$  ab, was auch für  $(P_1)$  gilt. Im Falle  $(E_1)$  und  $(E_2)$  besteht diese Abhängigkeit nicht, da  $p$  nicht in die Abschätzung eingeht.

$(\bar{P}_1)$  hat für  $\alpha_0 \neq 0$  keine rationalen Lösungen und für  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 \neq 0$  ist nur  $u(z) \equiv \text{const.}$  möglich. Ist schließlich  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , d. h.  $u'' = 6u^2$ , dann sind  $u(z) = \frac{1}{(z-p)^2}$ ,  $p$  beliebig, die einzigen rationalen Lösungen. Die An-

nahme, daß  $(P_2)$  rationale Lösungen  $y(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  hat, liefert die Bedingung

$$n = m + 1, \text{ und aus der Entwicklung } y(x) = \frac{c_1}{x} + \dots \text{ für } x = \infty \text{ folgt } y(x) = \frac{c_1}{x} \text{ mit } c_1^2 = 1 \text{ und } c = -c_1. \text{ Das trifft nur für } c = -1 \text{ bzw. } c = 1 \text{ zu, und dann hat } (P_2) \ y = \frac{1}{x} \text{ bzw. } y = -\frac{1}{x} \text{ als einzige rationale Lösung. } (\bar{P}_2) \text{ mit } \alpha_0 \neq 0,$$

$\beta_1 \neq 0$  hat dann und nur dann rationale Lösungen, nämlich  $u(z) = \frac{A}{z-p}$ ,  $A = -\frac{\alpha_0}{\beta_1}$  und  $p = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$ , wenn  $\alpha_0^2 = \beta_1^2$ . Für  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_1 \neq 0$  ist nur  $u(z) \equiv 0$  möglich. Ist  $\beta_1 = \alpha_0 = \beta_0 = 0$ , so hat  $u'' = 2u^3$  als einzige rationale Lösungen  $u(z) = \frac{A}{z-p}$ ,  $A^2 = 1$  und  $p$  beliebig. Sind  $\alpha_0, \beta_0$  nicht beide gleich Null,

dann gilt für jede rationale Lösung in  $z = \infty$  die Entwicklung  $u(z) = c + \frac{a_\mu}{z^\mu} + \dots$  mit  $\alpha_0 + \beta_0 c + 2c^3 = 0$  und  $\beta_0 + 6c^2 = 0$ . Hat  $Q(u) = \alpha_0 + \beta_0 u + 2u^3 = 0$  die einfachen Wurzeln  $c_1, c_2, c_3$ , dann sind diese Konstanten die einzigen rationalen Lösungen von  $u'' = Q(u)$ . Im Falle einer Doppelwurzel  $c$  muß jedes rationale  $u(z) \equiv c$ , da  $u(z)$  den Wert  $c$  nur in  $z = \infty$  (zweimal) annimmt, von der Form  $u(z) = c + \frac{A}{z-p} - \frac{A}{z-q}$  sein mit  $A^2 = 1$ ,  $c(p-q) = A$ . Einsetzen zeigt, daß diese rationalen Funktionen auch tatsächlich Lösungen sind.

Nach N. H. ABEL und P. PAINLEVÉ<sup>3)</sup> ist jedes Integral von  $(P_1), \dots, (E_2)$  eine in  $|x| < \infty$  eindeutige analytische Funktion; damit ist auch jede Lösung von  $(\bar{P}_1), (\bar{P}_2)$  in  $|z| < \infty$  eindeutig analytisch. Da nach den letzten Bemerkungen über die möglichen rationalen Lösungen von  $(\bar{P}_1), (\bar{P}_2)$  diese in keinem Falle die Gesamtheit aller Integrale umfassen, gibt es stets Lösungen mit der Eigenschaft  $E_1$ . Die durch  $E_2$  ausgezeichneten Lösungen, deren Existenz zunächst nur für eine passende Umgebung von  $z = p$  gesichert war, sind mit dem Charakter einer eindeutigen analytischen Funktion in  $|z| < \infty$  fortsetzbar. Diese wichtige Eigenschaft spielte bei der Herleitung der notwendigen Bedingungen in 1. keine Rolle.

Die Bedingungen  $E_1$  und  $E_2$  sondern also aus  $w'' = P(z, w)$  die durch (2), (3),  $(\bar{2})$  und (3) bestimmten Differentialgleichungen aus, und umgekehrt haben diese Differentialgleichungen bzw. ihre Lösungen die in  $E_1$  und  $E_2$  geforderten Eigenschaften.

3. Zur Herleitung der Wertverteilungseigenschaften wird wesentlich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß jede Lösung von (2) und (3) von endlicher Wachstumsordnung ist, also der Bedingung  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} < \infty$  genügt.

Da  $w(z)$  und  $u(z)$  von gleicher Ordnung sind, darf man sich auf  $(\bar{P}_1)$  und  $(\bar{P}_2)$  beschränken. Der Beweis der Behauptung  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, u)}{\log r} < \infty$  wird sehr ein-

fach, wenn man die von AHLFORS und SHIMIZU<sup>4)</sup> stammende geometrische Interpretation der Charakteristik  $T(r, u)$  heranzieht. Bedeutet  $\pi A(r, u)$  den in sphärischer Metrik gemessenen Inhalt des von  $u = u(z)$  als Bild des Kreises  $|z| \leq r$  erzeugten RIEMANNschen Flächenstückes  $F_r$ , also  $\pi A(r, u) = \int_{|z| \leq r} \frac{|u'|^2}{(1 + |u|^2)^2} df_z$ ,  $df_z$  = Flächenelement in der  $z$ -Ebene, so ist die sphärische Normalform der Charakteristik der Ausdruck  $\int_0^r \frac{A(t, u)}{t} dt$ , und es gilt  $\int_0^r \frac{A(t, u)}{t} dt = T(r, u) + O(1)$ . Jede Lösung von  $(\bar{P}_1)$  genügt auch der Be-

ziehung  $u'' = 2\beta_0 u + 2\alpha_0 zu + 4u^3 - 2\alpha_0 F(z)$  mit  $F(z) = \int u(z) dz$ . Nach dem angegebenen Polstellenverhalten von  $u(z)$  ist  $F(z)$  in  $|z| < \infty$  eindeutig analytisch. Wegen  $\frac{|u|^j}{(1 + |u|^2)^2} \leq 1$  für  $j = 0, 1, \dots, 4$  erhält man aus

dem Ausdruck für  $u''$   $\pi A(r, u) \leq 2\pi |\beta_0| r^2 + 4\pi r^2 + \frac{4\pi}{3} |\alpha_0| r^3 +$

<sup>3)</sup> RELICH, F.: Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von  $y'' = f(y)$ . Math. Z. 47, 153–160 (1940) und a. a. O., Anm. 2.

<sup>4)</sup> Vgl. a. a. O., Anm. 1.



$2|\alpha_0| \cdot \int_{|z| \leq r} \frac{|F(z)|}{(1+|u|^2)^2} df_z$ . Zur Abschätzung des letzten Summanden betrachte man auf  $|z| = \varrho$  die Bögen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ , die so festgelegt werden: Auf  $\Delta_1$  gilt  $|F'| = |u| \leq \frac{|F|}{\varrho}$ , auf  $\Delta_2$   $|F'| = |u| > \frac{|F|}{\varrho}$ . Dann ist  $\int_{\Delta_2} \frac{|F|}{(1+|u|^2)^2} d\varphi < \varrho \cdot \int_{\Delta_2} \frac{|u|}{(1+|u|^2)^2} d\varphi \leq 2\pi\varrho$ . Weiter erhält man  $\int_{\Delta_1} \frac{|F|}{(1+|u|^2)^2} d\varphi \leq \int_{\Delta_1} |F| d\varphi = L(\varrho)$ . Dieses Integral existiert, da die möglicherweise auf  $|z| = \varrho$  gelegenen Polstellen den Bögen  $\Delta_2$  angehören. Nun gilt  $\frac{dL}{d\varrho} = \int_{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial \varrho} |F| d\varphi = \int_{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial \varrho} \sqrt{u^2 + v^2} d\varphi = \int_{\Delta_1} \frac{u u_\varrho + v v_\varrho}{\sqrt{u^2 + v^2}} d\varphi$ . Wegen  $(u u_\varrho + v v_\varrho)^2 \leq (u^2 + v^2)(u_\varrho^2 + v_\varrho^2)$  erhält man  $\frac{dL}{d\varrho} \leq \int_{\Delta_1} |F'| d\varphi \leq \frac{1}{\varrho} \int_{\Delta_1} |F| d\varphi = \frac{L(\varrho)}{\varrho}$ , also  $L(\varrho) \leq \frac{L(\varrho_0)}{\varrho_0} \varrho$  für alle  $\varrho \geq \varrho_0 > 0$ . Mithin gilt auf allen Kreisen  $|z| = \varrho \geq \varrho_0$   $\int_0^{2\pi} \frac{|F(\varrho e^{i\varphi})|}{(1+|u(\varrho e^{i\varphi})|^2)^2} d\varphi \leq K_1 \varrho$  und  $\int_{|z| \leq r} \frac{|F|}{(1+|u|^2)^2} df_z < K_2 r^2 + K_3$ . Danach ist  $A(r, u) \leq K_4 r^3 + K_5$  und  $T(r, u) \leq A r^3 + B$ , gültig für alle Lösungen von  $(\bar{P}_1)$ . Jede Lösung von  $(\bar{P}_2)$  genügt der Beziehung

$$u'^2 = 2\alpha_0 u + \beta_0 u^2 + u^4 + \beta_1 z u^2 - \beta_1 F(z), \quad F(z) = \int u^2 dz.$$

Wegen des Polstellenverhaltens von  $u(z)$  ist  $F(z)$  in  $|z| < \infty$  eindeutig analytisch. Eine analoge Rechnung führt zu  $T(r, u) \leq A_1 r^3 + B_1$ , gültig für alle Lösungen von  $(\bar{P}_2)$ . Für  $\alpha_0 = 0$  in  $(\bar{P}_1)$ ,  $\beta_1 = 0$  in  $(\bar{P}_2)$  folgt  $T(r, u) \leq A r^2 + B$ . Hier fällt die nach dieser Methode gefundene obere Schranke 2 für die Ordnung mit der Ordnung der doppeltperiodischen Lösungen von  $(\bar{P}_1)$ ,  $(\bar{P}_2)$  zusammen. Die durch die Substitution  $u = \mu y$ ,  $z = \kappa + \lambda x$  zusammenhängenden Lösungen  $u(z)$  und  $y(z)$  sind von gleicher Ordnung  $\sigma < \infty$ . Es sei  $\sigma$  die Ordnung von  $y(x)$ . Aus  $6u^2 = \frac{u''}{u'} - \frac{u''}{u} u - (\alpha_0 z + \beta_0)$  folgt, da  $u(z)$  von endlicher Ordnung ist,  $m(r, u) = 0(\log r)$  und entsprechend für  $(P_2)$ . Bezeichnet  $K_x$  den Kreis  $|x + \frac{\kappa}{\lambda}| \leq \frac{r}{|\lambda|}$ , so ist  $n(r, u)$  gleich der Zahl der Polstellen von  $y(x)$  auf  $K_x$  und diese Anzahl liegt zwischen den Grenzen  $n(\varrho_m, y)$  und  $n(\varrho_M, y)$  mit  $\varrho_m = \frac{r}{|\lambda|} - \left| \frac{\kappa}{\lambda} \right|$ ,  $\varrho_M = \frac{r}{|\lambda|} + \left| \frac{\kappa}{\lambda} \right|$ . Damit erhält man wegen  $m(r, y) = 0(\log r)$  für bel.  $\varepsilon > 0$  die Beziehung  $\frac{\log N(r, u)}{\log r} \leq \sigma + \varepsilon$  für alle  $r > r(\varepsilon)$  und  $\sigma - \varepsilon \leq \frac{\log N(r_j, u)}{\log r_j}$ , gültig für eine Zahlenfolge  $r_j \rightarrow \infty$ , also  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, u)}{\log r} = \sigma$ , was wegen  $m(r, u) = 0(\log r)$  für nichtrationales  $u(z)$  mit  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, u)}{\log r} = \sigma$  gleichbedeutend ist. Nach P. BOUTROUX<sup>5)</sup> gilt für die Lösungen von  $(P_1)$

<sup>5)</sup> BOUTROUX, P.: Sur quelques propriétés des fonctions entières. Acta math. 28, 174–187 (1904).



bzw.  $(P_2) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, y)}{\log r} = \frac{5}{2}$  bzw. 3, also  $\sigma = \frac{5}{2}$  bzw.  $\sigma = 3$ . Von diesen Ergebnissen wird hier kein Gebrauch gemacht.

4. Für jede Lösung von (2) gilt nach 3.  $m(r, w) = 0$  ( $\log r$ ). Ist  $k$  eine beliebige endliche komplexe Zahl, so folgt aus

$$\begin{aligned} w'' &= a(z) + k b(z) + 6k^2 + b(z)(w - k) + \\ &+ 6(w^2 - k^2) = D(z) + b(z)(w - k) + 6(w^2 - k^2) \quad \text{für } D(z) \not\equiv 0 \\ \frac{1}{w - k} &= \frac{1}{D(z)} \left( \frac{w''}{w - k} - b(z) - 6(w + k) \right). \end{aligned}$$

Nach Übergang zur Schmiegungsfunktion erhält man daraus nach dem Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung und wegen  $m(r, w) = 0$  ( $\log r$ )

$$m\left(r, \frac{1}{w - k}\right) = 0 \quad (\log r).$$

Für nichtrationales  $w(z)$  gilt daher nach dem ersten Hauptsatz  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, k)}{N(r, k')} = 1$

und weiter  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, k)}{n(r, k')} = 1$  für beliebige Zahlen  $k$  und  $k'$ . Das ist im wesentlichen der Inhalt eines Satzes, den PAINLEVÉ für die Lösungen von  $w'' = z + 6w^2$  aussprach. Aus (2) folgt durch  $n$ -malige Differentiation nach  $z$

$$w^{(n+2)} = a^{(n)}(z) + b^{(n)}(z)w + Q(z, w, w', \dots, w^{(n)}).$$

$Q$  ist ein Polynom in  $z, w, w', \dots, w^{(n)}$ , und jeder Summand enthält mindestens eine der Größen  $w', \dots, w^{(n)}$  als Faktor, so daß in  $\frac{1}{w'} Q(z, \dots, w^{(n)})$  jeder

Summand von der Form  $A_j(z) \frac{w^{(\mu)}}{w'} w^{p_0} (w')^{p_1} \dots (w^{(n)})^{p_n}$  ist,  $A_j(z)$  ein Polynom,  $p_\mu$  nichtnegative ganze Zahlen und  $1 \leq \mu \leq n$ . Da für endliche Ordnung von  $w(z)$  mit  $m(r, w) = 0$  ( $\log r$ ) auch  $m(r, w^{(j)}) = 0$  ( $\log r$ ) gilt, folgt  $m\left(r, \frac{1}{w'} Q\right) = 0$  ( $\log r$ ). Nach (2) ist, falls  $D(z) \not\equiv 0$ ,  $a^{(n)}(z) \not\equiv 0$ , wenn  $n$  die kleinste Zahl mit  $\frac{d^n b}{dz^n} \equiv 0$  ist. Aus

$$\frac{w^{(n+2)}}{w'} = \frac{a^{(n)}(z)}{w'} + \frac{1}{w'} Q(z, w, \dots, w^{(n)})$$

folgt dann  $m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = 0$  ( $\log r$ ) und nach dem ersten Hauptsatz  $N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - N(r, w') = 0$  ( $\log r$ ). Beachtet man noch  $2N(r, w) = 2T(r, w) + 0$  ( $\log r$ ), so ist  $\sum_1^q m(r, c_j) + N(r, 1/w') - N(r, w') + 2N(r, w) = 2N(r, w) + 0$  ( $\log r$ ) =  $2T(r, w) + 0$  ( $\log r$ ) für alle  $r$  richtig, also (4) im Falle  $D(z) \not\equiv 0$  für jede Lösung von (2) gültig. Aus  $N_1(r, w) = \frac{1}{2} N(r, w)$ ,  $N(r, 1/w') = N(r, w') + 0$  ( $\log r$ ) =  $\frac{3}{2} N(r, w) + 0$  ( $\log r$ ) folgt  $\vartheta(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, w)}{T(r, w)} = \frac{1}{2}$  und  $\Phi_e = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w)} = \frac{3}{2}$ , also eine genaue Defektrelation  $\Phi_e + \vartheta(\infty) = 2$ .

Für den bisher ausgeschlossenen Fall  $D(z) \equiv 0$  ist wegen (2)  $h(z) \equiv \text{const.}$  und  $\alpha_0 = 0$  in  $(\bar{P}_1)$  notwendig, so daß eine Differentialgleichung  $w'' = a + b w + 6w^2$  mit konstantem  $a$  und  $b$  vorliegt. Zur Diskussion ihrer Lösungen

kann man die  $Pe$ -Funktion heranziehen. Man kann aber auch, und das soll der Vollständigkeit halber hier geschehen, die wesentlichsten Eigenschaften der Lösungen unmittelbar der Differentialgleichung entnehmen. Dazu darf man wegen  $h(z) \equiv \text{const.}$  von  $w'' = a + 6w^2$  bzw.  $w'^2 = \alpha + 2aw + 4w^3 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3) = 4w^3 - g_2w - g_3 = P(w)$  ausgehen. Hat  $P(w) = 0$  nur einfache Wurzeln, so folgt für beliebige endliche  $k$  aus

$$\left(\frac{w'}{w-k}\right)^2 = 4(w+2k) + \frac{P(k)}{(w-k)^2} + \frac{P'(k)}{w-k} \quad m\left(r, \frac{1}{w-k}\right) = 0 \quad (\log r)$$

und daraus in Verbindung mit  $2m(r, 1/w') \leq \sum_1^3 m\left(r, \frac{1}{w-e_j}\right) + 0 \quad (1)$   
 $m(r, 1/w') = 0 \quad (\log r)$ . Die einfachere Form dieser Differentialgleichung gegenüber  $(\bar{P}_1)$  mit  $\alpha_0 \neq 0$  gestattet eine genauere Analyse der Gesamtverzweigkeit  $\Phi_e$  im Endlichen.  $w'(z)$  verschwindet nur an den  $e_j$ -Stellen von  $w(z)$ , und an allen diesen Stellen wird wegen  $w'' = \frac{1}{2} \frac{dP}{dw} \Big|_{w=e_j} \neq 0$  der Wert  $e_j$  doppelt angenommen. Zuzufolge  $m(r, e_j) = 0 \quad (\log r)$  gilt  $N_1(r, e_j) = \frac{1}{2} N(r, e_j) = \frac{1}{2} T(r, w) + 0 \quad (\log r)$  oder  $\vartheta(e_j) = \frac{1}{2}$ , also  $\Phi_e = \vartheta(e_1) + \vartheta(e_2) + \vartheta(e_3)$ . Falls  $k = c$  Doppelwurzel von  $P(w) = 0$  ist, also  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ , schließt man nach dem Eindeutigkeitssatz, daß für jede nichtkonstante Lösung von  $w'^2 = 4(w-c)^2(w+2c)$  der Wert  $c$  PICARDScher Ausnahmewert ist:  $\delta(c) = 1$ . Wegen  $m(r, -2c) = 0 \quad (\log r)$  und  $N_1(r, -2c) = \frac{1}{2} N(r, -2c)$  gibt der Wert  $-2c$  zur Verzweigkeit  $\Phi_e$  den Beitrag  $\vartheta(-2c) = \frac{1}{2}$ . Es ist  $\Phi_e = \vartheta(-2c)$ , da aus  $\left(\frac{1}{w'}\right)^2 = \left(\frac{1}{w-c}\right)^2 \frac{1}{4(w+2c)} \quad m(r, 1/w') = m(r, c) + 0 \quad (\log r)$  folgt und damit nach dem ersten Hauptsatz  $N(r, 1/w') = \frac{3}{2} N(r, w) + m(r, w') - m(r, 1/w') = \frac{1}{2} N(r, w) + 0 \quad (\log r) = \frac{1}{2} T(r, w) + 0 \quad (\log r)$ . Wegen  $\vartheta(\infty) = 1/2$  gilt eine genaue Defektrelation  $\delta(c) + \vartheta(-2c) + \vartheta(\infty) = 2$ . Ohne Benützung der Lösung  $w(z) = c - 3c \sin^{-2}(\sqrt{-3c} \cdot z + C)$  von  $w'^2 = 4(w-c)^2(w+2c)$  läßt sich weiter noch zeigen, daß  $w(z)$  von der Ordnung 1 ist. Da  $c$  PICARDScher Ausnahmewert ist, erhält man in  $g(z) = \frac{1}{w(z)-c}$  eine ganze transzendente Lösung der Differentialgleichung  $g'^2 = 12cg^2 + 4g$ . Ist  $\nu(r)$  der zu  $g(z)$  gehörige Zentralindex, dann folgt wegen  $c \neq 0$  aus der Differentialgleichung  $\nu(r) = \sqrt{12|c|} \, r(1+h(r))$  und daraus  $\log M(r) = Kr(1+h(r))$ ,  $0 < K < \infty$ , und  $h(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ . Mit  $g(z)$  ist aber auch  $w(z)$  von der Ordnung 1. Im Falle einer dreifachen Wurzel liegt die Differentialgleichung  $w'^2 = 4w^3$  mit dem allgemeinen Integral  $w(z) = 1/(z-p)^2$  vor.

5. Zunächst wird in  $(\bar{P}_2)$   $\beta_1 \neq 0$  vorausgesetzt. Nach 3. ist für jede Lösung  $w(z)$  von (3)  $m(r, w) = 0 \quad (\log r)$ . Ist  $k$  wieder eine beliebige endliche komplexe Zahl, so folgt aus  $w'' = D(z) + b(z)(w-k) + c(z)(w^3 - k^3) + 2(w^3 - k^3)$  mit  $D(z) = a(z) + b(z)k + c(z)k^2 + 2k^3 \quad m\left(r, \frac{1}{w-k}\right) = 0 \quad (\log r)$ , falls  $D(z) \neq 0$ . Diese Bedingung ist für  $h(z) \equiv \text{const.}$  wegen (3) sicher erfüllt. Jede Lösung

ist also frei von defekten Werten, und für beliebige Werte  $k$  und  $k'$  gilt

$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, k)}{n(r, k')} = 1$ .  $n$ -malige Differentiation von (3) nach  $z$  führt zu

$$w^{(n+2)} = a^{(n)}(z) + b^{(n)}(z)w + c^{(n)}(z)w^2 + Q(z, w, w', \dots, w^{(n)}),$$

und bei  $h(z) \equiv \text{const.}$  läßt sich nach (3)  $n$  so wählen, daß  $b^{(n)}(z) = c^{(n)}(z) \equiv 0$ , aber  $a^{(n)}(z) \not\equiv 0$  gilt. Dann folgt wie in 4.  $m(r, 1/w') = 0(\log r)$ , also wegen  $N(r, 1/w') = N(r, w') + 0(\log r) = 2N(r, w) + 0(\log r) = 2T(r, w) + 0(\log r)$   $\Phi_e = 2$  und (4). Ist  $h(z) \equiv \text{const.}$ , so ist für  $\alpha_0 \neq 0$  noch  $D(z) \equiv 0$  für alle  $k$ .

Dann erhält man aus  $\frac{w'''}{w'} = \beta_1 \frac{w-h}{w'} + (b+2cw+6w^2) m\left(r, \frac{w-h}{w'}\right) = 0(\log r)$  und zusammen mit  $m(r, 1/w') \leq m\left(r, \frac{w-h}{w'}\right) + m(r, 1/w-h) + 0(1)$

wieder  $m(r, 1/w') = 0(\log r)$ .  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, k)}{n(r, k')} = 1$ ,  $\Phi_e = 2$  und (4) sind also ausnahms-

los für  $\beta_1 \neq 0$  und  $\alpha_0 \neq 0$  gültig. Im Falle  $\alpha_0 = 0$  verschwindet  $D(z)$  identisch nur für  $h = k$ . Dann kann man nicht mehr in der angegebenen Art auf  $m(r, 1/w-h) = 0(\log r)$  schließen. Da auch in diesem Falle die Beziehung

$m\left(r, \frac{w-h}{w'}\right) = 0(\log r)$  richtig bleibt, erhält man zusammen mit  $m(r, 1/w-h)$

$\leq m(r, 1/w') + C \log r$   $m(r, 1/w') = m(r, 1/w-h) + 0(\log r)$ , also (4). Die Funktion  $u(z) = w(z) - h$  genügt den Gleichungen  $u'' = (\beta_1 z + \beta_0)u + 2u^3$

und  $u'^2 = (\beta_1 z + \beta_0)u^2 + u^4 - \beta_1 F(z)$ ,  $F'(z) = u^2$ . Aus  $\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = (\beta_1 z + \beta_0) -$

$-\beta_1 \frac{F(z)}{F'(z)} + u^2$  entnimmt man wegen  $\beta_1 \neq 0$   $m(r, F/F') = 0(\log r)$  und daraus

weiter  $m(r, 1/F) = m(r, 1/F') + 0(\log r) = 2m(r, 1/u) + 0(\log r)$ . Da aus  $m(r, F) = 0(\log r)$  und  $N(r, F) = N(r, u)$  nach dem ersten Hauptsatz  $T(r, F) = T(r, u) + 0(\log r)$  folgt, bekommt man  $2\delta(0, u) = \delta(0, F) \leq 1$ , also

$0 \leq \delta(0, u) \leq \frac{1}{2}$ . Der für  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_1 \neq 0$ ,  $h = k$  mögliche Defekt  $\delta(h, w)$  kann

mithin höchstens gleich  $1/2$  sein. Dabei bleibt hier unentschieden, ob überhaupt  $\delta(h, w) > 0$  zutreffen kann. In dem noch ausstehenden Falle  $\beta_1 = 0$  darf man sich auf  $w'' = \alpha_0 + \beta_0 w + 2w^3 = Q(w)$  bzw.  $w'^2 = \alpha + 2\alpha_0 w + \beta_0 \cdot w^2 + w^4 = P(w)$  beschränken. Je nach Wahl der Anfangsbedingungen in  $w'' = Q(w)$  erhält man Lösungen von verschiedenem Wertverteilungsverhalten. Ist für beliebiges endliches  $k = c$  nicht gleichzeitig  $P(c) = 0$ ,  $P'(c) = 0$ , so folgt aus  $w'^2 = P(c) + P'(c)(w-c) + \dots + (w-c)^4$  wie in 4.  $m(r, 1/w-c) = 0(\log r)$  und  $m(r, 1/w') = 0(\log r)$ . Sind dann  $c_j$  die vier verschiedenen

Wurzeln von  $P(w) = 0$ , so gilt zufolge  $N_1(r, c_j) = \frac{1}{2} T(r, w) + 0(\log r)$   $\vartheta(c_j) = 1/2$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Hat  $P(w) = 0$  genau eine Doppelwurzel, also  $w'^2 = (w-c)^2$

$(w-c_3)(w-c_4)$ , so muß nach dem Eindeutigkeitssatz für nichtkonstantes  $w(z)$  der Wert  $c$  PICARDScher Ausnahmewert sein.  $c_3, c_4$  sind Normalwerte mit

$N_1(r, c_j) = \frac{1}{2} T(r, w) + 0(\log r)$ , also  $\vartheta(c_3) = \vartheta(c_4) = 1/2$ . (4) ist wegen

$m(r, 1/w') = m(r, 1/w-c) + 0(\log r)$  erfüllt. Die Ordnung der Lösungen

ergibt sich wie in 4. auf dem Wege über den Zentralindex zu 1. Ist noch  $c_3 = c_4 = c'$ , so sind, falls  $w(z)$  eine transzendente Lösung ist, beide Werte  $c$  und  $c'$  PICARDSche Ausnahmewerte. Aus der Differentialgleichung folgt  $m(r, 1/w') =$

$= m(r, c) + m(r, c') + 0(\log r)$ .  $w(z)$  ist, wie das Anwachsen des Zentral-

index von  $g(z) = \frac{1}{w(z)-c}$  zeigt, von der Ordnung 1. Damit sind alle transzendenten Lösungen der Differentialgleichung erfaßt. Hätte nämlich  $w'^2 = (w-c)^3(w-c')$  bzw.  $w'^2 = w^4$  eine transzendente Lösung, so müßte, da  $c$  bzw. 0 PICARDScher Ausnahmewert wäre,  $g(z) = \frac{1}{w(z)-c}$  bzw.  $g(z) = 1/w(z)$  ganze transzendente Lösung der Differentialgleichung  $v'^2 = 1 + (c-c')v$  bzw.  $v'^2 = 1$  sein, was unmöglich ist.

#### Zusammenfassung.

Jede Lösung der Differentialgleichungen (2) und (3), deren Koeffizienten den Bedingungen (2) und (3) genügen, ist in  $|z| < \infty$  eindeutig analytisch, von endlicher Wachstumsordnung und erfüllt die Beziehung (4). Für nicht-konstante Koeffizienten  $a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $c(z)$  gilt, wenn man von dem unerledigten Fall  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_1 \neq 0$  absieht:

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, k)}{n(r, k')} = 1 \quad \text{für beliebige komplexe Zahlen } k \text{ und } k'.$$

Der Gesamtindex der algebraischen Verzweigkeit  $\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r)}{T(r, w)}$  ist stets gleich 2.

Geht man für konstante Koeffizienten zu  $w'^2 = P_3(w)$  bzw.  $w'^2 = P_4(w)$  über, so gelten die folgenden Verzweigungseigenschaften

$$P_3 = 4(w-e_1)(w-e_2)(w-e_3) \quad \Phi = \Phi_e + \vartheta(\infty) = \sum_1^3 \vartheta(e_i) + \vartheta(\infty) = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \quad (6) \text{ für bel. } k \text{ und } k'.$$

$$= 4(w-c)^2(w+2c) \quad \Phi = \Phi_e + \vartheta(\infty) = \vartheta(-2c) + \vartheta(\infty) = 2 \cdot \frac{1}{2} \\ \delta(c) = 1.$$

$$= 4w^3$$

Keine transzendenten Lösungen.

$$P_4 = (w-c_1) \dots (w-c_4) \quad \Phi = \Phi_e = \sum_1^4 \vartheta(c_i) = 4 \cdot \frac{1}{2}, \quad (6) \text{ für bel. } k, k'.$$

$$P_4 = (w-c)^2(w-c_3)(w-c_4) \quad \Phi = \Phi_e = \vartheta(c_3) + \vartheta(c_4) = 2 \cdot \frac{1}{2}, \quad \delta(c) = 1.$$

$$P_4 = (w-c)^2(w-c')^2 \quad \Phi = \Phi_e = 0, \quad \delta(c) = \delta(c') = 1.$$

$$P_4 = (w-c)^3(w-c') \quad \left. \vphantom{P_4 = (w-c)^3(w-c')} \right\} \quad \text{Keine transzendenten Lösungen.}$$

6. Sind in der RICCATISchen Differentialgleichung  $w' = a(z) + b(z)w + w^2$  die Koeffizienten  $a(z)$ ,  $b(z)$  Polynome, so ist jede Lösung  $w(z)$  in  $|z| < \infty$  eindeutig analytisch und von endlicher Ordnung. Das ersieht man aus der zugeordneten Gleichung  $u'' - b(z)u' + a(z)u = 0$  mit  $w = -u'/u$ . Die Ordnungsbeschränkung kann man aber auch mit der in 3. benützten Methode beweisen. Dazu bildet man  $w'^2 = a^2(z) + \dots + w^4$  und beachtet

$$\frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2} \leq 1. \quad \text{Man erhält } T(r, w) < A r^p + B \quad \text{mit } p = 2 + 2 \max(\alpha, \beta),$$

wenn  $\alpha, \beta$  die Grade von  $a(z)$ ,  $b(z)$  sind. Wie bei (2), (3) gestattet auch die RICCATISche Differentialgleichung den Beweis der Beziehung  $m(r, 1/w)$

$$< \sum_1^q m(r, c_i) + C \log r, \quad \text{so daß (4) gilt. Auch die wichtige Klasse der linearen}$$

Differentialgleichungen  $w^{(m)} + a_{m-1}(z) w^{(m-1)} + \dots + a_1(z) w' + a_0(z) w = 0$ ,  $a_0(z) \not\equiv 0$ , mit rationalen Koeffizienten ermöglicht, da jede in  $|z| < \infty$  eindeutige Lösung von endlicher Ordnung ist, den Beweis der Beziehungen  $m(r, 1/w') = m(r, 1/w) + 0(\log r)$  und  $m(r, w') = m(r, w) + 0(\log r)^6$ . In diesen Fällen gestattet allein die Form der Differentialgleichung in Verbindung mit einer groben Aussage über das Anwachsen der Lösungen den Schluß auf die Gültigkeit von (4). Danach ist es nicht überraschend, daß kein Beispiel einer transzendenten Funktion bekannt ist, wo  $m(r, w) \sim m(r, w')$

und  $m(r, 1/w') \sim \sum_{j=1}^q m(r, 1/w - c_j)$  nicht streng gilt. Genügen doch viele der bekannten Funktionen (bekannt in dem Sinne, daß sie eine Berechnung der in Frage kommenden Wertverteilungsgrößen zulassen) gerade gewöhnlichen Differentialgleichungen der erwähnten Bauart.

Die Lösungen von  $w' = a + b w + w^2$ , (2), (3) und von linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten sind, wenn man in erster Linie an das Auftreten defekter Werte denkt, nicht besonders interessant, da für die ersten nur in wenigen Ausnahmefällen defekte Werte vorkommen und bei letzteren neben  $w = \infty$  mit  $\delta(\infty) = 1$  höchstens noch  $w = 0$  einen positiven Defekt haben kann. Unter den Lösungen von  $w' = a + b w + w^2$  gibt es keine, die einen positiven Index der algebraischen Verzweigkeit besitzt, eine Eigenschaft, die auch noch in großem Umfange für (2) (von  $\delta(\infty) = 1/2$  abgesehen) und (3) gelten dürfte. Es ist zu erwarten, daß diese Funktionen für den Zusammenhang zwischen Wachstumsordnung und Flächenbau von Interesse sind.

<sup>6</sup>) WITTICH, H.: Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. 124, 277—288 (1952).

(Eingegangen am 4. Juli 1952.)

# Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung <sup>1)</sup>.

Von

JÜRGEN MOSER in Göttingen.

In letzter Zeit wurde das Eigenwertproblem

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u \quad \text{in } a < x < b$$

häufig untersucht, nachdem H. WEYL [2] vor 40 Jahren für diese Differentialgleichung zum ersten Male eine Spektraltheorie entwickelt hatte, bei der an den Intervallenden  $x = a$ ,  $x = b$  beliebige Singularitäten der Koeffizienten  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $k(x)$  und  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$  zugelassen waren. Hier soll diese Differentialgleichung in Abhängigkeit von einem reellen Parameter betrachtet werden, eine Aufgabe, die sich auch aus physikalischen Fragen ergibt. Insbesondere ist der Fall von Interesse, daß die Funktion  $q(x)$ , die in den Anwendungen der Quantenmechanik die Rolle des Potentials spielt, in eine konvergente Potenzreihe nach dem Parameter  $\varepsilon$  entwickelt werden kann:

$$q_\varepsilon(x) = q^0(x) + \varepsilon q^1(x) + \varepsilon^2 q^2(x) + \dots,$$

während  $p(x)$ ,  $k(x)$  und das Intervall  $(a, b)$  von  $\varepsilon$  unabhängig sind. Für eine solche Differentialgleichung sind Sätze über die Abhängigkeit der Lösungen von dem Parameter bekannt; es gibt z. B. stets ein Fundamentalsystem, das regulär analytisch von  $\varepsilon$  abhängt. Obwohl aus einem solchen Fundamentalsystem letzten Endes alle Aussagen über Spektrum und Eigenfunktionen gewonnen werden können, folgt doch daraus keineswegs, daß die Spektraldarstellung regulär analytisch von  $\varepsilon$  abhängt. Im allgemeinen kann man nicht einmal erwarten, daß das Spektrum einer solchen Differentialgleichung stetig von dem Parameter  $\varepsilon$  abhängt, wie man an dem einfachen Beispiel

$$-u'' + \varepsilon x^2 u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $u(0) = 0$  erkennt. Während für  $\varepsilon < 0$  das Spektrum rein kontinuierlich ist und die ganze reelle  $\lambda$ -Achse erfüllt, liegt für  $\varepsilon = 0$  das Spektrum nur auf der positiven  $\lambda$ -Achse. Für  $\varepsilon > 0$  schließlich erweist sich das Spektrum als diskret. Dieses unübersichtliche Verhalten des Spektrums der Differentialgleichung hat hauptsächlich seinen Grund darin, daß das „Störglied“  $\varepsilon x^2$  für jedes  $\varepsilon \neq 0$  bei  $x = \infty$  zu stark anwächst. Es wird also die Aufgabe sein, für das Störglied geeignete Voraussetzungen zu finden, unter denen die Spektralzerlegung der Differentialgleichung einen regulären Charakter aufweist.

<sup>1)</sup> Diese Arbeit enthält meine von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen angenommene Dissertation.

Diese Aufgabe ist für den diskreten Teil des Spektrums sogar für beliebige selbstadjungierte Operatoren durch F. RELICH [6] erledigt worden. In der vorliegenden Arbeit soll daher ausschließlich das kontinuierliche Spektrum untersucht werden. Dabei wird für das folgende allgemein vorausgesetzt, daß bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und bei  $x = b$  der Grenzpunktfall<sup>2)</sup> vorliegt. Dann entsteht die Schwierigkeit, eine für verschiedene Parameterwerte  $\varepsilon$  gemeinsame Randbedingung bei  $x = a$  zu stellen. Diese Frage wird in § 2 durch Satz 1 beantwortet werden, unter der Voraussetzung, daß für die Störglieder  $q^{(\nu)}(x)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) eine Abschätzung der Form

$$(I) \quad \int_a^b \Phi^2(x) |q^{(\nu)}(x)| dx < k^* \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

mit einer geeigneten Funktion  $\Phi(x)$  gilt.

Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators wird bekanntlich durch die in der Spektraltheorie geläufige Spektralschar, die mit  $E(\lambda)$  bezeichnet wird, charakterisiert. Sie erweist sich für die hier behandelten Differentialoperatoren als Integraloperator. Wenn man nach der Abhängigkeit des Spektrums von dem Parameter  $\varepsilon$  fragt, wird man zunächst untersuchen, ob sich die Spektralschar in eine für kleine  $\varepsilon$  konvergente Potenzreihe entwickeln läßt. Es stellt sich heraus, daß hierfür nicht alleine eine Voraussetzung der Form (I) für die Kleinheit der Störglieder ausreicht, sondern daß auch die ungestörte Differentialgleichung ( $\varepsilon = 0$ ) gewissen einschränkenden Bedingungen unterliegen muß. Diese Tatsache wird schon dadurch nahegelegt, daß man im allgemeinen keine Regularität von  $E(\lambda_0)$  erwarten kann, wenn  $\lambda_0$  ein Eigenwert der ungestörten Differentialgleichung ist. Mit  $\Delta$  wird ein Intervall  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  des Spektrums  $S$  der ungestörten Differentialgleichung bezeichnet. In Satz 3 (§ 4) wird zu einem Intervall  $\Delta$  eine solche Bedingung für die ungestörte Differentialgleichung angegeben (durch die insbesondere Eigenwerte in  $\Delta$  ausgeschlossen werden), unter der die Regularität der Spektralschar  $E(\Delta) = E(\lambda_2) - E(\lambda_1)$  für hinreichend kleine  $\varepsilon$  bewiesen wird, wenn noch mit einer geeigneten Funktion  $\Phi(x)$  die Bedingung (I) gilt. Die Größe  $k$  in (I) wird für den Konvergenzradius maßgebend.

Die für die eben angegebenen Resultate genannten Voraussetzungen hängen von der Wahl des Intervalles  $\Delta$  ab. Sind sie aber sogar für das gesamte Spektrum  $S$  erfüllt (dazu ist notwendig, daß  $S$  keine Punkteigenwerte enthält), so läßt sich überdies zeigen, daß die gestörte Differentialgleichung durch eine unitäre Transformation  $U_\varepsilon$  in die ungestörte transformiert wird! Dann wird also insbesondere die Lage des Spektrums von  $\varepsilon$  unabhängig, wenn nur  $\varepsilon$  hinreichend klein ist. Ferner läßt sich der Operator  $U_\varepsilon$  sowie seine Reziproke für kleine  $\varepsilon$  in eine konvergente Potenzreihe nach  $\varepsilon$  entwickeln, wie in Satz 4 (§ 5) bewiesen wird. Im letzten Paragraphen werden diese Ergebnisse auf spezielle Klassen von Differentialgleichungen angewendet und dadurch die Bedingungen als erfüllbar nachgewiesen.

Die WEYLsche Theorie wird als bekannt vorausgesetzt. Ihre wichtigsten Resultate werden, soweit sie später verwendet werden, in der Darstellung von K. KODAIRA [4] in § 1 zusammengestellt. Es sei noch auf die Arbeiten von B. v. NAGY [7], K. O. FRIEDRICHS [8] und E. HEINZ [9] hingewiesen, in denen ähnliche Fragen der Störungsrechnung für allgemeinere Operatoren behandelt werden.

<sup>2)</sup> Die Begriffe Grenzkreisfall, Grenzpunktfall stammen von H. WEYL [2].



## § 1. Erklärung des Differentialoperators.

Die betrachtete Differentialgleichung, die später von einem Parameter abhängig sein wird, hat die Form

$$(1.1) \quad -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u \quad \text{in } a < x < b,$$

wobei  $a, b$  auch  $\pm \infty$  sein kann,  $p(x), k(x)$  in  $a < x < b$  positive stetige Funktionen sind und  $q(x)$  in  $a < x < b$  stückweise stetig ist. Die Spektraltheorie für eine solche Differentialgleichung wurde zuerst von H. WEYL [2] entwickelt und später von anderen Autoren (M. H. STONE [1] Kap. 10, E. C. TITCHMARSH [3], K. KODAIRA [4], N. LEVINSON [5]) unter verschiedenen Gesichtspunkten behandelt. In diesem Paragraphen werden die Resultate dieser Theorie in der Form, wie sie im folgenden verwendet werden, im Anschluß an die Arbeit von K. KODAIRA wiedergegeben.

Mit  $\mathfrak{H}$  werde der HILBERTSCHE Raum aller in  $a < x < b$  im Sinne von LEBESGUE meßbaren Funktionen  $f(x)$ , für die das Integral  $\int_a^b |f(x)|^2 k(x) dx$  existiert, bezeichnet und

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) k(x) dx; \quad \|f\| = (f, f)^{1/2} \quad \text{für } f, g \in \mathfrak{H}$$

als inneres Produkt bzw. als Norm erklärt.  $\mathfrak{Q}$  sei der in  $\mathfrak{H}$  dichte Teilraum, dessen Elemente  $u(x)$  in  $a < x < b$  differenzierbar sind, für die  $p(x)u'(x)$  in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $a < x < b$  totalstetig ist und das Integral

$\int_a^b |(p(x)u')' + q(x)u|^2 k^{-1} dx$  existiert. Für alle Elemente  $u \in \mathfrak{Q}$  werde der lineare abgeschlossene Operator

$$(1.2) \quad Lu = \frac{1}{k(x)} \{-(p(x)u')' + q(x)u\}$$

erklärt, so daß die Gleichung (1.1) die Form  $Lu = \lambda u$  erhält. Der Operator  $L$  in  $\mathfrak{Q}$  ist im allgemeinen, nämlich wenn nicht sowohl bei  $x = a$  als auch bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt, nicht selbstadjungiert; dies erreicht man erst durch Einschränkung von  $\mathfrak{Q}$  durch Randbedingungen, die jetzt angegeben werden sollen.

Da hier nur der Fall von Interesse ist, daß das kontinuierliche Spektrum nicht leer ist, wird im folgenden stets angenommen, daß bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt; denn wenn an beiden Intervallenden  $x = a$  und  $x = b$  der Grenzkreisfall vorliegt, ist das kontinuierliche Spektrum der Differentialgleichung (1.1) leer<sup>3)</sup>. Ferner werde bei  $x = a$  der Grenzkreisfall angenommen; diese Einschränkung wird zur bequemeren Formulierung der späteren Resultate gemacht. Dann ist bei  $x = a$  eine Randbedingung zu stellen. Dazu benutzt man die Tatsache, daß für zwei Elemente  $u, v \in \mathfrak{Q}$  die Ausdrücke

$$[u, v]_x = p(x)u'(x) - u'(x)v(x); \quad [u, v]_a = \lim_{x \rightarrow a} [u, v]_x$$

existieren, was man mit Hilfe der GREENSCHEN Formel beweist.

Definition: Mit  $\mathfrak{M}$  wird die Menge aller in  $a < x < b$  stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen  $\alpha(x)$  bezeichnet, für die der Grenzwert  $[\alpha, u]_a = \lim_{x \rightarrow a} [\alpha, u]_x$  für jedes  $u \in \mathfrak{Q}$  existiert.

<sup>3)</sup> Siehe z. B. K. KODAIRA [4], Theorem 4.3, S. 937.



Dann ist offenbar  $\Omega \subset \mathfrak{M}$ . Ferner gilt für vier beliebige Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathfrak{M}$  die Identität

$$(1.3) \quad [\alpha_1, \alpha_2]_x [\alpha_3, \alpha_4]_x - [\alpha_1, \alpha_3]_x [\alpha_2, \alpha_4]_x + [\alpha_1, \alpha_4]_x [\alpha_2, \alpha_3]_x = 0.$$

Daraus erkennt man, daß auch für zwei beliebige Funktionen  $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$  der Grenzwert  $[\alpha, \beta]_a = \lim_{x \rightarrow a} [\alpha, \beta]_x$  existiert. Denn da bei  $x = a$  der Grenzkreisfall vorliegt, gibt es zwei Funktionen  $u_0, v_0 \in \mathfrak{L}$ , für die  $[u_0, v_0]_a = 1$  ist. Daher folgt aus der Identität

$$[\alpha, \beta]_x [u_0, v_0]_x = [\alpha, u_0]_x [\beta, v_0]_x - [\alpha, v_0]_x [\beta, u_0]_x$$

die Existenz von  $[\alpha, \beta]_a$ .

Mit einer festgewählten Funktion  $\alpha \in \mathfrak{M}$ , für die  $[\bar{\alpha}, \alpha]_a = 0$  ist und für die  $[\alpha, u]_a$  nicht für alle  $u \in \mathfrak{L}$  verschwindet, lautet die Randbedingung

$$(1.4) \quad [\alpha, u]_a = 0,$$

die als Verallgemeinerung einer für eine reguläre Stelle  $x = a$  erklärten Randbedingung  $c_1 u(a) + c_2 p(a) u'(a) = 0$  mit reellen  $c_1, c_2$  anzusehen ist. (In der Arbeit von K. KODAIRA [4] wird in der Randbedingung nur  $\alpha \in \mathfrak{L}$  zugelassen. Man sieht aber leicht, daß (1.4) mit einer solchen Randbedingung äquivalent ist. Denn da  $[\alpha, u]_a$  nicht für alle  $u \in \mathfrak{L}$  verschwindet, gibt es ein  $\beta \in \mathfrak{M}$  mit  $[\alpha, \beta]_a = 1$ . Sind  $u_0, v_0$  wieder solche Funktionen aus  $\mathfrak{L}$ , für die  $[u_0, v_0]_a = 1$  ist, so kann man zwei Konstanten  $c_1, c_2$  so bestimmen, daß die Funktion  $w = c_1 u_0 + c_2 v_0 \in \mathfrak{L}$  den Bedingungen  $[w, \alpha]_a = 0, [w, \beta]_a = 1$  genügt. Dann folgt aber für jedes  $u \in \mathfrak{L}$  nach (1.3)

$$[w, u]_a = [w, u]_a [\alpha, \beta]_a = [w, \alpha]_a [u, \beta]_a - [w, \beta]_a [u, \alpha]_a = [\alpha, u]_a,$$

so daß die Randbedingung (1.4) wirklich mit  $[w, u]_a = 0$  ( $w \in \mathfrak{L}$ ) gleichwertig ist. Die allgemeinere Formulierung der Randbedingung mit  $\alpha \in \mathfrak{M}$  wird im folgenden Paragraphen (Satz 1) benötigt. Der Teilraum von  $\mathfrak{L}$ , dessen Elemente  $u$  dieser Randbedingung (1.4) genügen, werde mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet. Ist  $A$  die Einschränkung von  $L$  auf  $\mathfrak{M}$ , so ist  $A$  in  $\mathfrak{M}$  ein selbstadjungierter Operator. Dieser Operator  $A$  in  $\mathfrak{M}$  wird der folgenden Untersuchung zugrunde gelegt.

Für diesen Operator  $A$  berechnet man das Spektrum und die Spektralschar folgendermaßen. Da  $[\alpha, u]_a$  nicht für alle  $u \in \mathfrak{L}$  verschwindet, gibt es ein  $\beta \in \mathfrak{M}$ , für das  $[\alpha, \beta]_a = 1, [\beta, \bar{\beta}]_a = 0$  gilt. Zu den festgewählten Funktionen  $\alpha, \beta$  gibt es zwei Lösungen  $\varphi(x, \lambda), \vartheta(x, \lambda)$  von (1.1), die den Bedingungen

$$(1.5) \quad \begin{aligned} [\alpha, \varphi]_a &= 0, & [\alpha, \vartheta]_a &= 1 \\ [\beta, \varphi]_a &= -1, & [\beta, \vartheta]_a &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Ferner sind die Lösungen  $\varphi, \vartheta$  hierdurch eindeutig bestimmt. Dieses Fundamentalsystem besitzt folgende Eigenschaften:

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} a) & \varphi(x, \lambda), \varphi'(x, \lambda), \vartheta(x, \lambda), \vartheta'(x, \lambda) \text{ sind für jedes } x \text{ aus } a < x < b \text{ ganze Funktionen von } \lambda, \text{ die für reelle } \lambda \text{ reell sind.} \\ b) & [\varphi(x, \lambda_1), \varphi(x, \lambda_2)]_a = [\vartheta(x, \lambda_1), \vartheta(x, \lambda_2)]_a = 0, [\varphi(x, \lambda_1), \vartheta(x, \lambda_2)]_a = 1. \\ c) & [\alpha, \varphi]_a = 0^4. \end{aligned} \right.$$

<sup>4)</sup> Demnach ist das Fundamentalsystem  $\varphi, \vartheta$  in der Bezeichnung von K. KODAIRA [4], S. 934 normal.

Zum Beweis von a) beachte man, daß  $\varphi, \vartheta$  den singulären Integralgleichungen

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi(x, l) + (\lambda - l) \int_a^x H(x, y; l) \varphi(y, \lambda) k(y) dy$$

$$\vartheta(x, \lambda) = \vartheta(x, l) + (\lambda - l) \int_a^x H(x, y; l) \vartheta(y, \lambda) k(y) dy$$

mit  $H(x, y; l) = \varphi(x, l) \vartheta(y, l) - \varphi(y, l) \vartheta(x, l)$  genügen. Die Beziehungen b) beweist man z. B. mit Hilfe der Identität (1.3) aus (1.5), und c) folgt unmittelbar aus (1.5).

Da bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorausgesetzt war, gibt es für jedes nicht reelle  $\lambda$  genau eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) von der Form

$$(1.7) \quad \psi(x, \lambda) = \vartheta(x, \lambda) + m(\lambda) \varphi(x, \lambda),$$

für die das Integral  $\int_a^b |\psi(x, \lambda)|^2 k(x) dx$  für  $a < c < b$  existiert. Hierdurch wird die Funktion  $m(\lambda)$  in der unteren und oberen Halbebene definiert und erweist sich dort als eine reguläre Funktion von  $\lambda$ , für die  $-Im m(\lambda) \cdot Im \lambda > 0$  ist. Ferner existiert für alle reellen  $\lambda$  der Grenzwert

$$(1.8) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda -Im m(l + i\delta) dl = \varrho(\lambda).$$

Die so erklärte Funktion  $\varrho(\lambda)$  ist monoton nicht abnehmend und charakterisiert das Spektrum des Differentialoperators  $A$  vollständig. Die Unstetigkeitsstellen von  $\varrho(\lambda)$  sind die Eigenwerte von  $A$ , und die Menge der  $\lambda$ , an denen  $\varrho(\lambda)$  stark monoton ist, bildet das Spektrum von  $A$ .

Wird mit  $E(\lambda)$  die Spektralschar des selbstadjungierten Operators  $A$  bezeichnet, so gilt für jedes reelle Intervall  $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ , dessen Endpunkte  $\lambda_1, \lambda_2$  nicht Eigenwerte von  $A$  sind, die Gleichung

$$(1.9) \quad E(\Delta) f = (E(\lambda_2) - E(\lambda_1)) f = \int_a^b K(x, y; \Delta) f(y) k(y) dy$$

für jedes  $f \in \mathfrak{H}$ , wobei der Integralkern die Form

$$(1.10) \quad K(x, y; \Delta) = \int_\Delta \varphi(x, l) \varphi(y, l) d\varrho(l)$$

hat. Ist  $\mathfrak{H}'$  der Teilraum von  $\mathfrak{H}$  aller in  $a < x < b$  stetigen Funktionen  $f(x)$ , die in einer (individuellen) Umgebung von  $x = a$  und  $x = b$  verschwinden, so liegt  $\mathfrak{H}'$  dicht in  $\mathfrak{H}$ , und es gilt

$$(1.11) \quad (f, E(\Delta) g) = \int_a^b \int_a^b \overline{f(x)} \varphi(x, l) k(x) dx \int_a^b g(x) \varphi(x, l) k(x) dx d\varrho(l)$$

für  $f, g \in \mathfrak{H}'$ , wie man aus (1.9) durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge herleitet. Insbesondere folgt für  $f = g \in \mathfrak{H}'$

$$(1.12) \quad \int_a^b \left| \int_a^b f(x) \varphi(x, l) k(x) dx \right|^2 d\varrho(l) = \|E(\Delta) f\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Mit  $\mathfrak{G}$  werde der Hilbertraum aller in  $-\infty < \lambda < +\infty$   $\varrho$ -meßbaren<sup>5)</sup> Funktionen  $a(\lambda)$  bezeichnet, für die das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda)$  existiert;

<sup>5)</sup> Zur Definition  $\varrho$ -meßbarer Funktionen und zur Erklärung der Integrale, die als RADON-STIELTJESSCHE Integrale aufzufassen sind, siehe STONE [1], S. 205 ff.

als inneres Produkt wird der Ausdruck

$$(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{a(\lambda)} b(\lambda) d\varrho(\lambda) \quad \text{für } a, b \in \mathfrak{G}$$

erklärt. Durch die Gleichung

$$(1.13) \quad a(\lambda) = T f = \int_a^b f(x) \varphi(x, \lambda) k(x) dx \quad \text{für } f \in \mathfrak{H}$$

— die Konvergenz des Integrales ist in der Metrik von  $\mathfrak{G}$  gemeint — wird eine unitäre Transformation  $T$  definiert, die  $\mathfrak{H}$  auf  $\mathfrak{G}$  abbildet<sup>6)</sup>. Die Reziproke von  $T$  ist durch

$$f = T^{-1} a = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\varrho(\lambda) \quad \text{für } a \in \mathfrak{G}$$

gegeben, wobei die Konvergenz des Integrals in der Metrik von  $\mathfrak{H}$  verstanden wird. Durch  $T$  wird der Operator  $A$  auf „Hauptachsen“ transformiert, das heißt der Operator

$$(1.14) \quad B = T A T^{-1} \quad \text{in } \mathfrak{B} = T \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$$

hat die Form

$$(1.15) \quad B a = \lambda a(\lambda) \quad \text{für } a \in \mathfrak{B};$$

dabei ist  $\mathfrak{B}$  der in  $\mathfrak{G}$  dichte Teilraum, für dessen Elemente  $a(\lambda)$  das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |a(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda) \text{ existiert.}$$

## § 2. Randbedingung für die gestörte Differentialgleichung.

Die oben betrachtete Differentialgleichung (1.1) wird nun in Abhängigkeit von einem reellen Parameter  $\varepsilon$  untersucht. Alle oben definierten Funktionen, Operatoren und Räume werden von jetzt ab mit dem Index  $\varepsilon$  gekennzeichnet. Das Intervall  $(a, b)$  sowie die Funktionen  $p(x)$ ,  $k(x)$  seien jedoch von  $\varepsilon$  unabhängig, so daß der Hilbertsche Raum  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$  nicht von  $\varepsilon$  abhängt. Die Differentialgleichung (1.1) erhält dann die Form

$$(2.1) \quad -(p(x) u')' + q_\varepsilon(x) u = \lambda k(x) u \quad \text{in } a < x < b$$

mit

$$q_\varepsilon(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu q^{(\nu)}(x) \quad \text{für } |\varepsilon| < \varepsilon_0 \quad (\varepsilon \text{ stets reell});$$

die Konvergenz dieser Reihe sei für jedes abgeschlossene Teilintervall von  $a < x < b$  gleichmäßig, und die Funktionen  $q^{(\nu)}(x)$  in  $a < x < b$  stetig bis auf höchstens gewisse, für alle  $\nu$  gemeinsame, im Inneren des Intervalls  $(a, b)$  sich nicht häufende Unstetigkeitsstellen. Zu diesen allgemeinen Voraussetzungen, die im folgenden stets beibehalten werden, sollen in den nächsten Paragraphen weitere gefunden werden, die die Regularität von  $\varrho_\varepsilon(\lambda)$ ,  $E_\varepsilon(\lambda)$  sichern. Dabei wird ein beschränkter Operator  $C_\varepsilon$  in  $|\varepsilon| < k^{-1}$  regulär<sup>7)</sup> genannt, wenn es lineare beschränkte Operatoren  $C^{(\nu)}$  gibt, für die

$$C_\varepsilon = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu C^{(\nu)}; \quad \|C^{(\nu)} f\| \leq k^{\nu+1} \|f\|$$

für  $f \in \mathfrak{H}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  erfüllt ist.

<sup>6)</sup> KODAIRA [4] Theorem 4.2, S. 936.

<sup>7)</sup> RELICH [6], I. Mitt. S. 608.

Die Voraussetzung, daß in der Differentialgleichung (2.1) bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt, wird nur für  $\varepsilon = 0$  gefordert. Diese Voraussetzung wird stets beibehalten. Zunächst sollen die Störglieder  $q^{(1)}(x)$ ,  $q^{(2)}(x)$ , ... solchen Einschränkungen unterworfen werden, daß auch für hinreichend kleines  $\varepsilon$  in (2.1) bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt. Ferner soll in diesem Paragraphen eine für verschiedene  $\varepsilon$  gemeinsame Randbedingung bei  $x = a$  formuliert werden.

Wie in § 1 wählen wir für  $\alpha$ ,  $\beta$  zwei Funktionen aus  $\mathfrak{M}_0$  für die

$$(2.2) \quad [\alpha, \alpha]_a = [\beta, \beta]_a = 0, \quad [\alpha, \beta]_a = 1$$

gilt, und erklären  $\varphi_0(x, \lambda)$ ,  $\vartheta_0(x, \lambda)$  als das durch (1.5) festgelegte Fundamentalsystem von (2.1) für  $\varepsilon = 0$ . Die Randbedingung für  $\varepsilon = 0$  sei dann  $[\alpha, u]_a = 0$ . Die angekündigte Voraussetzung für die Funktionen  $q^{(1)}(x)$ ,  $q^{(2)}(x)$ , ... lautet dann, daß mit der Funktion

$$\Phi(x) = (|\varphi_0(x, l)|^2 + |\vartheta_0(x, l)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

für ein festes  $l$  die Ungleichungen

$$(2.3) \quad \int_a^b \Phi^2(x) \cdot |q^{(v)}(x)| dx \leq \gamma K^{v-1} \quad \text{für } v = 1, 2, \dots$$

gelten, wobei  $\gamma$ ,  $K$  positive Konstanten sind. Da bei  $x = a$  der Grenzkreisfall vorliegt, existiert übrigens das Integral

$$\int_a^c \Phi^2(x) k(x) dx \quad \text{für } a < c < b.$$

**Hilfssatz 1.** *Unter der Voraussetzung (2.3) existiert genau ein Lösungspaar  $\varphi_\varepsilon(x, \lambda)$ ,  $\vartheta_\varepsilon(x, \lambda)$  von (2.1) für alle  $\lambda$  und für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$ , für das*

$$(2.4) \quad \begin{aligned} [\alpha, \varphi_\varepsilon]_a &= 0, & [\alpha, \vartheta_\varepsilon]_a &= 1 \\ [\beta, \varphi_\varepsilon]_a &= -1, & [\beta, \vartheta_\varepsilon]_a &= 0 \end{aligned}$$

*gilt. Für  $\lambda = l$  sind die Funktionen  $\varphi_\varepsilon(x, \lambda)$ ,  $\vartheta_\varepsilon(x, \lambda)$  reguläre Funktionen in  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$ , und es gilt dort*

$$\varphi_\varepsilon(x, l) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \varphi^{(r)}(x, l); \quad \vartheta_\varepsilon(x, l) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \vartheta^{(r)}(x, l)$$

mit

$$|\varphi^{(r)}(x, l)| \leq (\gamma + K)^r \Phi(x); \quad |\vartheta^{(r)}(x, l)| \leq (\gamma + K)^r \Phi(x).$$

**Beweis.** Man kann  $\varphi_\varepsilon(x, l)$  als Lösung der Integralgleichung

$$(2.5) \quad \varphi_\varepsilon(x, l) = \varphi_0(x, l) - \int_a^x H(x, y; l) \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r q^{(r)}(y) \varphi_\varepsilon(y, l) dy$$

mit  $H(x, y; \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) \vartheta_0(y, \lambda) - \varphi_0(y, \lambda) \vartheta_0(x, \lambda)$  erhalten. Um diese Gleichung zu lösen, macht man den Ansatz

$$\varphi_\varepsilon(x, l) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \varphi^{(r)}(x, l)$$

und erhält für die  $\varphi^{(r)}(x, l)$  die Rekursionsformeln

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varphi^{(0)}(x, l) &= \varphi_0(x, l) \\ \varphi^{(v)}(x, l) &= - \sum_{\mu=0}^{v-1} \int_a^x H(x, y; l) q^{(v-\mu)}(y) \varphi^{(\mu)}(y, l) dy \quad (v = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion beweist man, daß die rechts stehenden Integrale existieren und daß die Abschätzung

$$(2.7) \quad \int_a^b \Phi(x) |q^{(\mu)}(x) \varphi^{(\nu)}(x, l)| dx \leq \gamma K^{\mu-1} (\gamma + K)^{\nu}$$

für  $\mu = 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, \dots$

gilt. Denn für  $\nu = 0$  ist wegen  $|\varphi^{(0)}(x, l)| \leq \Phi(x)$  diese Abschätzung nach Voraussetzung (2.3) richtig. Ist sie für die Indizes  $0, 1, \dots, \nu-1$  und alle  $\mu$  bewiesen, so folgt aus der Rekursionsformel (2.6) die Existenz von  $\varphi^{(\nu)}(x, l)$  und wegen  $|H(x, y; l)| \leq \Phi(x) \Phi(y)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_a^b \Phi(x) |q^{(\mu)}(x) \varphi^{(\nu)}(x, l)| dx \\ & \leq \int_a^b \Phi(x) |q^{(\mu)}(x) \sum_{n=0}^{\nu-1} \int_a^x H(x, y; l) q^{(\nu-n)}(y) \varphi^{(n)}(y, l) dy| dx \\ & \leq \int_a^b \Phi^2(x) |q^{(\mu)}(x)| \sum_{n=0}^{\nu-1} \left\{ \int_a^x \Phi(y) |q^{(\nu-n)}(y) \varphi^{(n)}(y, l)| dy \right\} dx \\ & \leq \gamma K^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} \gamma K^{\nu-n-1} (\gamma + K)^n < \gamma K^{\mu-1} (\gamma + K)^{\nu}, \end{aligned}$$

womit (2.7) bewiesen ist.

Daher kann man die  $\varphi^{(\nu)}(x, l)$  durch (2.6) rekursiv berechnen und erhält auf diese Weise für die  $\varphi^{(\nu)}(x, l)$  in  $a < x < b$  stetig differenzierbare Funktionen, für die nach (2.7)

$$|\varphi^{(\nu)}(x, l)| \leq \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \gamma K^{\nu-\mu-1} (\gamma + K)^{\mu} \Phi(x) \leq (\gamma + K)^{\nu} \Phi(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

gilt. Für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  konvergiert daher die Reihe

$$\varphi_{\varepsilon}(x, l) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \varphi^{(\nu)}(x, l)$$

und genügt der Abschätzung

$$(2.8) \quad |\varphi_{\varepsilon}(x, l)| \leq (1 - |\varepsilon|(\gamma + K))^{-1} \Phi(x).$$

Auf Grund der Konstruktion ist  $\varphi_{\varepsilon}(x, l)$  Lösung der Integralgleichung (2.5). Daraus folgt, daß  $\varphi_{\varepsilon}(x, l)$  der Differentialgleichung (2.1) und den Relationen  $[\alpha, \varphi_{\varepsilon}]_a = 0$ ,  $[\beta, \varphi_{\varepsilon}]_a = -1$  genügt. Entsprechend konstruiert man  $\vartheta_{\varepsilon}(x, l)$ .

Ähnlich erhält man  $\varphi_{\varepsilon}(x, \lambda)$  als Lösung der Integralgleichung

$$\varphi_{\varepsilon}(x, \lambda) = \varphi_{\varepsilon}(x, l) + (\lambda - l) \int_a^x H_{\varepsilon}(x, y; l) \varphi_{\varepsilon}(y, \lambda) k(y) dy$$

mit  $H_{\varepsilon}(x, y; l) = \varphi_{\varepsilon}(x, l) \vartheta_{\varepsilon}(y, l) - \varphi_{\varepsilon}(y, l) \vartheta_{\varepsilon}(x, l)$ . Beachtet man die Ungleichung (2.8), so kann man diese Integralgleichung durch Iteration oder Potenzreihenansatz nach  $\lambda - l$  lösen und erhält  $\varphi_{\varepsilon}(x, \lambda)$  als ganze Funktion von  $\lambda$ , wenn  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$ . Als Lösung dieser Integralgleichung genügt  $\varphi_{\varepsilon}(x, \lambda)$  wiederum der Differentialgleichung (2.1) und den Bedingungen (2.4). Entsprechend findet man  $\vartheta_{\varepsilon}(x, \lambda)$ . Da jede Lösung von (2.1) eine Linearkombination von  $\varphi_{\varepsilon}(x, \lambda)$  und  $\vartheta_{\varepsilon}(x, \lambda)$  ist, folgt unmittelbar, daß  $\varphi_{\varepsilon}(x, \lambda)$ ,  $\vartheta_{\varepsilon}(x, \lambda)$  das einzige Fundamentalsystem ist, das (2.4) genügt. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

**Hilfssatz 2.** *Unter der Voraussetzung (2.3) liegt in der Differentialgleichung (2.1) für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und für  $|\varepsilon| < \frac{1}{4}(\gamma + K)^{-1}$  bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vor (wenn für  $\varepsilon = 0$ , wie allgemein vorausgesetzt, bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt).*

**Beweis.** Aus (2.8) und der entsprechenden Abschätzung für  $\vartheta_\varepsilon(x, l)$  folgt

$$(2.9) \quad |\varphi_\varepsilon(x, l)|^2 + |\vartheta_\varepsilon(x, l)|^2 \leq 2(1 - |\varepsilon|(\gamma + K))^{-2} \Phi^2(x).$$

Daher existiert für  $a < c < b$  das Integral

$$\int_a^c (|\varphi_\varepsilon(x, l)|^2 + |\vartheta_\varepsilon(x, l)|^2) k(x) dx \quad \text{für } |\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1},$$

das heißt bei  $x = a$  liegt in (2.1) der Grenzkreisfall vor, wenn  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  ist.

Die zweite Behauptung des Hilfssatzes 2 läßt sich indirekt beweisen. Angenommen, es gäbe ein reelles  $\varepsilon$  in  $|\varepsilon| < \frac{1}{4}(\gamma + K)^{-1}$ , für das bei  $x = b$  der Grenzkreisfall vorläge, dann existierte für  $a < c < b$  das Integral

$$\int_c^b (|\varphi_\varepsilon(x, l)|^2 + |\vartheta_\varepsilon(x, l)|^2) k(x) dx.$$

Setzt man

$$\Phi_\varepsilon(x) = (|\varphi_\varepsilon(x, l)|^2 + |\vartheta_\varepsilon(x, l)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

so wird nach (2.9) für

$$\Phi_\varepsilon^2 \leq 2(1 - |\varepsilon|(\gamma + K))^{-2} \Phi^2 \leq 4 \Phi^2.$$

Aus der Voraussetzung (2.3) folgt daher

$$(2.10) \quad \int_a^b \Phi_\varepsilon^2(x) |q^{(v)}(x)| dx \leq 4 \gamma K^{v-1} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Indem man die Rollen von  $\varphi_0$  und  $\varphi_\varepsilon$  vertauscht, leitet man analog zu (2.5) die Integralgleichung

$$\varphi_0(x, l) = \varphi_\varepsilon(x, l) + \int_a^x H_\varepsilon(x, y; l) \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v q^{(v)}(y) \varphi_0(y, l) dy$$

mit  $H_\varepsilon(x, y; l) = \varphi_\varepsilon(x, l) \vartheta_\varepsilon(y, l) - \varphi_\varepsilon(y, l) \vartheta_\varepsilon(x, l)$  her. Genau so wie aus der Abschätzung (2.3) und der Integralgleichung (2.5) auf (2.9) geschlossen wurde, folgt aus (2.10) und der letzten Integralgleichung

$$\Phi^2(x) \leq \frac{2}{(1 - |\varepsilon|(4\gamma + K))^2} \Phi_\varepsilon^2(x) \leq \frac{2}{(1 - |\varepsilon|4(\gamma + K))^2} \Phi_\varepsilon^2(x).$$

Hieraus würde aus der obigen Annahme die Existenz des Integrals  $\int \Phi^2 k dx$  folgen, das heißt bei  $x = b$  läge für  $\varepsilon = 0$  der Grenzkreisfall vor. Dies ist ein Widerspruch, und damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Um schließlich für die Differentialgleichung (2.1) bei  $x = a$  eine von  $\varepsilon$  unabhängige Randbedingung angeben zu können, wird noch der folgende Hilfssatz benötigt:

**Hilfssatz 3.** *Sind  $u_0 \in \mathfrak{L}_0$ ,  $u_\varepsilon \in \mathfrak{L}_\varepsilon$ , so existiert für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u_0, u_\varepsilon]_\varepsilon = [u_0, u_\varepsilon]_0,$$

das heißt, es ist  $\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{M}_\varepsilon^0$ .

<sup>a)</sup>  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$  wurden in § 1 erklärt;  $\mathfrak{L}_\varepsilon, \mathfrak{M}_\varepsilon$  sind auf die von  $\varepsilon$  abhängige Differentialgleichung (2.1) bezogen.

**Beweis.** Ist  $u_\varepsilon \in \mathfrak{L}_\varepsilon$ , so ist nach Definition von  $\mathfrak{L}_\varepsilon$  die Funktion  $(L_\varepsilon - l) u_\varepsilon = g_\varepsilon$  aus  $\mathfrak{F}$ . Daher läßt sich  $u_\varepsilon$  in der Form

$$u_\varepsilon(x) = \int_a^x H_\varepsilon(x, y; l) g_\varepsilon(y) k(y) dy + c_1 \varphi_\varepsilon(x, l) + c_2 \theta_\varepsilon(x, l)$$

schreiben. Hieraus folgt

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \Phi_\varepsilon(x) \int_a^x \Phi_\varepsilon(y) |g_\varepsilon(y)| k(y) dy + (|c_1|^2 + |c_2|^2)^{\frac{1}{2}} \Phi_\varepsilon(x),$$

also wird nach (2.9) für  $a < x \leq c < b$

$$(2.11) \quad |u_\varepsilon(x)| \leq M_\varepsilon \Phi(x)$$

mit

$$M_\varepsilon = 2(1 - |\varepsilon|(\gamma + K))^{-2} \left( \int_a^c \Phi(y) |g_\varepsilon| k dy + (|c_1|^2 + |c_2|^2)^{\frac{1}{2}} \right);$$

das letzte Integral existiert, da bei  $x = a$  für  $\varepsilon = 0$  der Grenzkreisfall vorliegt. Mit Hilfe der GREENSchen Formel erhält man für  $a < x_1 < x_2 < b$

$$\begin{aligned} [u_0, u_\varepsilon]_{x_1} - [u_0, u_\varepsilon]_{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (u_0 L_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon L_\varepsilon u_0) k(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \{ (u_0 L_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon L_0 u_0) k(x) - u_\varepsilon u_0 \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v q^{(v)}(x) \} dx. \end{aligned}$$

Mit (2.11) und der SCHWARZschen Ungleichung folgt, daß man diesen Ausdruck beliebig klein machen kann, wenn nur  $x_1, x_2$  nahe genug bei  $a$  gewählt werden. Mithin existiert, wie behauptet, der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} [u_0, u_\varepsilon]_x = [u_0, u_\varepsilon]_a$ .

Der Parameter  $\varepsilon$  werde jetzt auf  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  beschränkt. Aus Hilfssatz 3 folgt auch die Existenz von  $\lim_{x \rightarrow a} [\alpha_\varepsilon, u_\varepsilon]_x = [\alpha_\varepsilon, u_\varepsilon]_a$  für  $\alpha_\varepsilon \in \mathfrak{M}_\varepsilon, u_\varepsilon \in \mathfrak{L}_0$ . Denn sind  $u_\varepsilon, v_\varepsilon$  zwei Funktionen aus  $\mathfrak{L}_\varepsilon$  mit  $[u_\varepsilon, v_\varepsilon]_a = 1$ , so wird nach (1.3)

$$[\alpha_\varepsilon, u_\varepsilon]_x [u_\varepsilon, v_\varepsilon]_x = [\alpha_\varepsilon, u_\varepsilon]_x [u_\varepsilon, v_\varepsilon]_x - [\alpha_\varepsilon, v_\varepsilon]_x [u_\varepsilon, u_\varepsilon]_x.$$

Die rechte Seite konvergiert nach Hilfssatz 3 für  $x \rightarrow a$ . Wegen  $[u_\varepsilon, v_\varepsilon]_a = 1$  folgt daraus die Existenz von  $[\alpha_\varepsilon, u_\varepsilon]_a$ . Da aber  $\mathfrak{M}_0$  die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen  $\alpha$  ist, für die  $[\alpha, u_\varepsilon]_a$  für alle  $u \in \mathfrak{L}_0$  existiert, folgt hieraus  $\mathfrak{M}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}_0$ . Ebenso beweist man  $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_\varepsilon$ , so daß damit folgender Satz bewiesen ist:

**Satz 1.** Gilt die Voraussetzung (2.3) für wenigstens ein  $l$ , so wird  $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_\varepsilon$  (vgl. Def. in § 1) für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$ .

Dieser Satz ermöglicht es, die für  $\varepsilon = 0$  geforderte Randbedingung

$$(2.12) \quad [\alpha, u]_a = 0$$

auch für die gestörte Differentialgleichung (2.1) für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  zu stellen. Man kann diese Randbedingung als von  $\varepsilon$  unabhängig bezeichnen. Im folgenden wird die Differentialgleichung (2.1) bei dieser Randbedingung für  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  betrachtet. Ferner wird mit  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  der zu dieser Randbedingung gehörige Differentialoperator und mit  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  sein Definitionsbereich bezeichnet.

Es sei noch angemerkt, daß das Fundamentalsystem  $\varphi_\varepsilon(x, \lambda), \theta_\varepsilon(x, \lambda)$  für festes  $\varepsilon$  in  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  die Eigenschaften (1.6) besitzt, da die Voraussetzung (1.5) gemäß der Konstruktion (Hilfssatz 1) für  $\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon$  erfüllt ist.

§ 3. Regularität der Funktion  $\varrho_\varepsilon(\Delta)$ .

Für die Differentialgleichung

$$(3.1) \quad -(p(x) u')' + \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v q^{(v)}(x) u = \lambda k(x) u \quad \text{in } a < x < b$$

wird jetzt stets vorausgesetzt, daß für  $\varepsilon = 0$  bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt. Für gewisse später noch festzulegende Werte von  $\lambda = l$  sei die Voraussetzung (2.3) erfüllt, so daß nach Hilfssatz 2 in (3.1) auch für  $|\varepsilon| < \frac{1}{2}(\gamma + K)^{-1}$  bei  $x = a$  der Grenzkreisfall und bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt. Die Randbedingung werde in der Form (2.12) gestellt.

Benutzt man in § 1 für  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\vartheta(x, \lambda)$  das durch Hilfssatz 1 eingeführte Fundamentalsystem  $\varphi_\varepsilon(x, \lambda)$ ,  $\vartheta_\varepsilon(x, \lambda)$ , so kann man die für das Spektrum der Differentialgleichung (3.1) charakteristische Funktion  $\varrho_\varepsilon(\lambda)$  gemäß (1.8) definieren. Ist  $\Delta$  ein abgeschlossenes Intervall der reellen  $\lambda$ -Achse mit den Endpunkten  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda_2$ ), so wird  $\varrho_\varepsilon(\Delta) = \varrho_\varepsilon(\lambda_2) - \varrho_\varepsilon(\lambda_1)$  gesetzt. Im folgenden Satz wird eine Bedingung dafür angegeben, daß der Ausdruck  $\varrho_\varepsilon(\Delta)$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär ist. Hierfür genügen keineswegs nur Einschränkungen für  $q^{(1)}(x)$ ,  $q^{(2)}(x), \dots$ , wie ein Beispiel am Ende dieses Paragraphen zeigt. Vielmehr muß auch die Differentialgleichung (3.1) für  $\varepsilon = 0$  und für  $\lambda \in \Delta$  gewisse Voraussetzungen erfüllen. Eine solche Voraussetzung wird im folgenden Satz angegeben. Für  $\lambda = l + i\delta$  mit reellen  $l$  und  $\delta$  wird mit  $\chi(x, \lambda)$  die Funktion

$$(3.2) \quad \chi(x, \lambda) = \vartheta_0(x, l) + m_0(\lambda) \varphi_0(x, l)$$

(vgl. (1.7)) bezeichnet. Danach ist  $\chi(x, \lambda)$  eine Lösung von (3.1) für  $\lambda = l$ ,  $\varepsilon = 0$ . Im folgenden wird stets  $\lambda = l + i\delta$  mit reellen  $l$  und  $\delta$  gesetzt.

Satz 2. Für die Differentialgleichung (3.1) gelte außer den genannten Voraussetzungen:

a) Für ein abgeschlossenes Intervall  $\Delta$  der reellen  $\lambda$ -Achse sei

$$\int_a^b \Phi^2(x, l) |q^{(v)}(x)| dx \leq \gamma K^{v-1} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

für alle  $l \in \Delta$ , mit  $\Phi(x, l) = (\varphi_0^2(x, l) + \vartheta_0^2(x, l))^{\frac{1}{2}}$ .

b) Mit zwei Konstanten  $C \geq 1$ ,  $\delta_0 > 0$  und der durch (3.2) erklärten Funktion  $\chi(x, \lambda)$  gelte

$$|\chi(x, l + i\delta)| \leq C \Phi(x, l) \quad \text{für } l \in \Delta, \quad 0 < \delta < \delta_0, \quad a < x < b.$$

Dann gibt es eine Funktion

$$r_\varepsilon(l) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v r^{(v)}(l) \quad \text{für } |\varepsilon| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(C+1)^{-1}(\gamma+K)^{-1}, \quad l \in \Delta,$$

wobei die  $r^{(v)}(l)$  in  $\Delta$   $\varrho_0$ -meßbare Funktionen von  $l$  mit  $|r^{(v)}(l)| \leq \varepsilon_1^{-v}$  sind, von der Art, daß

$$\varrho_\varepsilon(\Delta') = \int_{\Delta'} r_\varepsilon(l) d\varrho_0(l) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \int_{\Delta'} r^{(v)}(l) d\varrho_0(l) \quad (r^{(0)}(l) = 1)$$

für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta' \subset \Delta$  erfüllt ist.

Bemerkung: Allgemeiner gilt: Sind die Voraussetzungen von Satz 2 statt für  $\Delta$  für eine  $\varrho_0$ -meßbare Menge  $M$  erfüllt, so gibt es in  $M$   $\varrho_0$ -meßbare



Funktionen  $r^{(\nu)}(l)$  mit  $|r^{(\nu)}(l)| \leq \varepsilon_1^{-\nu}$ , so daß mit

$$r_\varepsilon(l) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu r^{(\nu)}(l) \quad (l \in M, |\varepsilon| < \varepsilon_1)$$

für jede in  $M$   $\varrho_0$ -meßbare Funktion  $a(l)$

$$\int_M a(l) d\varrho_\varepsilon(l) = \int_M a(l) r_\varepsilon(l) d\varrho_0(l)$$

gilt.

Beweis. Zum Beweis wird die approximierende Hilfsdifferentialgleichung

$$(3.3) \quad -(p(x) u')' + \overset{\circ}{q}_\varepsilon(x) u = \lambda k(x) u \quad \text{in } a < x < b$$

mit

$$(3.4) \quad \overset{\circ}{q}_\varepsilon(x) = \begin{cases} q_\varepsilon(x) & \text{für } a < x \leq \overset{\circ}{x} \\ q_0(x) & \text{für } \overset{\circ}{x} < x < b \end{cases}$$

eingeführt, wobei  $\overset{\circ}{x}$  ein Parameter in  $a < \overset{\circ}{x} < b$  ist. Bei  $x = a$  werde wieder die Randbedingung (2.12) gestellt. Alle zu dieser Differentialgleichung (3.3) gemäß den Definitionen aus § 1 gehörigen Funktionen sollen außer durch den Index  $\varepsilon$  durch eine übergesetzte 0 gekennzeichnet werden. Insbesondere sind unter  $\overset{\circ}{\varphi}_\varepsilon, \overset{\circ}{\vartheta}_\varepsilon$  die Lösungen von (3.3) zu verstehen, die durch die Anfangsbedingungen (2.4) festgelegt sind. Daher gilt wegen (3.4)  $\overset{\circ}{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon, \overset{\circ}{\vartheta}_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon$  für  $a < x \leq \overset{\circ}{x}$ . Der Beweis des Satzes 2 wird zunächst für diese Differentialgleichung (3.3) durchgeführt und dann der Grenzübergang  $\overset{\circ}{x} \rightarrow b$  vorgenommen.

Zunächst wird  $\overset{\circ}{\varrho}_\varepsilon(\lambda)$  berechnet. Da die Differentialgleichung (3.3) in  $\overset{\circ}{x} < x < b$  mit der ungestörten Differentialgleichung identisch ist, liegt für beide bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vor. Daher sind die durch (1.7) definierten Funktionen  $\overset{\circ}{\psi}_\varepsilon(x, \lambda), \overset{\circ}{\psi}_0(x, \lambda)$  für  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  in  $\overset{\circ}{x} < x < b$  linear abhängig, so daß  $[\overset{\circ}{\psi}_\varepsilon, \overset{\circ}{\psi}_0]_x = 0$  gilt. Nach (1.7) folgt hieraus

$$\overset{\circ}{m}_\varepsilon(\lambda) = - \frac{[\overset{\circ}{\vartheta}_\varepsilon, \overset{\circ}{\psi}_0]_x}{[\overset{\circ}{\varphi}_\varepsilon, \overset{\circ}{\psi}_0]_x} = - \frac{[\overset{\circ}{\vartheta}_\varepsilon, \overset{\circ}{\psi}_0]_x}{[\varphi_\varepsilon, \psi_0]_x}.$$

Der Ausdruck, der aus dem letzten dadurch entsteht, daß man  $\psi_0$  durch  $\varphi_\varepsilon(x, \lambda)$  durch  $\varphi_\varepsilon(x, l)$  und  $\vartheta_\varepsilon(x, \lambda)$  durch  $\vartheta_\varepsilon(x, l)$  ersetzt, werde mit

$$(3.5) \quad \overset{\circ}{n}_\varepsilon(\lambda) = - \frac{[\vartheta_\varepsilon(x, l), \chi(x, \lambda)]_x}{[\varphi_\varepsilon(x, l), \chi(x, \lambda)]_x}$$

bezeichnet. Der Nenner dieses Bruches verschwindet nicht, wenn  $l \in \Delta$ ,  $0 < \delta < \delta_0$ ,  $|\varepsilon| < (C+1)^{-1}(\gamma+K)^{-1}$  ist. Denn da  $\chi(x, \lambda)$  Lösung der ungestörten Differentialgleichung ist, folgt

$$[\varphi_\varepsilon(x, l), \chi(x, \lambda)]_x - 1 = - \int_a^{\overset{\circ}{x}} \varphi_\varepsilon(x, l) \chi(x, \lambda) \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu q^{(\nu)}(x) dx = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \overset{\circ}{a}^{(\nu)}$$

mit

$$\overset{\circ}{a}^{(\nu)} = - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \int_a^{\overset{\circ}{x}} \varphi^{(\mu)}(x, l) \chi(x, \lambda) q^{(\nu-\mu)}(x) dx.$$

Nach Hilfssatz 1 und Voraussetzung b) wird

$$|\hat{a}^{(r)}| \leq \sum_{\mu=0}^{r-1} (\gamma + K)^{\mu} C \int_a^b \Phi^{\mu}(x) |q^{(r-\mu)}(x)| dx \leq C(\gamma + K)^r.$$

Daher ist für  $|\varepsilon| < (C+1)^{-1}(\gamma + K)^{-1}$

$$|[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x - 1| \leq \sum_{r=1}^{\infty} |\varepsilon|^r C(\gamma + K)^r < 1,$$

also  $[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x \neq 0$ . Ferner erkennt man, daß  $\lim_{x \rightarrow b} \hat{a}^{(r)} = a^{(r)}$  existiert, so daß nach einem Satz von VITALI auch

$$(3.6) \quad \lim_{x \rightarrow b} [\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x^0 = [\varphi_{\varepsilon}, \chi]_b = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r a^{(r)}$$

existiert und eine reguläre Funktion in  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  ist; außerdem gilt  $|a^{(r)}| \leq C(\gamma + K)^r$ .

Da  $\varphi_{\varepsilon}$ ,  $\varphi'_{\varepsilon}$ ,  $\vartheta_{\varepsilon}$ ,  $\vartheta'_{\varepsilon}$  reguläre Funktionen von  $\lambda$  sind, wird für festes  $\varepsilon$ ,  $\hat{x}$

$$\hat{m}_{\varepsilon}(\lambda) - \hat{n}_{\varepsilon}(\lambda) = 0(\delta),$$

so daß nach (1.8) für jedes Intervall  $\Delta' \subset \Delta$

$$\hat{\varrho}_{\varepsilon}(\Delta') = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta'} -Im \hat{n}_{\varepsilon}(l + i\delta) dl$$

wird. Gemäß (3.5) berechnet man mit Hilfe der Identität (1.3):

$$-Im \hat{n}_{\varepsilon}(\lambda) = -\frac{1}{2i} (\hat{n}_{\varepsilon} - \bar{\hat{n}}_{\varepsilon}) =$$

$$\frac{1}{2i} \frac{[\varphi_{\varepsilon}, \bar{\chi}]_x^0 [\vartheta_{\varepsilon}, \chi]_x^0 - [\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x^0 [\vartheta_{\varepsilon}, \bar{\chi}]_x^0}{|[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x^0|^2} = -\frac{1}{2i} \frac{[\varphi_{\varepsilon}, \vartheta_{\varepsilon}]_x^0 [\chi, \bar{\chi}]_x^0}{|[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x^0|^2}.$$

Dabei ist  $\chi = \chi(x, \lambda)$  und  $\varphi_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}(x, l)$ ,  $\vartheta_{\varepsilon} = \vartheta_{\varepsilon}(x, l)$  zu setzen. Da aber  $\varphi_{\varepsilon}(x, l)$ ,  $\vartheta_{\varepsilon}(x, l)$  reell sind, erhält man

$$-Im \hat{n}_{\varepsilon}(\lambda) = \frac{-Im m_0(\lambda)}{|[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x^0|^2},$$

so daß für  $|\varepsilon| < (C+1)^{-1}(\gamma + K)^{-1}$

$$(3.7) \quad \hat{\varrho}_{\varepsilon}(\Delta') = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta'} \frac{-Im m_0(l + i\delta) dl}{|[\varphi_{\varepsilon}(x, l), \chi(x, l + i\delta)]_x^0|^2}$$

wird.

Jetzt wird der Grenzübergang  $\hat{x} \rightarrow b$  durchgeführt. Nach (3.6) existiert der Grenzwert  $[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_b$  und liefert eine in  $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$  reguläre Funktion. Aus der Abschätzung der Koeffizienten  $a^{(r)}$  folgt

$$(3.8) \quad |[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_b|^{-2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r b^{(r)}(\lambda) \quad \text{für } |\varepsilon| < \varepsilon_1$$

und

$$|b^{(r)}(\lambda)| \leq (2(C+1)(\gamma + K))^r = \varepsilon_1^{-r},$$

wobei  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(C+1)^{-1}(\gamma + K)^{-1}$  gesetzt ist. Die Konvergenz von  $[\varphi_{\varepsilon}, \chi]_x^0 \rightarrow [\varphi_{\varepsilon}, \chi]_b$  ist offenbar gleichmäßig in  $0 < \delta < \delta_0$ , da dieser Ausdruck  $\delta$  nur in  $m_0(l + i\delta)$  enthält und  $m_0(l + i\delta)$  sich nach Voraussetzung b) für  $l \in \Delta'$ ,  $0 < \delta < \delta_0$  als beschränkt erweist. Setzt man also vorübergehend für

ein festes  $\varepsilon$  in  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$

$$J(\tilde{x}, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_{A'} \frac{-Im m_0(l+i\delta) dl}{|[\varphi, \chi]_0|^2},$$

so konvergiert  $J(\tilde{x}, \delta) \rightarrow J(b, \delta)$  für  $\tilde{x} \rightarrow b$  gleichmäßig in  $0 < \delta < \delta_0$ . Andererseits wird nach (3.7)  $\lim_{\delta \rightarrow +0} J(\tilde{x}, \delta) = \tilde{\varrho}_\varepsilon(A')$  für  $a < \tilde{x} < b$ . Hieraus folgt, daß auch  $J(b, \delta)$  für  $\delta \rightarrow +0$  und  $\tilde{\varrho}_\varepsilon(A')$  für  $\tilde{x} \rightarrow b$  konvergieren, und zwar gegen denselben Grenzwert, den wir  $\tilde{\varrho}_\varepsilon(A')$  nennen:

$$(3.9) \quad \tilde{\varrho}_\varepsilon(A') = \lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \tilde{x} \rightarrow b}} \tilde{\varrho}_\varepsilon(A') = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{A'} \frac{-Im m_0(l+i\delta) dl}{|[\varphi, \chi]_0|^2}.$$

In der Entwicklung (3.8) sind die  $b^{(v)}(l+i\delta)$  als Grenzfunktionen stetiger Funktionen sicher  $\varrho_0$ -meßbar in Abhängigkeit von  $l$ , und daher wird für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_\varepsilon(A') &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{A'} -Im m_0(l+i\delta) \left(1 + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v b^{(v)}\right) dl \\ &= \varrho_0(A') + \lim_{\delta \rightarrow +0} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \frac{1}{\pi} \int_{A'} -Im m_0(l+i\delta) b^{(v)}(l+i\delta) dl. \end{aligned}$$

Nach einem Satz von VITALI folgt die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{A'} -Im m_0(l+i\delta) b^{(v)}(l+i\delta) dl = \varrho^{(v)}(A') \quad (v = 1, 2, \dots)$$

und die Gleichung

$$\tilde{\varrho}_\varepsilon(A') = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \varrho^{(v)}(A') \quad \text{mit} \quad \varrho^{(0)}(A') = \varrho_0(A').$$

Aus der Abschätzung  $|b^{(v)}(l+i\delta)| \leq \varepsilon_1^{-v}$  und wegen  $Im m_0(l+i\delta) > 0$  folgt

$$|\varrho^{(v)}(A')| \leq \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{A'} -Im m_0(l+i\delta) dl \varepsilon_1^{-v} = \varepsilon_1^{-v} \varrho_0(A').$$

Diese Abschätzung gilt für alle  $A' \subset A$ . Aus der Tatsache folgt<sup>9)</sup> die Existenz von in  $A$   $\varrho_0$ -meßbaren Funktionen  $r^{(v)}(l)$ , für die

$$\varrho^{(v)}(A') = \int_{A'} r^{(v)}(l) d\varrho_0(l), \quad |r^{(v)}(l)| \leq \varepsilon_1^{-v}$$

gilt. Daher wird für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$

$$\tilde{\varrho}_\varepsilon(A') = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \int_{A'} r^{(v)}(l) d\varrho_0(l).$$

Ferner ist

$$r_\varepsilon(l) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v r^{(v)}(l) \quad (|\varepsilon| < \varepsilon_1, l \in A)$$

als Grenzfunktion von  $\varrho_0$ -meßbaren Funktionen ebenfalls in  $A$   $\varrho_0$ -meßbar, und es wird

$$\tilde{\varrho}_\varepsilon(A') = \int_{A'} r_\varepsilon(l) d\varrho_0(l).$$

Satz 2 wird also bewiesen sein, sobald  $\tilde{\varrho}_\varepsilon(A') = \varrho_\varepsilon(A')$  nachgewiesen ist, wobei  $\tilde{\varrho}_\varepsilon(A')$  durch (3.9) erklärt ist. Der Beweis dieser Gleichung ist enthalten in

<sup>9)</sup> STONE [1], Lemma 6.5, S. 215.

Hilfssatz 4. Gegeben sei eine Folge von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -(p(x)u')' + q_n(x)u &= \lambda k(x)u & \text{in } a < x < b, & \quad n = 1, 2, \dots, \\ -(p(x)u')' + q(x)u &= \lambda k(x)u & \text{in } a < x < b. \end{aligned}$$

Für die letzte Differentialgleichung liege bei  $x = b$  der Grenzpunktfall und bei  $x = a$  der Grenzkreisfall vor. Für eine gegen  $b$  konvergierende Folge  $x_n$  aus  $a < x_n < b$  sei

$$q_n(x) = q(x) \quad \text{für } a < x \leq x_n.$$

Bezeichnet man mit  $\varrho_n(\lambda)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bzw.  $\varrho(\lambda)$  die durch (1.8) erklärte Belegungsfunktionen dieser Differentialgleichungen (bezogen auf ein Fundamentalsystem mit denselben Anfangsbedingungen (1.5)), so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(\lambda) = \varrho(\lambda)$$

für jede Stetigkeitsstelle  $\lambda$  von  $\varrho(\lambda)$ .

Beweis. Der Beweis verwendet eine Schlußweise, die N. LEVINSON [5] zu einem anderen Zwecke benutzte. Die in § 1 erklärten Funktionen  $\varrho(\lambda)$  und  $m(\lambda)$  sind durch die Formel

$$\frac{-Im\,m(\lambda)}{Im\,\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(l)}{|l-\lambda|^2} \quad \text{für } Im\,\lambda \neq 0$$

verknüpft, wie in der Spektraltheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bewiesen wird<sup>10)</sup>. Mit  $\varrho_n(\lambda)$ ,  $m_n(\lambda)$  werden die entsprechenden, zu der Folge von Differentialgleichungen gehörigen Funktionen bezeichnet, so daß

$$\frac{-Im\,m_n(\lambda)}{Im\,\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_n(l)}{|l-\lambda|^2} \quad \text{für } Im\,\lambda \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

gilt. Aus der Voraussetzung  $q_n(x) \equiv q(x)$  für  $a < x \leq x_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  schließt man mit Hilfe der von H. WEYL entwickelten Konstruktion des Grenzpunktes mit ineinandergeschachtelten Kreisen<sup>11)</sup> auf

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\lambda) = m(\lambda) \quad \text{für } Im\,\lambda \neq 0.$$

Inbesondere ist also

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_n(l)}{l^2 + 1} = -Im\,m_n(i)$$

für alle  $n$  beschränkt. Nach dem HELLYschen Auswahlssatz<sup>12)</sup> gibt es eine Teilfolge  $\varrho_{n_v}(l)$ , die gegen eine monoton nicht abnehmende Funktion  $\varrho^*(l)$  in allen Stetigkeitsstellen von  $\varrho^*(l)$  konvergiert. Der Beweis wird nun indirekt geführt;  $l_0$  werde als Stetigkeitsstelle von  $\varrho(l)$  angenommen, für die  $\varrho_n(l_0)$  nicht gegen  $\varrho(l_0)$  konvergiert. Dann kann man die Auswahl der Teilfolge  $\varrho_{n_v}(l)$  so treffen, daß  $\varrho_{n_v}(l_0) \rightarrow c \neq \varrho(l_0)$  für  $v \rightarrow \infty$  gilt. Unter Ausnutzung

<sup>10)</sup> Vgl. z. B. KODAIRA [4], S. 931.

<sup>11)</sup> H. WEYL [2], Satz 1, S. 226.

<sup>12)</sup> Für die HELLYschen Sätze vgl. A. WINTNER [10].

des HELLYschen Konvergenzsatzes erhält man

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \varrho_{n_\nu}(l)}{|l - \lambda|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \varrho^*(l)}{|l - \lambda|^2} \quad (Im \lambda \neq 0),$$

also mit (3.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \sigma(l)}{|l - \lambda|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \sigma^*(l)}{|l - \lambda|^2} \quad (Im \lambda \neq 0).$$

Aus dieser Gleichung folgt mit der STIELTJESSchen Umkehrformel, daß die Stetigkeitsstellen von  $\varrho(l)$  und  $\varrho^*(l)$  übereinstimmen und, daß wegen  $\varrho(+0) + \varrho(-0) = \varrho^*(+0) + \varrho^*(-0)$  die Gleichung  $\varrho(l) = \varrho^*(l)$  für alle Stetigkeitsstellen von  $\varrho(l)$  gilt. Insbesondere ist also auch  $l_0$  Stetigkeitsstelle von  $\varrho^*(l)$  und daher  $\varrho(l_0) = \varrho^*(l_0) = c$ , was der Annahme widerspricht, w. z. b. w.

Mit diesem Hilfssatz ist der Beweis von Satz 2 vollständig erbracht. Man beachte übrigens, daß nach Hilfssatz 2 in der Differentialgleichung (3.1) für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(C+1)^{-1}(\gamma+K)^{-1} \leq \frac{1}{2}(\gamma+K)^{-1}$  bei  $x = b$  der Grenzpunktfall vorliegt; diese Tatsache wird beim Beweis der Gleichung  $\tilde{\varrho}_\varepsilon(\lambda') = \varrho_\varepsilon(\lambda')$  mit Hilfssatz 4 benutzt. Der Beweis der Bemerkung zu Satz 2 verläuft analog, wenn man statt (3.9) die Gleichung

$$\int_M a(l) d\varrho_\varepsilon(l) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_M a(l) \frac{-Im m_\varepsilon(l+i\delta) dl}{[\varphi_\varepsilon(x, l), \chi(x, l+i\delta)]_0^2}$$

verwendet.

Die Voraussetzung b) in Satz 2 bedeutet eine einschränkende Bedingung für die ungestörte Differentialgleichung. Um zu zeigen, daß eine solche Bedingung im allgemeinen nicht entbehrlich ist, werde die einfache Differentialgleichung

$$-u'' + \varepsilon q^{(1)}(x) u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $u'(0) = 0$  untersucht, wobei

$$q^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{in } 1 < x < \infty \end{cases}$$

ist. Demnach ist hier das asymptotische Verhalten der Störung sehr einfach. Trotzdem wird  $\varrho_\varepsilon(\lambda)$  für  $\lambda < 0$  eine nicht reguläre Funktion von  $\varepsilon$ , wie jetzt gezeigt werden soll. Wählt man für die in (2.2) eingeführten Funktionen  $\alpha(x) = 1$ ,  $\beta(x) = x$ , so wird

$$\varphi_0(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x, \quad \vartheta_0(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$m(\lambda) = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}, \quad \chi(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{-\lambda}},$$

wobei die Wurzel  $\sqrt{-\lambda}$  in der längs der positiven Achse aufgeschnittenen  $\lambda$ -Ebene so gewählt ist, daß sie für  $\lambda < 0$  positiv ist. Also ist die Voraussetzung b) des Satzes 2 für jedes Intervall  $\Delta$ , das  $\lambda = 0$  enthält, verletzt. Das Spektrum dieser Differentialgleichung ist für  $\varepsilon \geq 0$  rein kontinuierlich und erfüllt die positive  $\lambda$ -Achse. Für  $\varepsilon < 0$  hat die Differentialgleichung aber mindestens einen Eigenwert  $\lambda_\varepsilon$  in  $\varepsilon \leq \lambda_\varepsilon < 0$ , wenn  $\varepsilon$  hinreichend klein ist. Dieser Eigenwert berechnet sich aus der Gleichung

$$\sqrt{\lambda - \varepsilon} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda - \varepsilon} = \sqrt{-\lambda} > 0.$$

Da  $\lambda_\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow -0$  gegen 0 strebt, wird für jedes negative  $\lambda$

$$\varrho_\varepsilon(0) - \varrho_\varepsilon(\lambda) = -\varrho_\varepsilon(\lambda) \begin{cases} = 0 & \text{für } \varepsilon \geq 0 \\ > 0 & \text{für } \varepsilon_0 < \varepsilon < 0 \end{cases}$$

mit einer geeigneten negativen Zahl  $\varepsilon_0$ . Folglich ist  $\varrho_\varepsilon(\lambda)$  für  $\lambda < 0$  sicher keine reguläre Funktion von  $\varepsilon$ .

#### § 4. Regularität der Spektralschar $E_\varepsilon(\Delta)$ .

Aus der Regularität der Funktion  $\varrho_\varepsilon(\Delta)$  kann man im allgemeinen nicht auf die Regularität der Spektralschar  $E_\varepsilon(\Delta)$  schließen. Beim Beweis der Regularität der Spektralschar:  $E_\varepsilon(\Delta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu E^{(\nu)}(\Delta)$  liegt die Schwierigkeit darin, die Operatoren  $E^{(\nu)}(\Delta)$  als beschränkt nachzuweisen und Schranken für sie anzugeben. Ein solcher Beweis läßt sich unter Voraussetzungen führen, die nicht wesentlich schärfer als die von Satz 2 sind, wie Satz 3 zeigen wird. Zur Erleichterung seines Beweises sollen vorher einige vorbereitende Bemerkungen gemacht werden.

Ersetzt man für die Differentialgleichung (3.1) für  $\varepsilon = 0$  die frühere Randbedingung  $[\alpha, u]_a = 0$  durch die neue

$$[\beta, u]_a = 0,$$

wobei  $\beta$  die in (2.2) festgewählte Funktion aus  $\mathfrak{M}_0$  ist, so erhält man ein neues Eigenwertproblem. Alle auf dieses neue Eigenwertproblem bezogenen Funktionen werden vorübergehend mit einer Tilde versehen und  $\tilde{\alpha} = \beta$ ,  $\tilde{\beta} = -\alpha$  gesetzt. Dann sind für  $\tilde{\varphi}_0 = \vartheta_0$ ,  $\tilde{\vartheta}_0 = -\varphi_0$  die (2.4) entsprechenden Anfangsbedingungen erfüllt. Daher wird nach Definition von  $m_0(\lambda)$ ,  $\tilde{m}_0(\lambda)$  [vgl. (1.7)]:

$$(4.1) \quad \tilde{m}_0(\lambda) = -\frac{1}{m_0(\lambda)} \quad \text{für } \operatorname{Im} \lambda \neq 0$$

und

$$\tilde{\varrho}_0(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \frac{-\operatorname{Im} m_0(l + i\delta) dl}{|m_0(l + i\delta)|^2} \quad \text{für reelle } \lambda.$$

Aus der Beziehung (1.12) wird

$$(4.2) \quad \int_a^b \left| \int_a^b f(x) \vartheta_0(x, \lambda) k(x) dx \right|^2 d\tilde{\varrho}_0(\lambda) \leq \int_a^b |f(x)|^2 k(x) dx = \|f\|^2$$

für jedes  $f \in \mathfrak{H}'$ ; dabei ist  $\mathfrak{H}'$  wieder der in § dichte Teilraum aller in  $a < x < b$  stetigen Funktionen, die in (individuellen) Umgebungen von  $x = a$  und  $x = b$  verschwinden. Die Beziehungen (4.1), (4.2) werden im folgenden Hilfssatz benutzt, und nur zur Herleitung dieser beiden Beziehungen wurde die Differentialgleichung bei der Randbedingung  $[\beta, u]_a = 0$  betrachtet. Von jetzt ab werden für die Differentialgleichung (3.1) die Randbedingung  $[\alpha, u]_a = 0$  und die am Anfang von § 3 genannten allgemeinen Voraussetzungen gefordert.

Hilfssatz 5.  $\Phi(x)$  sei eine in  $a < x < b$  stetige positive Funktion, für die

$$\varphi_\alpha^2(x, l) + \vartheta_\alpha^2(x, l) \leq \Phi^2(x) \quad \text{für } l \in \Delta, a < x < b$$

gilt ( $\Phi(x)$  hängt nicht von  $l$  ab); ferner seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

$$a) \quad \int_a^b \Phi^2(x) |q^{(\nu)}(x)| dx \leq \gamma K^{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

b) Mit zwei Konstanten  $C \geq 1$ ,  $\delta_0 > 0$  sei

$$|\chi(x, l + i\delta)| \leq C \Phi(x) \quad \text{für } l \in \Delta, 0 < \delta < \delta_0, a < x < b.$$

Dann gilt für jedes  $f \in \mathfrak{H}'$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_a^b \left| \int_a^b f(x) \varphi^{(v)}(x, l) k(x) dx \right|^2 d\rho_0(l) \leq (C+2)^2 (\gamma + K)^{2v} \|f\|^2,$$

wobei  $\varphi^{(v)}(x, l)$ , wie in Hilfssatz 1, die Entwicklungskoeffizienten von  $\varphi_v(x, l)$  bedeuten.

Beweis. Für  $v = 0$  folgt die Behauptung aus (1.12). Für  $v = 1, 2, \dots$  folgt aus den Rekursionsformeln (2.6) für  $f \in \mathfrak{H}'$

$$(4.3) \quad \int_a^b f \varphi^{(v)} k dx = - \sum_{\mu=0}^{v-1} \int_a^b f(x) \varphi_0(x, l) \int_a^x \vartheta_0(y, l) q^{(v-\mu)}(y) \varphi^{(\mu)}(y, l) dy k(x) dx \\ + \sum_{\mu=0}^{v-1} \int_a^b f(x) \vartheta_0(x, l) \int_a^x \varphi_0(y, l) q^{(v-\mu)}(y) \varphi^{(\mu)}(y, l) dy k(x) dx.$$

Die Glieder der beiden Summen auf der rechten Seite dieser Gleichung werden einzeln abgeschätzt, und zwar zunächst die Summanden der ersten Summe. Der Integrand der inneren Integration werde durch

$$\eta(x, l) = \vartheta_0(x, l) q^{(v-\mu)}(x) \varphi^{(\mu)}(x, l)$$

abgekürzt. Nach Hilfssatz 1 gilt dann die Abschätzung

$$|\eta(x, l)| \leq (\gamma + K)^\mu |q^{(v-\mu)}(x)| \Phi^2(x) = \eta(x) \quad \text{für } l \in \Delta.$$

Die Funktion  $\eta(x)$  werde durch diese Zeile definiert. Nach Voraussetzung a) wird

$$(4.4) \quad \int_a^b \eta(x) dx \leq (\gamma + K)^\mu \gamma K^{v-\mu-1}.$$

Durch partielle Integration erhält man für das allgemeine Glied der ersten Summe

$$\int_a^b f(x) \varphi_0(x, l) \int_a^x \eta(y, l) dy k(x) dx = \int_a^b \int_a^b f(y) \varphi_0(y, l) k dy \eta(x, l) dx.$$

Dieser Ausdruck wird mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung abgeschätzt:

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi_0(x, l) \int_a^x \eta(y, l) dy k(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b \left| \int_a^b f \varphi_0 k dy \right|^2 \eta(x) dx \cdot \int_a^b \eta(x) dx.$$

Integriert man diese Ungleichung bezüglich der Belegungsfunktion  $\rho_0(l)$  über das Intervall  $\Delta$ , so erhält man mit Benutzung der Abschätzung (1.12) und (4.4) für  $l \in \Delta$

$$(4.5) \quad \int_a^b \left| \int_a^b f(x) \varphi_0(x, l) \int_a^x \vartheta_0(y, l) q^{(v-\mu)}(y) \varphi^{(\mu)}(y, l) dy k dx \right|^2 d\rho_0(l) \\ \leq \int_a^b \int_a^b \left| \int_a^b f \varphi_0 k dy \right|^2 \eta(x) dx d\rho_0(l) \cdot \int_a^b \eta(x) dx \\ = \int_a^b \int_a^b \left| \int_a^b f \varphi_0 k dy \right|^2 d\rho_0(l) \eta(x) dx \cdot \int_a^b \eta(x) dx \\ \leq \int_a^b \int_a^b |f(y)|^2 k(y) dy \eta(x) dx \cdot \int_a^b \eta(x) dx \\ \leq \left( \int_a^b \eta(x) dx \right)^2 \cdot \|f\|^2 \leq (\gamma + K)^{2\mu} \gamma^2 K^{2(v-\mu-1)} \|f\|^2.$$

Bei Abschätzung der Glieder der zweiten Summe von (4.3) verwende man statt (1.12) die Ungleichung (4.2) und die Abschätzung

$$(4.6) \quad |m_0(l+i\delta) \varphi_0(x, l)| = |\chi(x, l+i\delta) - \vartheta_0(x, l)| \leq (C+1) \Phi(x).$$

Wegen (4.1) wird

$$\varrho_0(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda |m_0(l+i\delta)|^2 (-Im \tilde{m}_0(l+i\delta)) dl.$$

Daraus folgt wegen (4.6)

$$\begin{aligned} & \int_A |\varphi_0(x, l) \int_a^b f(y) \vartheta_0(y, l) k(y) dy|^2 d\varrho_0(l) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_A |m_0(l+i\delta) \varphi_0 \int_a^b f \vartheta_0 k dy|^2 (-Im \tilde{m}_0(l+i\delta)) dl \\ &\leq (C+1)^2 \Phi^2(x) \int_A \left| \int_a^b f \vartheta_0 k dy \right|^2 d\tilde{\varrho}_0(l), \end{aligned}$$

so daß nach (4.2) für  $f \in \mathfrak{F}'$

$$\int_A |\varphi_0(x, l) \int_a^b f(y) \vartheta_0(y, l) k(y) dy|^2 d\varrho_0(l) \leq (C+1)^2 \Phi^2(x) \|f\|^2$$

wird. Mit dieser Ungleichung liefert dieselbe Schlußweise wie in (4.5)

$$\begin{aligned} & \int_A \left| \int_a^b f(x) \vartheta_0(x, l) \int_a^x \varphi_0(y, l) q^{(r-\mu)}(y) \varphi^{(\mu)}(y, l) dy k(x) dx \right|^2 d\varrho_0(l) \\ &\leq (C+1)^2 (\gamma + K)^{2\mu} \gamma^2 K^{2(r-\mu-1)} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Trägt man diese Abschätzungen in die Gleichung (4.3) ein, so erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left( \int_A \left| \int f(x) \varphi^{(r)}(x, l) k(x) dx \right|^2 d\varrho_0(l) \right)^{\frac{1}{2}} &\leq (C+2) \|f\| \sum_{\mu=0}^{r-1} (\gamma + K)^\mu \gamma K^{r-\mu-1} \\ &\leq (C+2) \|f\| (\gamma + K)^r, \quad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

**Satz 3.** Zu der Differentialgleichung (3.1) wird eine in  $a < x < b$  stetige Funktion  $\Phi(x)$  derart bestimmt, daß

$$\varphi_a^2(x, l) + \vartheta_0^2(x, l) \leq \Phi^2(x) \quad \text{für } l \in \Delta, \quad a < x < b$$

gilt; ferner seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

$$a) \quad \int_a^b \Phi^2(x) |q^{(r)}(x)| dx \leq \gamma K^{r-1} \quad (\gamma = 1, 2, \dots).$$

b) Mit zwei Konstanten  $C \geq 1$ ,  $\delta_0 > 0$  sei

$$|\chi(x, l+i\delta)| \leq C \Phi(x) \quad \text{für } l \in \Delta, \quad 0 < \delta < \delta_0, \quad a < x < b.$$

Dann wird die zu dieser Differentialgleichung (3.1) gehörige Spektralschar  $E_\varepsilon(A')$  für jedes Intervall  $A' \subset \Delta$  ein regulärer Operator:

$$E_\varepsilon(A') = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r E^{(r)}(A') \quad \text{in } |\varepsilon| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2} (C+1)^{-1} (\gamma + K)^{-1}.$$

Hierbei sind die  $E^{(r)}(A')$  lineare beschränkte selbstadjungierte Operatoren, für die

$$\|E^{(r)}(A') f\| \leq \frac{(\gamma+1)^2 (C+2)^2}{\varepsilon_1^r} \|f\| \quad (f \in \mathfrak{F})$$

gilt.



Beweis. Für den Nachweis der Regularität des Operators  $E_\varepsilon(A')$  für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  und der behaupteten Abschätzungen genügt es zu zeigen, daß die Form  $(f, E_\varepsilon(A')g)$  für alle  $f, g$  eines in  $\mathfrak{H}$  dichten Teilraumes, etwa  $\mathfrak{H}'$ , in  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  regulär ist:

$$(4.7) \quad (f, E_\varepsilon(A')g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu c^{(\nu)}(f; g) \quad \text{für } |\varepsilon| < \varepsilon_1,$$

und die Entwicklungskoeffizienten der Abschätzung

$$(4.8) \quad |c^{(\nu)}(f; g)| \leq (\nu+1)^2 (C+2)^2 \varepsilon_1^{-\nu} \|f\| \cdot \|g\| \quad \text{für } f, g \in \mathfrak{H}'$$

genügen. Hieraus erhält man nämlich die Existenz und die behaupteten Eigenschaften der Operatoren  $E^{(\nu)}(A')$  auf abstraktem Wege mit Hilfe eines Satzes von FRECHET<sup>13)</sup>. Zum Beweis von (4.7) und (4.8) benutze man die Gleichung (1.11)

$$(f, E_\varepsilon(A')g) = \int_a^b \overline{f(x)} \varphi_\varepsilon(x, l) k dx \int_a^b g(x) \varphi_\varepsilon(x, l) k dx d\varrho_\varepsilon(l) \quad \text{für } f, g \in \mathfrak{H}'.$$

Formale Entwicklung dieses Ausdrucks nach  $\varepsilon$  ergibt bei Benutzung von Satz 2 und Hilfssatz 5 die Regularität von  $(f, E_\varepsilon(A')g)$  und die Koeffizientenabschätzung

$$\begin{aligned} |c^{(\nu)}(f; g)| &\leq \sum_{\substack{l+m+n=\nu \\ l, m, n \geq 0}} (C+2)^2 (\gamma+K)^{l+m} \|f\| \|g\| \cdot (2(C+1)(\gamma+K))^n \\ &\leq (\nu+1)^2 (C+2)^2 (2(C+1)(\gamma+K))^\nu \|f\| \|g\|, \end{aligned}$$

womit Satz 3 bewiesen ist.

Allgemeiner folgt unter den Voraussetzungen des Satzes 3 auch die Regularität des Operators  $\int_A \tau(l) dE_\varepsilon(l)$  in  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  für jede in  $\Delta$  stückweise stetige Funktion  $\tau(l)$ .

### § 5. Unitäräquivalenz.

In diesem Abschnitt sollen Bedingungen genannt werden, unter denen der Differentialoperator  $A_\varepsilon$  für hinreichend kleines  $\varepsilon$  mit dem ungestörten Differentialoperator  $A_0$  unitäräquivalent ist, das heißt, es wird die Existenz eines unitären Operators  $U_\varepsilon$  nachgewiesen, für den

$$(5.1) \quad A_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1} A_0 U_\varepsilon$$

gilt, wenn  $\varepsilon$  hinreichend klein ist. Die Bedingungen des folgenden Satzes werden sogar die Regularität der Operatoren  $U_\varepsilon$  und  $U_\varepsilon^{-1}$  liefern:

$$U_\varepsilon = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu U^{(\nu)}, \quad \|U^{(\nu)}\| \leq k^\nu, \quad |\varepsilon| < k^{-1};$$

dabei sei  $E$  der Einheitsoperator. Diese Aussagen liefern für die Spektralschar

$$E_\varepsilon(\Delta) = U_\varepsilon^{-1} E_0(\Delta) U_\varepsilon,$$

so daß die Spektralschar  $E_\varepsilon(\Delta)$  für jedes Intervall  $\Delta$  regulär ist. Daher ist zu erwarten, daß der ungestörte Operator  $A_0$  starken einschränkenden Bedingungen unterliegen muß. Es soll nun gezeigt werden, daß es schon genügt, daß die Voraussetzungen von Satz 3 für jedes Intervall  $\Delta$ , das dem Spektrum von  $A_0$  angehört, erfüllt sind. Dabei werden für  $\Delta$  auch uneigentliche Intervalle zugelassen, die nur aus einem Punkt bestehen.

<sup>13)</sup> STONE [1], Theorem 2.28, S. 63.

Satz 4. Mit  $S$  werde das Spektrum der ungestörten Differentialgleichung bezeichnet. Sind die Voraussetzungen des Satzes 3 statt für  $l \in \Delta$  für alle  $l \in S$  erfüllt, so gibt es einen regulären unitären Operator

$$U_\varepsilon = E + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r U^{(r)} \quad \text{für } |\varepsilon| < \frac{\varepsilon_1}{4}$$

mit

$$\|U^{(r)}\| \leq \frac{2^r}{\varepsilon_1^r},$$

für den  $A_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1} A_0 U_\varepsilon$  gilt.

Beweis. Mit  $\mathfrak{G}_\varepsilon$  werde der Hilbertraum aller in  $-\infty < \lambda < +\infty$   $\varrho_\varepsilon$ -meßbaren Funktionen  $a_\varepsilon(\lambda)$  bezeichnet, für die das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a_\varepsilon(\lambda)|^2 d\varrho_\varepsilon(\lambda)$  existiert. Dabei werden Funktionen  $a_\varepsilon(\lambda)$ , für die  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon = 0$  ist, als gleich und zwar dem Nullelement gleich betrachtet. Nach (1.13) wird durch

$$a_\varepsilon(\lambda) = T_\varepsilon f = \int_a^b f(x) \varphi_\varepsilon(x, \lambda) k(x) dx \quad (f \in \mathfrak{H})$$

der Raum  $\mathfrak{H}$  unitär auf  $\mathfrak{G}_\varepsilon$  transformiert, und ferner wird nach (1.14), (1.15) (5.2)

$$B_\varepsilon a_\varepsilon = T_\varepsilon A_\varepsilon T_\varepsilon^{-1} a_\varepsilon = \lambda a_\varepsilon(\lambda)$$

für  $a_\varepsilon \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ ; dabei ist  $\mathfrak{B}_\varepsilon$  der Teilraum von  $\mathfrak{G}_\varepsilon$ , für dessen Elemente  $a_\varepsilon$  das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon$  existiert. Die Unitäräquivalenz von  $A_\varepsilon$  und  $A_0$  ist daher gleichwertig mit der Unitäräquivalenz von  $B_\varepsilon$  und  $B_0$ .

Nach Satz 2 existiert für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  in  $S$  eine Funktion

$$r_\varepsilon(\lambda) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r r^{(r)}(\lambda), \quad |r^{(r)}(\lambda)| \leq \varepsilon_1^{-r}, \quad \lambda \in S$$

mit in  $S$   $\varrho_0$ -meßbaren Funktionen  $r^{(r)}(\lambda)$ , mit der Eigenschaft, daß für jede in  $S$   $\varrho_0$ -meßbare Funktion  $a(\lambda)$

$$\int_S a(\lambda) d\varrho_\varepsilon(\lambda) = \int_S a(\lambda) r_\varepsilon(\lambda) d\varrho_0(\lambda)$$

gilt, wenn  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ . Für  $|\varepsilon| < \frac{1}{2} \varepsilon_1$  erhält man

$$(5.3) \quad \sqrt{r_\varepsilon(\lambda)} = v_\varepsilon(\lambda) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r v^{(r)}(\lambda) > 0; \quad |v^{(r)}(\lambda)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^{-r}$$

für  $\lambda \in S$ . Setzt man etwa noch  $v_\varepsilon(\lambda) = 1$ , wenn  $\lambda$  nicht  $S$  angehört, so wird durch die Transformation

$$a_0 = V_\varepsilon a_\varepsilon = v_\varepsilon(\lambda) a_\varepsilon(\lambda) \quad (a_\varepsilon \in \mathfrak{G}_\varepsilon)$$

der Raum  $\mathfrak{G}_\varepsilon$  auf  $\mathfrak{G}_0$  transformiert (denn aus  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon = 0$  folgt

$\int_{-\infty}^{+\infty} |a_0|^2 d\varrho_0 = \int_S |a_\varepsilon v_\varepsilon|^2 d\varrho_0 = 0$ ). Aber  $V_\varepsilon$  braucht zunächst keine Reziproke zu besitzen. Wie man leicht sieht, ist notwendig und hinreichend für die Existenz von  $V_\varepsilon^{-1}$ , daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon = \int_S |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon$$

für jedes  $a_\varepsilon \in \mathcal{G}_\varepsilon$  gilt. In diesem Falle wird überdies  $V_\varepsilon$  eine unitäre Transformation, denn es wird dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_0|^2 d\varrho_0 &= \int_{\mathcal{S}} |a_0|^2 d\varrho_0 = \int_{\mathcal{S}} |a_\varepsilon v_\varepsilon|^2 d\varrho_0 \\ &= \int_{\mathcal{S}} |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |a_\varepsilon|^2 d\varrho_\varepsilon \quad \text{für } a_\varepsilon \in \mathcal{G}_\varepsilon; \end{aligned}$$

ferner bildet  $V_\varepsilon$  den Raum  $\mathcal{G}_\varepsilon$  auf den ganzen Raum  $\mathcal{G}_0$  ab.

Die Existenz von  $V_\varepsilon^{-1}$  läßt sich nun auf anderem Wege beweisen. Der Operator

$$(5.4) \quad U_\varepsilon f = T_0^{-1} V_\varepsilon T_\varepsilon f = T_0^{-1} \left( v_\varepsilon(\lambda) \int_a^b f(x) \varphi_\varepsilon(x, \lambda) k(x) dx \right)$$

transformiert  $\mathfrak{H}$  in sich. Nach Hilfssatz 5 und nach (5.3) ist dieser Operator regulär:

$$U_\varepsilon = E + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r U^{(r)} \quad \text{für } |\varepsilon| < \frac{1}{2} \varepsilon_1,$$

wobei  $E$  den Einheitsoperator bezeichnet; aus den Abschätzungen von Hilfssatz 5 und (5.3) erhält man

$$\begin{aligned} \|U^{(r)} f\| &\leq \left( \varepsilon_1^{-r} + \sum_{\mu=1}^r \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^{-\mu} \varepsilon_1^{-r+\mu} \right) \|f\| = \\ &= \varepsilon_1^{-r} \left( 1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^r 2^\mu \right) \|f\| \leq \left( \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^{-r} \|f\|. \end{aligned}$$

Nun kann man die Reziproke von  $U_\varepsilon$  für  $|\varepsilon| < \frac{1}{4} \varepsilon_1$  aus der Gleichung

$$U_\varepsilon^{-1} f = (E + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r U^{(r)})^{-1} f = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( - \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r U^{(r)} \right)^\mu f$$

gewinnen<sup>14)</sup>; diese Reihe konvergiert für  $|\varepsilon| < \frac{1}{4} \varepsilon_1$ , da

$$\left\| \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r U^{(r)} f \right\| \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\varepsilon^r U^{(r)} f\| \leq \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{2|\varepsilon|}{\varepsilon_1} \right)^r \|f\| = c \|f\|, \quad |c| < 1$$

gilt. Demnach hat  $U_\varepsilon$  eine in  $\mathfrak{H}$  erklärte Reziproke, die für  $|\varepsilon| < \frac{1}{4} \varepsilon_1$  ein regulärer beschränkter Operator ist. Mit (5.4) folgt hieraus auch die Existenz von  $V_\varepsilon^{-1}$  in  $\mathcal{G}_0$ , so daß  $V_\varepsilon$  eine unitäre Transformation ist. Folglich ist nach (5.4) auch  $U_\varepsilon$  ein unitärer Operator.

Wegen  $B_\varepsilon a_\varepsilon = \lambda a_\varepsilon(\lambda)$  für  $a_\varepsilon \in \mathcal{G}_\varepsilon$  folgt

$$V_\varepsilon B_\varepsilon = B_0 V_\varepsilon$$

oder

$$B_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1} B_0 V_\varepsilon.$$

Mit (5.2) und (5.4) folgt hieraus

$$A_\varepsilon = T_\varepsilon^{-1} B_\varepsilon T_\varepsilon = T_\varepsilon^{-1} V_\varepsilon^{-1} B_0 V_\varepsilon T_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1} A_0 U_\varepsilon.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

<sup>14)</sup> Vgl. RELICH [6] Math. Ann. 116, Hilfssatz 4, S. 558.

## § 6. Anwendungen.

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse der Sätze 2, 3 und 4 an einfachen Beispielen untersucht werden. Für die ungestörte Differentialgleichung werden solche Typen zugrunde gelegt, für deren Lösungen man das asymptotische Verhalten an den Singularitäten genügend genau kennt. Dabei soll vor allem die Voraussetzung b), die eine einschränkende Bedingung für die ungestörte Differentialgleichung bedeutet, betrachtet werden. Es wird sich herausstellen, daß diese Bedingung bei den betrachteten Beispielen im allgemeinen erfüllt ist, wenn man für  $\Delta$  ein ganz im Inneren des kontinuierlichen Spektrums gelegenes Intervall wählt. Es ist zu bemerken, daß die Bedingung b) in den Sätzen 2, 3 sicher erfüllt ist, wenn  $|m_0(l + i\delta)| \leq C - 1$  für  $l \in \Delta$ ,  $0 < \delta < \delta_0$  gilt, denn dann wird

$$(6.1) \quad \begin{aligned} |\chi(x, l + i\delta)| &\leq |\theta_0(x, l) + m_0(l + i\delta) \varphi_0(x, l)| \\ &\leq |1 + m_0(l + i\delta)| \Phi(x, l) \leq C \Phi(x, l). \end{aligned}$$

Bei den betrachteten Beispielen wird sich die ungestörte Differentialgleichung bei  $x = a$  regulär verhalten, so daß insbesondere die Funktionen  $\alpha = 1$  und  $\beta = x - a$  dem Raum  $\mathfrak{L}_0$  angehören. Daher werden für  $u \in \mathfrak{M}_0$  (Def. in § 1) die Grenzwerte

$$\begin{aligned} [\alpha, u]_a &= \lim_{x \rightarrow a} p(x) u'(x) = p(a) u'(a) \\ [\beta, u]_a &= \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) p(x) u'(x) - p(x) u(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (-p(x) u(x)) = -p(a) u(a) \end{aligned}$$

existieren, d. h. für jedes  $u \in \mathfrak{M}_0$  existieren die Grenzwerte  $u(a)$ ,  $u'(a)$ . Daher kann man die Randbedingung auch in der Form  $c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0$  stellen. Hier scheint die Einführung des Raumes  $\mathfrak{M}_0$  überflüssig; doch wenn die gestörte Differentialgleichung nur der Bedingung (2.3) unterliegt, so wird sich die gestörte Differentialgleichung bei  $x = a$  im allgemeinen nicht mehr regulär verhalten. Aber nach Satz 1 wird  $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_e$ , so daß man auch für die gestörte Differentialgleichung die Randbedingung in der Form  $c_1 u(a) + c_2 u'(a)$  stellen kann.

1. Als erstes Beispiel wird die HILLSche Differentialgleichung<sup>15)</sup>

$$(6.2) \quad -u'' + q_0(x)u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

mit

$$q_0(x+1) = q_0(x)$$

bei der Randbedingung  $u(0) = 0$  als ungestörte Differentialgleichung behandelt. Bei  $x = \infty$  liegt der Grenzpunktfall vor. Mit  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\theta(x, \lambda)$  werden die Lösungen von (6.2) bezeichnet, die den Anfangsbedingungen

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \varphi(0, \lambda) &= 0, & \theta(0, \lambda) &= 1 \\ \varphi'(0, \lambda) &= -1, & \theta'(0, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Diese Anfangsbedingungen stimmen mit (1.5) überein, wenn man dort  $\alpha(x) = -x$ ,  $\beta(x) = 1$  setzt. Man zeigt, daß diese Differentialgleichung für  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  zwei Lösungen  $\omega_+(x, \lambda)$ ,  $\omega_-(x, \lambda)$  von der Form

$$\omega_{\pm}(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + \mu_{\pm}(\lambda) \varphi(x, \lambda)$$

<sup>15)</sup> Für das Intervall  $-\infty < x < +\infty$  wurde die HILLSche Differentialgleichung von K. KODAIRA [4] behandelt.

besitzt, die der Gleichung

$$(6.4) \quad \omega_{\pm}(x+1, \lambda) = \sigma_{\pm}(\lambda) \omega_{\pm}(x, \lambda) \quad \text{für } 0 \leq x < \infty$$

genügen. Dabei ist mit der Abkürzung  $\tau(\lambda) = \frac{1}{2}(\vartheta(1, \lambda) - \varphi'(1, \lambda))$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{\pm}(\lambda) &= \tau(\lambda) \pm \sqrt{\tau^2(\lambda) - 1} \\ \mu_{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{\varphi(1, \lambda)} \left\{ -\frac{1}{2}(\vartheta(1, \lambda) + \varphi'(1, \lambda)) \pm \sqrt{\tau^2(\lambda) - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Für  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  ist  $\varphi(1, \lambda) \neq 0$ . Man beweist ferner  $|\sigma_{\pm}(\lambda)| \neq 1$  für  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ . Daher ist  $\sigma_{\pm}(\lambda)$  in  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  eine reguläre Funktion von  $\lambda$ , und man kann den Zweig der Wurzel in  $\operatorname{Im} \lambda > 0$  so festlegen, daß dort  $|\sigma_{+}(\lambda)| < 1$  ist. Dann wird nach (6.4) das Integral  $\int_0^{\infty} |\omega_{+}(x, \lambda)|^2 dx$  existieren, so daß nach (1.7)

$$\psi(x, \lambda) = \omega_{+}(x, \lambda), \quad m(\lambda) = \mu_{+}(\lambda) \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0)$$

gilt. Da  $\tau(\lambda)$  eine ganze Funktion von  $\lambda$  ist, die für reelle  $\lambda$  reell ist, erhält man nach (1.8) für das kontinuierliche Spektrum  $\mathfrak{K}$  von (6.2) genau die Menge der reellen  $\lambda$ , für die  $\tau^2(\lambda) - 1 \leq 0$  gilt. Man beweist übrigens, daß diese Menge  $\mathfrak{K}$  nicht leer ist, z. B. dadurch, daß man die Differentialgleichung (6.2) im Intervall  $-\infty < x < \infty$  untersucht und die Menge  $\mathfrak{K}$  als das gesamte Spektrum dieses neuen Eigenwertproblems nachweist. Auf diese Weise erkennt man, daß die Menge  $\mathfrak{K}$  die Vereinigungsmenge von Intervallen ist, die nur  $\lambda = +\infty$  als Häufungspunkt besitzen.

Um Satz 3 auf diese Differentialgleichung anzuwenden, beweisen wir, daß für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta$ , das ganz im Inneren von  $\mathfrak{K}$  liegt, die Funktion  $m(\lambda) = \mu_{+}(\lambda)$  bei Annäherung an  $\Delta$  beschränkt bleibt. Denn nach (6.5) ist  $\mu_{+}(\lambda)$  höchstens in der Umgebung der Nullstellen von  $\varphi(1, \lambda)$ , die übrigens einfache Nullstellen sind, unbeschränkt. Aus  $\varphi(1, \lambda_0) = 0$  folgt aber wegen  $\varphi \vartheta' - \varphi' \vartheta = 1$  ( $\lambda_0$  ist notwendig reell)

$$1 = -\varphi'(1, \lambda_0) \vartheta(1, \lambda_0) \leq \frac{1}{4}(\vartheta(1, \lambda_0) - \varphi'(1, \lambda_0))^2$$

oder

$$\tau^2(\lambda_0) - 1 \geq 0.$$

Entweder ist  $\tau^2(\lambda_0) - 1 > 0$ , also  $\lambda_0$  außerhalb von  $\mathfrak{K}$ , oder es tritt in der letzten Abschätzung Gleichheit ein, d. h. es wird

$$0 = \frac{1}{4}(\vartheta(1, \lambda_0) - \varphi'(1, \lambda_0))^2 + \varphi'(1, \lambda_0) \vartheta(1, \lambda_0) = \frac{1}{4}(\vartheta(1, \lambda_0) + \varphi'(1, \lambda_0))^2,$$

also  $\vartheta(1, \lambda_0) + \varphi'(1, \lambda_0) = 0$ . Soll also  $\mu_{+}(\lambda)$  bei  $\lambda = \lambda_0$  unbeschränkt sein, so darf nach (6.5) der Ausdruck  $\tau^2 - 1$  bei  $\lambda = \lambda_0$  nur eine einfache Nullstelle besitzen, d. h. aber,  $\lambda_0$  ist Randpunkt von  $\mathfrak{K}$ . Damit ist gezeigt, daß  $m(\lambda) = \mu_{+}(\lambda)$  (ebenso  $\mu_{-}(\lambda)$ ) in der Umgebung von jedem Punkt  $\lambda_0$ , der im Inneren von  $\mathfrak{K}$  liegt, beschränkt bleibt. Folglich ist die Bedingung b) der Sätze 2 und 3 für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta$ , das ganz im Inneren von  $\mathfrak{K}$  liegt, erfüllt. Die Funktionen  $\omega_{\pm}(x, l)$  können daher für  $l \in \Delta$  als Grenzfunktionen von  $\omega_{\pm}(x, \lambda)$  für  $\lambda \rightarrow l$ ,  $\operatorname{Im} \lambda > 0$  erklärt werden. Ferner ist in jedem solchen Intervall  $\Delta$  die Wurzel  $\sqrt{\tau^2 - 1}$  rein imaginär, also  $|\sigma_{+}(\lambda)|^2 = \tau^2 + (1 - \tau^2) = 1$ , und daher  $\omega_{\pm}(x, l)$  beschränkt. Man beweist, daß die Funktion  $[\omega_{+}, \omega_{-}] = \mu_{+}(\lambda) - \mu_{-}(\lambda)$  in  $\Delta$  nicht verschwindet. Folglich bilden  $\omega_{+}, \omega_{-}$  für  $l \in \Delta$  ein Fundamental-

system. Daher bleibt  $\Phi^2(x, l) = \varphi^2(x, l) + \theta^2(x, l)$  für  $l \in \Delta$  gleichmäßig beschränkt, man kann also für  $\Phi(x)$  in Satz 3 eine geeignete positive Konstante nehmen und erhält folglich das Ergebnis:

*Für die Differentialgleichung*

$$-u'' + \sum_{v=0}^{\infty} e^v q^{(v)}(x) u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $u(0) = 0$  seien für die Koeffizienten folgende Voraussetzungen erfüllt:

$$q_0(x+1) = q_0(x); \quad \int_0^{\infty} |q^{(v)}(x)| dx \leq \gamma K^{v-1} \quad \text{für } v = 1, 2, \dots$$

Dann besteht das kontinuierliche Spektrum  $\mathfrak{K}$  dieser Differentialgleichung für  $\varepsilon = 0$  aus Intervallen, die sich nur bei  $\lambda = +\infty$  häufen, und die Spektralschar  $E_\varepsilon(\Delta)$  dieses Eigenwertproblems ist für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta$ , das ganz im Inneren von  $\mathfrak{K}$  liegt, in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  ein regulärer Operator.

Es wird also nur der Rand des kontinuierlichen Spektrums nicht erfaßt; für Intervalle, die auch Randpunkte des kontinuierlichen Spektrums umfassen, ist die Aussage im allgemeinen falsch, wie man an dem Beispiel am Ende des § 3, allerdings für eine andere Randbedingung, erkennt. Man sieht übrigens, daß das oben genannte Ergebnis bei anderen Randbedingungen in derselben Form gilt.

2. In dem Buche von TITCHMARSH [3] wird folgende Klasse von Differentialgleichungen behandelt:

$$(6.6) \quad -u'' + q_0(x) u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty,$$

wobei

$$q_0(x) < 0 \quad \text{für } 0 \leq x < \infty; \quad q_0(x) \rightarrow -\infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

und

$$0 < -q'_0(x) = O(|q_0(x)|^c) \quad \text{mit } 0 < c < \frac{3}{2}$$

gilt.  $q''_0(x)$  sei in  $0 \leq x < \infty$  stetig und besitze dort ein festes Vorzeichen. Schließlich sei

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-q_0(x)}} = \infty.$$

Bei  $x = 0$  werde die Randbedingung  $u(0) = 0$  gestellt. Bei  $x = \infty$  liegt der Grenzpunktfall vor. Das Spektrum dieser Differentialgleichung (6.6) ist rein kontinuierlich und erfüllt die gesamte reelle Achse. Weiter wird in [3] bewiesen, daß die Funktion  $m_0(\lambda)$  bei Annäherung in der oberen Halbebene an die reelle Achse einen Grenzwert  $m_0(l)$  besitzt, der stetig von  $l$  abhängt, so daß die Voraussetzung b) von Satz 3 für jedes abgeschlossene Intervall der reellen Achse erfüllt ist. Für die Lösungen  $u(x, l)$  der Differentialgleichung (6.6) wird das asymptotische Verhalten für reelle  $l$  durch

$$u(x, l) = \frac{c_1}{(l - q_0(x))^{\frac{1}{4}}} \cos \left( \int_{x_1}^x \sqrt{l - q_0(t)} dt \right) + \frac{c_2}{(l - q_0(x))^{\frac{1}{4}}} \sin \left( \int_{x_1}^x \sqrt{l - q_0(t)} dt \right) + o(1)$$

gegeben, wobei die reelle Zahl  $x_1$  so gewählt ist, daß  $l - q_0(x_1) > 0$  ist. Um die Voraussetzungen von Satz 3 zu erfüllen, braucht man also nur  $\Phi(x) = (-q_0(x))^{-\frac{1}{4}}$  zu setzen.

Bildet man also die Differentialgleichung

$$-u'' + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r q^{(r)}(x) u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $u(0) = 0$ , wobei  $q_0(x)$  den unter (6.6) genannten Bedingungen genügt und die  $q^{(r)}(x)$  für  $r = 1, 2, \dots$  die Ungleichungen

$$\int_0^{\infty} \frac{|q^{(r)}(x)|}{\sqrt{-q_0(x)}} dx \leq \gamma K^{r-1} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

befriedigen, so ist die Spektralschar  $E_\varepsilon(\Delta)$  dieser Differentialgleichung für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta$  der reellen Achse in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  ein regulärer Operator.

Um auch die Aussage des Satzes 4 an einem typischen Beispiel zu belegen, wird als ungestörte Differentialgleichung

$$(6.7) \quad -u'' = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei einer Randbedingung der Form  $c_1 u(0) + c_2 u'(0) = 0$ , wobei  $c_1, c_2$  reelle nicht beide verschwindende Konstanten sind, behandelt. Diese Gleichung fällt unter das Beispiel (6.2), und man findet, daß das kontinuierliche Spektrum genau die positive  $\lambda$ -Achse erfüllt. Daher erhält man die Aussage:

Für die Differentialgleichung

$$-u'' + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r q^{(r)}(x) u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $c_1 u(0) + c_2 u'(0) = 0$  ( $c_1, c_2$  reell,  $c_1^2 + c_2^2 > 0$ ) sei

$$(6.8) \quad \int_0^{\infty} |q^{(r)}(x)| dx \leq \gamma K^{r-1} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

erfüllt. Dann ist die Spektralschar  $E_\varepsilon(\Delta)$  dieses Eigenwertproblems für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta$ , das nur positive  $\lambda$ -Werte enthält, in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  ein regulärer Operator.

Es ist wesentlich, daß das Intervall  $\Delta$  nicht auch den Punkt  $\lambda = 0$  enthält, wie man an dem Beispiel ersehen kann, das am Ende von § 3 gegeben wurde, bei dem die Randbedingung  $u'(0) = 0$  lautete. Für alle anderen Randbedingungen, also für  $u(0) - c u'(0) = 0$  mit reellem  $c$ , werde dieselbe Differentialgleichung (6.7) im ganzen Spektrum mit Einschluß von  $\lambda = 0$  untersucht.

Mit  $\alpha(x) = x + c$ ,  $\beta(x) = -1$  wird die Randbedingung  $[\alpha, u]_0 = c u'(0) - u(0) = 0$ , und das durch (1.5) festgelegte Fundamentalsystem wird

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + c \cos \sqrt{\lambda} x \\ \vartheta(x, \lambda) &= -\cos \sqrt{\lambda} x. \end{aligned}$$

Man findet leicht

$$(6.9) \quad m(\lambda) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{1 + c \sqrt{-\lambda}},$$

wobei  $\sqrt{-\lambda}$  in der längs der positiven Achse aufgeschnittenen  $\lambda$ -Ebene so erklärt ist, daß  $\sqrt{-\lambda} > 0$  für negative  $\lambda$ . Aus (6.9) folgt  $-\operatorname{Im} m(\lambda) > 0$  für

$\lambda > 0$  bei Annäherung in  $\operatorname{Im} \lambda > 0$ , so daß die positive  $\lambda$ -Achse das kontinuierliche Spektrum wird. Für  $c < 0$  erhält man in  $\lambda = -\frac{1}{c^2}$  einen Eigenwert.

Für  $l \geq 0$  wird

$$\varphi^2(x, l) + \vartheta^2(x, l) \leq (x + |c|)^2 + 1 \leq 2(1 + c^2)(1 + x^2) = \Phi^2(x).$$

Diese Funktion  $\Phi(x)$  kann in Satz 3 verwendet werden für alle  $l \geq 0$ . Zur Untersuchung der Bedingung b) soll  $\chi(x, \lambda)$  abgeschätzt werden. Wenn  $\operatorname{Im} \lambda$  klein genug und  $\operatorname{Re} \lambda = l > 0$  ist, wird:

$$\chi(x, \lambda) = -\cos \sqrt{l} x + \frac{\sqrt{-\lambda}}{1 + c \sqrt{-\lambda}} \left( \frac{\sin \sqrt{l} x}{\sqrt{l}} + c \cos \sqrt{l} x \right)$$

$$|\chi(x, \lambda)| \leq 1 + \left| \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} + c \right|^{-1} \sqrt{\frac{1}{l} + c^2} \leq 2 \Phi(x),$$

so daß  $C = 2$  wird. Demnach erhält man aus den Sätzen 3 und 4:

Für die Differentialgleichung

$$-u'' + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r q^{(r)}(x) u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $u(0) - c u'(0) = 0$  sei

$$(6.10) \quad \int_0^{\infty} (1 + x^2) |q^{(v)}(x)| dx \leq \frac{\gamma}{2(1 + c^2)} K^{v-1} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

erfüllt. Dann ist die Spektralschar  $E_{\varepsilon}(\Delta)$  für jedes Intervall  $\Delta$  aus  $\lambda \geq 0$  ein regulärer Operator für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1 = \frac{1}{6} (\gamma + K)^{-1}$ . Für  $c \geq 0$  insbesondere ist die Menge  $\lambda \geq 0$  bereits das ganze Spektrum der ungestörten Differentialgleichung, folglich läßt sich nach Satz 4 die gestörte Differentialgleichung durch einen unitären Operator  $U_{\varepsilon}$ , der einschließlich seiner Reziproken in  $|\varepsilon| < \frac{1}{24} (\gamma + K)^{-1}$  regulär ist, in die Differentialgleichung (6.7) transformieren.

Ein Vergleich von (6.8) mit (6.10) zeigt, daß die Funktion  $\Phi(x)$  wesentlich von dem betrachteten Intervall  $\Delta$  abhängt. Daß man tatsächlich bei der Bedingung (6.8) im allgemeinen keine Unitäräquivalenz zwischen der gestörten und der ungestörten Differentialgleichung erwarten kann, zeigt die Differentialgleichung

$$(6.11) \quad -u'' + \frac{\varepsilon}{(1+x)^{\alpha}} u = \lambda u \quad \text{in } 0 \leq x < \infty$$

bei der Randbedingung  $u(0) = 0$  und für  $1 < \alpha < 2$ . Offenbar ist die Bedingung (6.8) erfüllt, so daß  $E_{\varepsilon}(\Delta)$  für jedes abgeschlossene Intervall  $\Delta$ , das ganz im Inneren der positiven  $\lambda$ -Achse liegt, in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär ist. Aber es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Differentialgleichung für  $\varepsilon < 0$  nicht mit (6.7) unitäräquivalent ist. Da das Spektrum der Differentialgleichung (6.11) für  $\varepsilon = 0$  auf der negativen  $\lambda$ -Achse leer ist, genügt es zu zeigen, daß das Spektrum dieser Differentialgleichung (6.11) für  $\varepsilon < 0$  auf der negativen  $\lambda$ -Achse nicht leer ist; dabei kann sogar  $0 < \alpha < 2$  zugelassen werden.

Zum Beweis wird  $y = 1 + x$ ,  $\alpha = 2 - 4\eta$  mit  $0 < \eta < 1/2$ ,  $y \geq 1$  und  $y_n = (2\pi n)^{\frac{1}{\eta}}$  für  $n = 1, 2, \dots$  gesetzt. Dann ist  $y_1 > 1$  und  $u_n(x)$  wird für



$n = 1, 2, \dots$  durch

$$u_n(x) = u_n(y-1) = \begin{cases} y^{\frac{1}{2}-\eta} (1 - \cos y^n) & \text{für } y_1 \leq y \leq y_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt. Wird wie in § 2 der zu (6.11) gehörige Differentialoperator mit  $A_\varepsilon$  und sein Definitionsbereich mit  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  bezeichnet, so ist  $u_n \in \mathfrak{A}_\varepsilon$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Ferner wird

$$(u_n, A_\varepsilon u_n) = \int_1^\infty \left( u_n'^2 (y-1) + \frac{\varepsilon}{y^{2-4\eta}} u_n^2 (y-1) \right) dy.$$

Wegen  $|u_n'| \leq y^{-\frac{1}{2}}$  folgt

$$\int_1^\infty u_n'^2 (y-1) dy \leq \int_{y_1}^{y_n} \frac{1}{y} dy = \log \frac{y_n}{y_1} = \frac{1}{\eta} \log n.$$

Ferner wird bei der Substitution  $y^\eta = t$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty y^{-2+4\eta} u_n^2 (y-1) dy &= \int_{y_1}^{y_n} y^{-1+2\eta} (1 - \cos y^n)^2 dy \\ &= \frac{1}{\eta} \int_{2\pi}^{2\pi n} t (1 - \cos t)^2 dt \geq \frac{1}{\eta} \int_{2\pi}^{2\pi n} (1 - \cos t)^2 dt \geq \frac{1}{\eta} (n-1), \end{aligned}$$

so daß für  $\varepsilon < 0$

$$(u_n, A_\varepsilon u_n) \leq \frac{1}{\eta} (\log n + \varepsilon (n-1))$$

wird. Die rechte Seite wird aber bei festem  $\varepsilon < 0$  für genügend großes  $n$  negativ. Daher ist das Spektrum von  $A_\varepsilon$  auf der negativen  $\lambda$ -Achse für  $\varepsilon < 0$  nicht leer.

#### Literaturverzeichnis.

- [1] STONE, M. H.: Linear Transformations in Hilbert Space. New York 1932. — [2] WEYL, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220—269 (1910). — [3] TITCHMARSH, E. C.: Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford 1946. — [4] KODAIRA, K.: The eigenvalue problem for ordinary differential equations of second order and HEISENBERG's theory of S-matrices. Amer. J. of Math. **71**, 921—945 (1949). — [5] LEVINSON, N.: A simplified proof of the expansion theorem for singular second order linear differential equations. Duke Math. J. **18**, 57—71 (1951). — [6] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann.: I. Mitt. **113**, 600—619 (1937); II. Mitt. **113**, 677—685 (1937); III. Mitt. **116**, 555—570 (1939); IV. Mitt. **117**, 356—382 (1940); V. Mitt. **118**, 462—484 (1942). — [7] NAGY, B. v. SZ.: Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de HILBERT. Comm. math. helvet. **19**, 347—366 (1946/47). — [8] FRIEDRICHS, K. O.: On the perturbation of continuous spectra. Communications on Appl. Math. **1**, 361—406 (1948). — [9] HEINZ, E.: Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **123**, 415—438 (1951). — [10] WINTNER, A.: Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Leipzig 1929.

(Eingegangen am 1. Juli 1952.)

## Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik.

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg/Lahn.

### Einleitung.

Ein sehr umfassendes typenfreies logisches System wurde kürzlich von W. ACKERMANN<sup>1)</sup> entwickelt und als widerspruchsfrei nachgewiesen. Dem System liegt eine Revision des Aussagenkalküls zugrunde, indem die Herleitbarkeit des „Tertium non datur“ und der Formeln, welche die Implikation enthalten, in bestimmter Weise eingeschränkt wird<sup>2)</sup>.

Verzichtet man auf die Implikation als Grundverknüpfung, so wird das System besonders übersichtlich. Dann fällt nämlich nur das uneingeschränkte „Tertium non datur“ fort, während alle grundlegenden Schlußregeln des implikationsfreien Aussagenkalküls bestehen bleiben. Das „Tertium non datur“ bleibt dabei noch weitgehend herleitbar, nämlich mindestens im Rahmen der vollen verzweigten Typenlogik, die sich in dem System entwickeln läßt. Auch auf dieses typenfreie System, das sich bei Fortfall der Implikation aus dem unter 1) behandelten System ergibt, hat W. ACKERMANN hingewiesen<sup>3)</sup>. Der Verzicht auf die Implikation als Grundverknüpfung stellt übrigens keine wesentliche Einschränkung dar, da ja  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  etwa durch  $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$  definiert werden kann.

Zum Widerspruchsfreiheitsbeweis gebraucht ACKERMANN eine Formalisierung mit Disjunktionsketten, wie ich sie in ähnlicher Weise vorher ebenfalls verwendet habe<sup>4)</sup>. Sein typenfreies System läßt sich daher unmittelbar an meinen Schlußweisenkalkül  $K_1$  der Prädikatenlogik anschließen. Nimmt man die Disjunktion, Negation, Existenz und Abstraktion als einzige Grundverknüpfungen, so sind meine Schlußschemata nur durch die ACKERMANNschen Abstraktionsschlüsse zu ergänzen. Dabei ist die „unendliche Induktion“ so allgemein zu nehmen, wie dies in ähnlicher Weise zuerst P. LORENZEN<sup>5)</sup> für die verzweigte Typenlogik getan hat.

In der vorliegenden Arbeit wird für das so gefaßte System ein Widerspruchsfreiheitsbeweis erbracht, der mir besonders durchsichtig erscheint und der in einem sehr engen Zusammenhang mit meiner beweistheoretischen Untersuchung der „verzweigten Analysis“ steht<sup>6)</sup>. Die Anlage dieses Beweises ist

<sup>1)</sup> Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik (erweitertes System). Math. Z. 55, 364—384 (1952).

<sup>2)</sup> Solche Einschränkungen sind erforderlich, da sich sonst die bekannten Antinomien ergeben.

<sup>3)</sup> In einem Vortrag auf einer Tagung für math. Logik und Grundlagenforschung. Göttingen, März 1952.

<sup>4)</sup> a) Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. 122, 47—65 (1950).

b) Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann. 122, 369—389 (1951).

c) Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis. Math. Ann. 124, 123 bis 147 (1952).

<sup>5)</sup> Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. J. Symb. Log. 16, 98 (1951).

<sup>6)</sup> Die Widerspruchsfreiheit ergibt sich aus drei Reduktionssätzen, deren Beweise ganz analog wie in der unter 4c) zitierten Arbeit verlaufen.

eine andere als die des entsprechenden ACKERMANNschen Widerspruchsfreiheitsbeweises.

Das Kodifikat, das ich hier benutze, besitzt die ACKERMANNsche Typenfreiheit. Die Grundformeln dieses Kodifikats sind Grundformeln des ACKERMANNschen Systems. Hierunter fallen insbesondere die Grundformeln meiner Kodifikate der „reinen Zahlentheorie“ und der „verzweigten Analysis“. Weiterhin übernehme ich von ACKERMANN den auf die Abstraktionschlüsse bezüglichen Rangbegriff und die Definition des Grades einer Formel. Rang und Grad einer Herleitung definiere ich jedoch in einer besonderen Weise, die der hier im Mittelpunkt stehenden Schnitt-Elimination angepaßt ist.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß das Kodifikat auf Grund der uneingeschränkt zugelassenen „unendlichen Induktion“  $\omega$ -vollständig ist.

### Das Kodifikat.

Als Grundzeichen dienen die Zeichen für *freie Variablen*, *gebundene Variablen* und *spezielle Konstanten*, ferner das *Abstraktionszeichen*  $\lambda$  mit gebundenen Variablen als Indizes und die *logischen Zeichen*  $\vee, \neg, (E)$  (letzteres mit einer gebundenen Variablen). Außerdem sollen Klammern gesetzt werden, so weit es zur Kennzeichnung des Zusammenhanges erforderlich ist. Mitteilungszeichen für freie Variablen seien  $a, b, \dots$ , für gebundene Variablen  $x, y, \dots$ , für spezielle Konstanten  $\varphi, \psi, \dots$ .

Die simultane rekursive Erklärung der Begriffe „Term“ und „Formel“ lautet:

1. a) Jede *freie Variable* und jede *spezielle Konstante* ist ein *Term*.
- b) Ist  $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$  eine *Formel*, in der die gebundenen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  nicht vorkommen, so ist  $\lambda_{x_1 \dots x_n} \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$  ein *Term*.
2. a) Sind  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, t_1, \dots, t_n$  *Terme*, so ist  $\mathfrak{A}(t_1, \dots, t_n)$  eine *Formel*.
- b) Sind  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  *Formeln*, so ist  $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$  eine *Formel*.
- c) Ist  $\mathfrak{A}$  eine *Formel*, so auch  $\neg \mathfrak{A}$ .
- d) Ist  $\mathfrak{A}(a)$  eine *Formel*, in der die gebundene Variable  $x$  nicht vorkommt, so ist  $(E x) \mathfrak{A}(x)$  eine *Formel*.

Terme, die keine freien Variablen enthalten, heißen *konstant*. Gewisse Formeln der Gestalt  $\varphi(a_1, \dots, a_m)$  und  $\neg \varphi(b_1, \dots, b_n)$ , wo  $\varphi, \psi$  spezielle Konstante und  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  konstante Terme sind, seien als „*Grundformeln*“ ausgezeichnet. Die Festlegung der Grundformeln ist an die einzige Bedingung geknüpft, daß mit  $\varphi(a_1, \dots, a_m)$  nicht zugleich  $\neg \varphi(a_1, \dots, a_m)$  Grundformel sein darf.

Die Herleitung von Formeln geschieht aus den Grundformeln unter Anwendung folgender Schlüsse:

#### 1. Reine Disjunktionsschlüsse:

a) *Vertauschung*: In einer Disjunktion  $\mathfrak{A}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$  dürfen die Glieder  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  beliebig vertauscht werden.

b) *Zusammenziehung*:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}}$$

c) *Abschwächung*:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}}$$

#### 2. a) *Kompositionsschluß*:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}}$$

b) *Negationsschluß*:

$$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}}$$

## 3. Prädikatenlogische Schlüsse:

$$\text{a) } \frac{\mathfrak{A}(t) \vee \mathfrak{R}}{(\exists x) \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{R}}$$

$$\text{b) } \frac{\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{R}}{(\exists x) \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{R}}$$

## 4. Abstraktionsschlüsse:

$$\text{a) } \frac{\mathfrak{A}(t_1, \dots, t_n) \vee \mathfrak{R}}{[\lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)] (t_1, \dots, t_n) \vee \mathfrak{R}}$$

$$\text{b) } \frac{\mathfrak{A}(t_1, \dots, t_n) \vee \mathfrak{R}}{[\lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)] (t_1, \dots, t_n) \vee \mathfrak{R}}$$

## 5. Schnitt:

$$\frac{\mathfrak{R} \vee \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{R}}{\mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}}$$

6. Unendliche Induktion: Ist  $\mathfrak{A}(c_1, \dots, c_n)$  für alle konstanten Terme  $c_1, \dots, c_n$  herleitbar, so auch  $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$  mit freien Variablen  $a_1, \dots, a_n$ .

Hierzu sind folgende Erklärungen hinzuzufügen: In den Schlußschematen sind die mit  $\mathfrak{R}, \mathfrak{A}$  bezeichneten Disjunktionsglieder die „Nebenglieder“ — sie dürfen auch fehlen —, die übrigen die „Hauptglieder“. Als „Schnittglieder“ bezeichnen wir die Hauptglieder der Schnitte. Das Schlußschema 3 b) gilt nur unter der Variablenbedingung, daß die freie Variable  $a$  in der Konklusion nicht vorkommt.

Die „unendliche Induktion“ enthält unendlich viele Prämissen. Sie stellt daher kein rein formales Schlußschema dar, sondern eine Herleitungsregel, die zu ihrer Anwendung einer beweistheoretischen Überlegung bedarf. Demgemäß gründet sich die Herleitbarkeit einer Formel bei Zulassung der unendlichen Induktion nicht notwendig auf endlich viele Formeln, sondern unter Umständen auf eine unendliche Formel-Gesamtheit, die jeweils durch die angewandten Schlüsse halbgeordnet ist. Eine derartige Halbordnung, die von den Grundformeln über die Schlüsse der Schemata 1–6 zu einer Endformel führt, bezeichnen wir als eine „Herleitung“.

Jeder Formel einer Herleitung teilen wir eine gewisse Ordnungszahl als ihre „Ordnung“ zu, und zwar in der Weise, daß die Konklusion eines reinen Disjunktionsschlusses dieselbe Ordnung wie ihre Prämisse besitzt, während die Konklusion jedes anderen Schlusses eine größere Ordnung als jede ihrer Prämissen hat. Als „Ordnung der Herleitung“ gilt die Ordnung ihrer Endformel.

Ferner wird jeder Konstituente einer Herleitungsformel eine bestimmte Ordnungszahl als „Rang“ zugeordnet. Dabei verstehen wir unter den „Konstituenten“ einer Formel  $\mathfrak{F}$  die Formel  $\mathfrak{F}$  selbst, falls sie nicht von der Form  $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$  ist, und jede der Formeln  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ , falls  $\mathfrak{F}$  von der Form  $\mathfrak{A}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$  ist und die  $\mathfrak{A}_i$  nicht selbst von der Form  $\mathfrak{A}_i \vee \mathfrak{B}_i$  sind. Die Ränge der Konstituenten werden für die Formeln einer Herleitung folgendermaßen rekursiv erklärt:

a) Konstituenten der Grundformeln und der Hauptglieder von Abschwächungen erhalten den Rang 0.

b) Hauptglieder in Konklusionen von Abstraktionsschlüssen erhalten einen um 1 höheren Rang als die Konstituenten maximalen Ranges in den Hauptgliedern der entsprechenden Prämissen.

c) Alle übrigen Konstituenten von Herleitungsformeln erhalten in den Konklusionen den gleichen Rang wie die entsprechenden Konstituenten in den Prämissen. Gehören zu einer Konklusions-Konstituente mehrere entsprechende

Prämissenkonstituenten (bei Schlüssen 1b, 2a und 6), so ist der entsprechende Maximalrang bzw. der Limes aus den entsprechenden Rängen zu nehmen.

Der Rang ist also ein Maß für die angewandten Abstraktionsschlüsse, wie die Ordnung ein Maß für die angewandten Schlüsse aller Schemata 2—6 ist.

Als „Rang eines Schnittes“ gilt der Maximalrang der Konstituenten seiner Schnittglieder. Das Maximum bzw. den Limes aller Schnittträge einer Herleitung bezeichnen wir als den „Rang der Herleitung“.

Unter dem „Grad einer Formel“ verstehen wir die Anzahl der logischen Zeichen, die außerhalb eines jeden Termbestandteiles der Formel auftreten. Die rekursive Erklärung lautet:

- a) Formeln der Gestalt  $\bar{s}(t_1, \dots, t_n)$  haben den Grad 0.
- b) Haben  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  die Grade  $g_1, g_2$ , so hat  $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$  den Grad  $g_1 + g_2 + 1$ .
- c) Hat  $\mathfrak{A}$  den Grad  $g$ , so hat  $\mathfrak{A}$  den Grad  $g + 1$ .
- d) Hat  $\mathfrak{A}(a)$  den Grad  $g$ , so hat  $(\exists x) \mathfrak{A}(x)$  den Grad  $g + 1$ .

Als „Grad eines Schnittes“ gilt der Maximalgrad seiner Hauptglieder. Der „Grad einer Herleitung“ wird folgendermaßen erklärt:

a) Falls es in der Herleitung entweder überhaupt keine Schnitte oder keine Schnitte maximalen Ranges gibt<sup>7)</sup>, so soll der Grad der Herleitung gleich Null sein.

b) Falls es in der Herleitung Schnitte maximalen Ranges gibt und die Grade dieser Schnitte beschränkt sind, gilt der Maximalgrad der Schnitte maximalen Ranges als Grad der Herleitung.

c) Falls es in der Herleitung Schnitte maximalen Ranges gibt und die Grade dieser Schnitte nicht beschränkt sind, sagen wir, die Herleitung habe unendlichen Grad.

### Der Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Die Schlußschemata sind so eingerichtet, daß ohne Zuhilfenahme von Schnitten trivialerweise kein Widerspruch zu erzielen ist. Folglich ist das Kodifikat widerspruchsfrei, wenn sich die Schnitte in jeder Herleitung eliminieren lassen. Zum Beweise der Schnitt-Eliminierbarkeit dienen folgende Sätze.

1. *Reduktionssatz.* Eine Herleitung von endlichem, nicht verschwindendem Grad und der Ordnung  $\alpha$  läßt sich reduzieren auf eine Herleitung  $2^\alpha$ , in der entweder a) der Grad vermindert und der Rang unverändert oder b) der Rang vermindert ist.

Beweis durch transfinite Induktion nach der Herleitungsordnung  $\alpha$ : Die letzte Herleitungsformel der Ordnung  $\alpha$  ist Konklusion eines Schlusses  $\Sigma$  nach einem der Schemata 2—6. Die Ordnungen  $\alpha_i$  der Prämissen sind kleiner als  $\alpha$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für diese Prämissen reduzierte Herleitungen der Ordnungen  $2^{\alpha_i}$ . Ist  $\Sigma$  nicht ein Schnitt maximalen Ranges und Grades, so gewinnen wir aus den reduzierten Herleitungen der Prämissen eine reduzierte Herleitung der Endformel, indem wir die letzten Formeln unverändert anfügen und diesen die Ordnung  $2^\alpha$  erteilen. Es bleibt nur der Fall, daß der Schluß  $\Sigma$  ein Schnitt

$$\frac{\mathfrak{A} \subseteq \bar{\mathfrak{C}} \vee \mathfrak{I}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{I}}$$

maximalen Ranges und Grades ist. Die Ordnungen der Prämissen seien  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$ , die Ordnungen ihrer reduzierten Herleitungen  $2^{\alpha_1}$  bzw.  $2^{\alpha_2}$ . Wir eliminieren den Schnitt  $\Sigma$  in einer durch das Schnittglied  $\bar{\mathfrak{C}}$  bestimmten Weise.

<sup>7)</sup> Letzteres kann der Fall sein, wenn der Rang der Herleitung eine Limeszahl ist.

I. Fall.  $\mathcal{S}$  sei eine Formel  $\bar{s}(t_1, \dots, t_n)$ .

Treten hierin freie Variablen auf, so ersetzen wir diese durch beliebige konstante Terme. Dabei möge  $\mathcal{S}$  in  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$  übergehen. Die gleiche Ersetzung möge  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{Z}$  in  $\mathcal{R}^*$  bzw.  $\mathcal{Z}^*$  verwandeln. Wir dehnen diese Ersetzungen nun auf die reduzierten Herleitungen der Prämissen aus, so weit es der Herleitungszusammenhang erfordert. Dann ergeben sich, nachdem unter Umständen einige unendliche Induktionen gestrichen sind, reduzierte Herleitungen der Formeln

$$\mathcal{R}^* \vee \bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*) \quad \text{und} \quad \bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*) \vee \mathcal{Z}^*$$

mit den Ordnungen  $2^{\alpha_1}$  bzw.  $2^{\alpha_2}$ . Es kommt weiterhin darauf an, welche Ränge die Ersatzschnittglieder  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$ ,  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$  in diesen Herleitungen besitzen.

a) Der Rang beider Ersatzschnittglieder sei Null. Dann treten die obersten Formeln der zugehörigen *Formelbünde*<sup>9)</sup> nur in Hauptgliedern von Abschwächungen oder als Grundformeln auf. Mindestens eine der beiden Formeln  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$ ,  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$  ist nicht Grundformel. Der zugehörige Formelbund läßt sich daher streichen. Dadurch erhält man eine reduzierte Herleitung von  $\mathcal{R}^*$  oder  $\mathcal{Z}^*$ , woraus durch Abschwächung  $\mathcal{R}^* \vee \mathcal{Z}^*$  mit der Ordnung  $2^{\alpha_1}$  bzw.  $2^{\alpha_2}$  zu gewinnen ist.

b) Mindestens ein Ersatzschnittglied habe einen nicht verschwindenden Rang. Dann hat  $\bar{s}^*$  notwendig die Form  $\lambda_{x_1, \dots, x_n} \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ . Wir ersetzen nun die Formeln  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$  und  $\bar{s}^*(t_1^*, \dots, t_n^*)$  in ihren Formelbünden durch  $\mathcal{A}(t_1^*, \dots, t_n^*)$  bzw.  $\bar{\mathcal{A}}(t_1^*, \dots, t_n^*)$ . Dabei bleibt nach Streichung gewisser Abstraktionsschlüsse der Herleitungszusammenhang gewahrt, und der Schnitt

$$\frac{\mathcal{R}^* \vee \mathcal{A}(t_1^*, \dots, t_n^*) \quad \bar{\mathcal{A}}(t_1^*, \dots, t_n^*) \vee \mathcal{Z}^*}{\mathcal{R}^* \vee \mathcal{Z}^*}$$

erhält einen kleineren Rang als die ursprüngliche Herleitung. In dieser Weise ergibt sich aus den reduzierten Herleitungen der Prämissen eine reduzierte Herleitung von  $\mathcal{R}^* \vee \mathcal{Z}^*$ , als deren Ordnung  $2^{\max(\alpha_1, \alpha_2)} + 1$  genommen werden kann.

In beiden Fällen ist eine reduzierte Herleitung von  $\mathcal{R}^* \vee \mathcal{Z}^*$  mit einer Ordnung  $< 2^\alpha$  gewonnen. Da dies für jede beliebige Ersetzung der freien Variablen durch konstante Terme gilt, erhält man durch unendliche Induktion eine reduzierte Herleitung von  $\mathcal{R} \vee \mathcal{Z}$  mit der Ordnung  $2^\alpha$ .

II. Fall.  $\mathcal{S}$  sei von einer der Formen  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ,  $\bar{\mathcal{A}}$  oder  $(Ex)\mathcal{A}(x)$ . Dann werden die gleichen Reduktionen vorgenommen, die ich im Kodifikat der reinen Zahlentheorie verwendet habe<sup>9)</sup>. Dadurch ergibt sich in jedem Falle eine reduzierte Herleitung der Ordnung  $2^\alpha$ .

Hiermit ist der Satz durch transfinite Induktion nach  $\alpha$  bewiesen.

2. *Reduktionssatz.* Eine Herleitung von endlichem Grad und der Ordnung  $\alpha$  läßt sich reduzieren auf eine Herleitung der Ordnung  $\varepsilon(\alpha)$  vom Grad 0 und gleichen Rang oder von kleinerem Rang. (Dabei soll  $\varepsilon(\alpha)$  die kleinste  $\varepsilon$ -Zahl  $\geq \alpha$  bedeuten.)

<sup>9)</sup> Vgl. z. B. S. 50 der unter <sup>a)</sup> zitierten Arbeit.

<sup>9)</sup> S. 376—378 der unter <sup>b)</sup> zitierten Arbeit (II.—IV. Fall, wobei der IV. Fall sinngemäß von  $(x)\mathcal{A}(x)$  auf  $(Ex)\mathcal{A}(x)$  zu übertragen ist).

Beweis: Bei einer Reduktion gemäß dem 1. Reduktionssatz übersteigt die Ordnung diese  $\varepsilon$ -Zahl nicht. Die Reduktionen können so oft angewandt werden, bis einmal der Grad verschwindet oder der Rang abnimmt, was bei dem vorausgesetzten endlichen Grad nach endlich vielen Schritten eintritt.

Ohne Voraussetzung endlichen Grades gilt entsprechend:

**3. Reduktionssatz.** Eine Herleitung der Ordnung  $\alpha$  läßt sich reduzieren auf eine Herleitung der Ordnung  $\varepsilon_\alpha$  vom Grad 0 und gleichen Rang oder von kleinerem Rang. (Dabei soll  $\varepsilon_0 = \omega$  und im übrigen  $\varepsilon_\alpha$  die  $\alpha$ -te  $\varepsilon$ -Zahl sein.)

Beweis: Wir wenden wiederum transfinite Induktion nach  $\alpha$  an und betrachten die letzte Herleitungsformel der Ordnung  $\alpha$ . Diese ist Konklusion eines Schlusses  $\Sigma$ , deren Prämissen Ordnungen  $\alpha_i < \alpha$  haben. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es reduzierte Herleitungen der Prämissen mit Ordnungen  $\varepsilon_{\alpha_i}$ . Wir fügen an diese reduzierten Herleitungen den Schluß  $\Sigma$  an. Ist  $\Sigma$  nicht ein Schnitt maximalen Ranges, so erhalten wir in dieser Weise eine reduzierte Gesamtherleitung, als deren Ordnung  $\varepsilon_\alpha$  genommen werden kann. Andernfalls erteilen wir der umgewandelten Herleitung die Ordnung  $\varepsilon_{\max(\alpha_1, \alpha_2) + 1}$ . Da dann  $\Sigma$  der einzige Schnitt maximalen Ranges ist, hat die umgewandelte Herleitung in diesem Falle einen endlichen Grad. Eine Anwendung des 2. Reduktionssatzes führt auch hier zu einer reduzierten Herleitung, der wir die Ordnung  $\varepsilon_\alpha$  geben können.

Aus dem 3. Reduktionssatz läßt sich nun die Schnitt-Eliminierbarkeit folgern. Wir beschränken uns zunächst auf Herleitungen mit endlichen Rängen. Hierfür gilt der

**Spezielle Eliminationssatz:** Eine Herleitung von endlichem Rang und der Ordnung  $\alpha$  läßt sich durch eine schnittfreie Herleitung ersetzen, deren Ordnung die erste kritische  $\varepsilon$ -Zahl  $\geq \alpha$  nicht übersteigt.

Beweis: Durch wiederholte Anwendung der Reduktionen gemäß dem 3. Reduktionssatz erhält man eine Herleitung vom Grade 0, deren Ordnung die erste kritische  $\varepsilon$ -Zahl  $\geq \alpha$  nicht übersteigt. Diese Herleitung ist schnittfrei, da bei endlichem Rang der Grad nur dann verschwindet, wenn überhaupt keine Schnitte auftreten.

Bei Beschränkung auf endliche Herleitungsränge wird also die transfinite Induktion zum Beweise der Schnitt-Eliminierbarkeit hier in dem gleichen Umfange gebraucht wie zum entsprechenden Beweise für die „verzweigte Analysis“<sup>10)</sup>.

Mit einer stärkeren Induktion ergibt sich der

**Allgemeine Eliminationssatz:** Jede Herleitung läßt sich durch eine schnittfreie Herleitung ersetzen.

Zum Zwecke der induktiven Beweisführung setzen wir fest, daß eine Herleitung  $H_1$  „schwächer“ als eine Herleitung  $H_2$  heißen soll, wenn entweder

a) der Rang von  $H_1$  kleiner als der Rang von  $H_2$  ist oder

b)  $H_1$  und  $H_2$  gleichen Rang besitzen, aber in  $H_1$  kein Schnitt maximalen Ranges auftritt, während dies bei  $H_2$  der Fall ist.

Die Schnitt-Eliminierbarkeit wird dann in folgender Weise durch ver-schränkte transfinite Induktion bewiesen:

Es sei eine Herleitung  $H$  gegeben. Die Schnitt-Eliminierbarkeit möge gelten

a) für alle schwächeren Herleitungen als  $H$ ,

<sup>10)</sup> Vgl. die unter 4c) zitierte Arbeit.



b) für alle Herleitungen, die nicht stärker als  $H$  sind und kleinere Ordnung als  $H$  besitzen.

Außerdem setzen wir voraus, daß für die Konstituenten der Endformel einer Herleitung bei der Schnitt-Elimination keine Rangerhöhung eintritt. Es ist zu beachten, daß eine solche Rangerhöhung bei den Reduktionen nach den drei Reduktionssätzen nicht stattfindet, wie aus den Beweisen dieser Sätze hervorgeht.

Die Schnitt-Eliminierbarkeit ergibt sich nun folgendermaßen für die Herleitung  $H$ :

I. In  $H$  möge es Schnitte maximalen Ranges geben.

Dann führt die Reduktion nach dem 3. Reduktionssatz zu einer schwächeren Herleitung. Hierin sind die Schnitte nach Induktionsvoraussetzung eliminierbar.

II. In  $H$  möge kein Schnitt maximalen Ranges auftreten.

Dann gehen wir auf die Prämissen des letzten Schlusses, der nicht ein reiner Disjunktionsschluß ist, zurück. Diese Prämissen besitzen kleinere Ordnungen als die Herleitung  $H$ , lassen sich also nach Induktionsvoraussetzung schnittfrei herleiten. Durch Anfügung der letzten Schlüsse von  $H$  gewinnen wir eine Herleitung, die höchstens einen Schnitt besitzt. Da es in  $H$  keinen Schnitt maximalen Ranges gibt, hat die so umgewandelte Herleitung einen kleineren Rang als  $H$ , ist also nach Induktionsvoraussetzung auf eine schnittfreie Form zu bringen.

*(Eingegangen am 18. Juli 1952)*



# Separation der Variablen in HILBERTSchen Räumen\*).

Von

HEINZ OTTO CORDES in Göttingen.

Die explizite Bestimmung der Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen gelingt fast nur, wenn es möglich ist, mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen das Problem auf eindimensionale Eigenwertprobleme zurückzuführen. Dabei begegnen häufig Aufgaben, wie etwa das folgende, zuerst von HILBERT behandelte Eigenwertproblem, das ich in der Einleitung als Beispiel zur Erläuterung der Fragestellung benutzen möchte.

$$(0.1) \quad (b(x) \alpha(y) - a(x) \beta(y)) u = \lambda \left\{ \alpha(y) \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \pi \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}$$

im Gebiet  $G: x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2$  mit den Randbedingungen

$$u(x_1, y) = u(x_2, y) = 0, \quad u(x, y_1) = u(x, y_2) = 0.$$

Dabei seien  $p(x), a(x), b(x)$  in  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $\pi(y), \alpha(y)$  und  $\beta(y)$  dagegen in  $y_1 \leq y \leq y_2$  analytische Funktionen, es gelte  $p(x) > 0, a(x) > 0, \pi(y) > 0, \alpha(y) > 0$ . Dieses Problem ist offensichtlich nach Division durch  $a(x) \alpha(y)$  von der Form

$$(0.2) \quad (C_x + C_y) u = \lambda (D_x + D_y) u$$

( $C_x u, D_x u$  und  $C_y u, D_y u$  lineare Differentialausdrücke, die nur Differentiationen nach  $x$  bzw.  $y$  enthalten und deren Koeffizienten nur von der einen Variablen  $x$  bzw.  $y$  abhängen).

Durch den Separationsansatz  $u(x, y) = u^1(x) u^2(y)$  folgen aus (0.1) die Relationen

$$(0.3) \quad \begin{aligned} b(x) u^1 &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u^1}{\partial x} \right) + \mu a(x) u^1, & u^1(x_1) &= u^1(x_2) = 0 \\ -\beta(y) u^2 &= \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \pi \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) - \mu \alpha(y) u^2, & u^2(y_1) &= u^2(y_2) = 0, \end{aligned}$$

aus (0.2) allgemein aber die Relationen

$$(0.4) \quad \begin{aligned} C_x u &= \lambda D_x u + \mu u \\ C_y u &= \lambda D_y u - \mu u. \end{aligned}$$

Soll nun der Separationsansatz für ein solches Eigenwertproblem sinnvoll sein, so ist es hauptsächlich von Bedeutung zu wissen, ob die durch ihn gewonnenen Eigenfunktionen *vollständig* sind, ob es also möglich ist, willkürliche Funktionen nach ihnen in eine Reihe oder wenigstens ein Integral zu entwickeln. Für eine gewisse Klasse der Probleme (0.2), z. B. für die Separation der Wellengleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  in Rechteck- oder Kreisgebieten, und überhaupt immer dann, wenn wenigstens einer der Ausdrücke  $C_x u, C_y u, D_x u, D_y u$  sich auf die Multiplikation von  $u$  mit einer Konstanten reduziert, ist

\*) Diese Arbeit wurde von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

eine Antwort auf diese Frage fast trivialerweise zu geben. Im Allgemeinfalle jedoch wird sie zu einem Problem, welches in der älteren und neueren Literatur mehrfach behandelt wurde und bisher nicht allgemein gelöst ist. Den ersten Vollständigkeitsbeweis dieser Art gab G. LAMÉ [10] im Jahre 1838 für die gewöhnlichen, LAMÉschen Produkte, die bei der Separation des ersten Randwertproblems der Potentialgleichung in einem Rotationsellipsoid für ein Problem der Form (0.2) als Eigenfunktionen auftreten<sup>1</sup>. FELIX KLEIN zeigte 1881 mit Hilfe seines Oszillationstheorems die Existenz unendlich vieler Eigenprodukte auch für die bei der Lösung der ersten Randwertaufgabe von  $\Delta u = 0$  in Zyklidensechseflächen entstehenden Eigenwertprobleme der Form (0.2), ohne jedoch die Vollständigkeit dieser Produkte herzuleiten. Diese Vollständigkeit wurde in den Jahren 1907 bis 1910 in mehreren Arbeiten und unabhängig voneinander durch A. C. DIXON [5], E. HILB [7], [8] und D. HILBERT [9] bewiesen. DIXON und HILBERT betrachten dabei etwas allgemeinere Klassen von Problemen, die bei der Separation in reguläre, STURM-LIOUVILLESche Eigenwertprobleme bzw. in Eigenwertprobleme zerfallen, deren Auflösung auf die Behandlung einer Integralgleichung vom polaren Typus [9] zurückgeführt werden kann. [Das von HILBERT behandelte Problem hat die Gestalt (0.1).] HILB und HILBERT benutzen als wesentliches Beweiselement die HILBERTsche Integralgleichungstheorie, während DIXON eine direkte Herleitung der Vollständigkeit mit Hilfe des Residuensatzes für analytische Funktionen zweier Veränderlicher gibt. Das von HILB in [8] behandelte Problem ist das in spezieller Weise entartete KLEINSche und besitzt als einziges, bisher behandeltes Problem ein rein kontinuierliches Spektrum, so daß eine Integraldarstellung resultiert. Endlich wurden durch C. C. CAMP [2], [3], [4] in den Jahren 1923 bis 1942 eine Reihe von Vollständigkeitsbeweisen für Eigenprodukte partieller Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben. Die dort verwandte Beweismethode ist mit der DIXONschen vergleichbar. Ausführliche, formale Untersuchungen der Separation von Randwertproblemen der Potentialgleichung finden sich vor allem in den Büchern von BÔCHER [1] und HAENTZSCHEL [6] sowie bei WANGERIN [15].

In dieser Arbeit mache ich den Versuch, die geschilderten Probleme vom Standpunkt der *allgemeinen Spektraltheorie* anzugreifen. Es handelt sich dann um die Spektraltheorie eines Problems der Form

$$(0.5) \quad (C^1 + C^2) u = \lambda (D^1 + D^2) u,$$

wo die linearen Operatoren  $C^1, C^2, D^1, D^2$  in gewissen Teilräumen eines HILBERTschen Raumes erklärt sind. Der typische Separationsansatz würde jetzt darin bestehen, daß man  $u = u^1 u^2$  ansetzt, wobei  $u^1$  und  $u^2$  Elemente zweier geeigneter Räume  $\mathfrak{S}^1$  bzw.  $\mathfrak{S}^2$  sind und die Komposition  $u^1 u^2$  noch näher definiert werden muß. Zur Definition von  $u^1 u^2$  läßt sich eine Verallgemeinerung des durch J. v. NEUMANN [12] für BANACH-Räume eingeführten *direkten Produktes*, dessen Theorie vorwiegend durch SCHATTEN ausgebaut wurde, heranziehen. (Vergleiche insbesondere [14] und die dort angegebene Literatur.) Man weiß, daß für die Spektraltheorie linearer Operatoren in HILBERT-Räumen der Begriff der Selbstadjungiertheit bzw. der wesentlichen Selbstadjungiertheit entscheidend ist. Es erscheint daher tunlich, das skizzierte Problem in folgende beiden Fragen aufzuspalten:

<sup>1</sup>) Wir wollen im folgenden Eigenelemente in Produktform „Eigenprodukte“ benennen.

1. Welche Bedingungen für die in der Gleichung (0.5) auftretenden Operatoren sind zu stellen, damit dieses Problem in einem passend eingeführten Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert wird?

2. Unter welchen noch zusätzlich zu stellenden Bedingungen können Entwicklungssätze oder Integraldarstellungssätze willkürlicher Elemente des Raumes  $\mathfrak{H}$  nach Eigenprodukten ausgesprochen werden?

In vorliegender Arbeit soll versucht werden, eine möglichst umfassende Antwort auf die Frage 1 zu geben. Wir werden in einer späteren Arbeit zeigen, daß die Antwort auf diese Frage den Schlüssel auch zur Beantwortung der Frage 2 liefert.

Im Kapitel I ist die oben erwähnte Verallgemeinerung des v. NEUMANNschen Direkten-Produkt-Kalküls vorgenommen, und zwar vorwiegend in den Paragraphen 3 und 4. Die ersten beiden Paragraphen dieses Kapitels können als Beiträge zur Theorie der unendlichdimensionalen, separablen Räume mit mehreren Metriken charakterisiert werden (hier  $\mathfrak{P}$ -Systeme genannt), deren Kreuzprodukte eben später definiert werden. Die am Schluß des § 1.2 aufgestellten Hilfssätze (insbesondere der Hilfssatz 1. 2. 6) verdienen vielleicht auch unabhängig vom Ergebnis dieser Arbeit einige Beachtung. Vor allem erscheint es mir leicht möglich, die dort verwandten Ansätze, z. B. in Hinsicht auf die Störungstheorie der Spektralzerlegung, bedeutend weiter auszubauen, als dieses hier geschehen konnte.

Das Kapitel II bringt in seinem ersten Paragraphen die Definition des verallgemeinerten, separierbaren Operators  $A$  in  $\mathfrak{A}$  und die Erläuterung derselben an dem von HILB in [7] und [8] behandelten Beispiel. In § 2 werden gewisse einfachere Eigenschaften von  $A$  in  $\mathfrak{A}$ , wie Hermitezität, Fortsetzbarkeit usw. hergeleitet, und zwar zumeist aus entsprechenden Eigenschaften der Komponenten, in die  $A$  in  $\mathfrak{A}$  durch die Separation zerfällt. Im Paragraphen 3 werden vier Kriterien für die wesentliche Selbstadjungiertheit von  $A$  in  $\mathfrak{A}$  bewiesen, ein fünftes wird formuliert. Zum Schluß wird — als technisches Hilfsmittel zur Anwendung der Kriterien — ein Satz bewiesen, der es erlaubt, die Kriterien I bis IV unter gewissen Zusatzforderungen anzuwenden, wenn die Komponenten von  $A$  in  $\mathfrak{A}$  nur wesentlich selbstadjungiert sind.

Die elementaren Rechenregeln für das Rechnen in  $\mathfrak{P}$ -Systemen und in ihren Kreuzprodukten sind in je einer Tabelle in § 1 und § 4 des ersten Kapitels zusammengestellt. Die Ausführungen des § 1.2 werden erst nach und nach und vorwiegend nur in den drei letzten Paragraphen des Kapitels II benötigt, während ihre Kenntnis zum Verständnis des im Kapitel I aufgestellten Kalküls nicht erforderlich ist. In einer späteren Arbeit werde ich allgemeine Entwicklungssätze und Integraldarstellungssätze für separierbare Eigenwertprobleme beweisen. Die Anregung zur Verwendung des Direkten-Produkt-Kalküls für das aufgezeigte Problem verdanke ich Herrn Professor RELICH.

### I. Vorbereitungen.

#### § 1. $\mathfrak{P}$ -Systeme, Definition und Grundtatsachen.

##### Definition 1.1.1:

a) Es sei  $\mathfrak{H}$  ein HILBERT-Raum<sup>1a)</sup> mit dem Skalarprodukt  $(u, v)$  und der

<sup>1a)</sup> Das Unendlichkeitsaxiom ist für die Überlegungen dieses Kapitels (mit Ausnahme von Hilfssatz 1. 3. 2. und (1. 1. V)) nicht erforderlich. Man überzeuge sich davon, daß dieselben auch für  $n$ -dimensionale, euklidische Räume wortwörtlich gleichlautend durchführbar sind. Hilfssatz 1. 3. 2. und (1. 1. V) würden eine auf der Hand liegende Änderung erfahren müssen.

*Metrik  $\|u\|$ . In  $\mathfrak{H}$  seien  $S'$  und  $T'$  zwei hermitesche, positive, beschränkte Operatoren. Es gelte  $S' + T' = 1$ , also  $0 \leq S' \leq 1$ ,  $0 \leq T' \leq 1$ . Mit Hilfe der Operatoren  $S'$  und  $T'$  bilde man für  $u, v \in \mathfrak{H}$ :*

$$(1.1) \quad (u, v)_s = (u, S' v), \quad (u, v)_t = (u, T' v).$$

b) Die Gesamtheit der Vektoren aus  $\mathfrak{H}$  mit dem Skalarprodukt  $(u, v)_s$  und der durch dieses induzierten, nicht notwendig definiten Metrik  $\|u\|_s = [(u, u)_s]^{\frac{1}{2}}$  werde als neuer, allgemein metrischer, (im allgemeinen nicht abgeschlossener) Raum betrachtet und mit  $\mathfrak{H}'_s$  bezeichnet. Ebenso bezeichne man den durch das Skalarprodukt  $(u, v)_t$  und die zugehörige Metrik  $\|u\|_t = [(u, u)_t]^{\frac{1}{2}}$  metrisierten Raum  $\mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{H}'_t$ .

c) Falls  $(u, v)_s$  oder  $(u, v)_t$  definit ist, werde die Abschließung von  $\mathfrak{H}'_s$  (bzw.  $\mathfrak{H}'_t$ ) mit  $\mathfrak{H}_s$  (bzw.  $\mathfrak{H}_t$ ) bezeichnet.

d) Das System der so erzeugten drei Räume  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_s$ ,  $\mathfrak{H}_t$  oder — bei Nichtexistenz von  $\mathfrak{H}_s$  bzw.  $\mathfrak{H}_t$  — der Räume  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_s$ ,  $\mathfrak{H}_t$ , bzw.  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_s$ ,  $\mathfrak{H}'_t$ , bzw.  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}'_s$ ,  $\mathfrak{H}_t$  soll ein „ $\mathfrak{P}$ -System“ heißen und mit  $\mathfrak{P}_S^{(S')}$  oder auch kurz  $\mathfrak{P}$  bezeichnet werden. Im Falle der Existenz von  $\mathfrak{H}_s$  (d. h. der Definitheit von  $S'$ ) heiße  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit, im Falle der Existenz von  $\mathfrak{H}_t$  (d. h. der Definitheit von  $T'$ ) dagegen  $t$ -definit. Existieren  $\mathfrak{H}_s$  und  $\mathfrak{H}_t$  beide, so soll  $\mathfrak{P}$  doppelt definit genannt werden.

e)  $S$  und  $T$  seien (bei  $s$ - (bzw.  $t$ -) Definitheit) von  $\mathfrak{P}$  die in  $\mathfrak{H}_s$  (bzw.  $\mathfrak{H}_t$ ) abgeschlossenen Erweiterungen der Operatoren  $S'$  und  $T'$ , die als beschränkte Operatoren in  $\mathfrak{H}$  wegen  $\mathfrak{H}'_s \subseteq \mathfrak{H}_s$  bzw.  $\mathfrak{H}'_t \subseteq \mathfrak{H}_t$  auch Operatoren in  $\mathfrak{H}_s$  und  $\mathfrak{H}_t$  repräsentieren. (Nähere Begründung der Abschließbarkeit siehe (I.VI).)

f) Im Falle ihrer Existenz seien  $S^{-1}$  und  $T^{-1}$  mit  $L$  und  $M$ , ihre Definitionsbereiche mit  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{M}$  bezeichnet.

### Definition 1.1.2:

Eigenschaften von Vektoren, Vektorenmengen oder Operatoren in bezug auf das Skalarprodukt  $(u, v)_s$  sollen künftig stets mit dem Vorsatz „ $s$ -“ verwandt werden, also z. B.  $s$ -Beschränktheit,  $s$ -Hermitizität,  $s$ -Selbstadjungiertheit usw., während die entsprechenden Eigenschaften in bezug auf  $(u, v)_t$  mit dem Vorsatz „ $t$ -“, diejenigen in bezug auf  $(u, v)$  ohne weiteren Vorsatz gebraucht werden sollen. Die Adjungierte eines Operators  $A$  in bezug auf die Skalarprodukte  $(u, v)$ ,  $(u, v)_s$ ,  $(u, v)_t$  werden wir bzw. mit  $A^*$ ,  $A^{(s)}$  und  $A^{(t)}$  bezeichnen. Zur Unterscheidung der Konvergenz, Orthogonalität usw. bezüglich der drei Metriken sollen die Symbole

$$\begin{aligned} \varphi_n &\xrightarrow{s} \varphi, & \varphi_n &\xrightarrow{t} \varphi, & \varphi_n &\rightarrow \varphi \\ \varphi &\perp_s \psi, & \varphi &\perp_t \psi, & \varphi &\perp \psi \\ \mathfrak{M} \oplus_s \mathfrak{N}, \dots, & \mathfrak{M} \oplus_t \mathfrak{N}, \dots, & \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r, \dots, \\ \lim_{(s) n \rightarrow \infty} \varphi_n, & \dots \text{ usw.} \end{aligned}$$

dienen.

(Mit  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  ist z. B. gemeint:  $\varphi_n \in \mathfrak{H}$ ,  $\varphi \in \mathfrak{H}$ ,  $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ). In ähnlicher Weise sollen Begriffe wie  $o$ -Beschränktheit usw., Symbole wie  $\sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r$ ,  $\lim_{(o) n \rightarrow \infty} \varphi_n$  sich auf die Metrik  $\|u\|_o$  des später (§ 1.3) zu definierenden Raumes  $\mathfrak{H}_o$  beziehen.

Die endlich oder unendlich vielen Vektoren  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  aus  $\mathfrak{H}$  sollen in  $\mathfrak{P}$  totalorthogonal heißen, wenn gilt

$$(1.2) \quad (\varphi_r, \varphi_\mu) = (\varphi_r, \varphi_\mu)_s = (\varphi_r, \varphi_\mu)_t = 0, \quad r \neq \mu.$$

Definitionsgemäß besteht jedes  $\mathfrak{P}$ -System aus drei Räumen, zwischen deren Elementen gewisse Identifizierungen vorgenommen worden sind. Während nun in jedem einzelnen Raum des Systems die üblichen, für HILBERT-Räume bzw. allgemein metrische Räume bekannten Gesetzmäßigkeiten Gültigkeit haben, macht es die Tatsache, daß nach vorgenommener Identifizierung gewisse Elemente  $\varphi$  allen drei Räumen angehören, notwendig, eine Anzahl einfacher weiterer Rechenregeln herauszustellen. Wegen der Symmetrie der Definitionen 1.1.1. und 1.1.2. in bezug auf Vertauschung von  $S'$  und  $T'$  werden wir uns erlauben, die in diesen Paragraphen noch zu bringenden Sätze, die sich allein auf eines der Skalarprodukte  $(u, v)_s, (u, v)_t$  beziehen, nur für  $(u, v)_s$  zu formulieren und zu beweisen, sie alsdann aber auch für  $(u, v)_t$  als bewiesen anzusehen. Wir geben zunächst die Regeln ohne Beweis:

I. Sei  $\varphi_n$  aus  $\mathfrak{H}$ .  $\varphi_n$  ist dann und nur dann konvergent, wenn es sowohl  $s$ -konvergiert, als auch  $t$ -konvergiert. Dann und nur dann gilt  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , wenn sowohl  $\varphi_n \rightarrow \varphi_s$  als auch  $\varphi_n \rightarrow \varphi_t$  gilt.

II. Im Falle der  $s$ -Definitheit von  $\mathfrak{P}$  wird beim Abschließen von  $\mathfrak{H}'_s$  zum Raum  $\mathfrak{H}_s$ , d. h. beim Übergang von den Elementen aus  $\mathfrak{H}'_s$  zu den Klassen äquivalenter Fundamentalfolgen (in bezug auf  $\|u\|_s$ ) die Identifizierung der Räume  $\mathfrak{H}'_s$  und  $\mathfrak{H}$  nicht verändert oder gestört. Jeder Klasse  $\tilde{\gamma}$  von in bezug auf  $\|u\|_s$  äquivalenten Fundamentalfolgen entspricht genau eine Klasse  $\tilde{\gamma}_s$  in bezug auf  $\|u\|_s$  äquivalenter Fundamentalfolgen, derart, daß jede Folge  $u_n$  aus  $\tilde{\gamma}$  auch der Klasse  $\tilde{\gamma}_s$  angehört. Umgekehrt entspricht jedem  $\tilde{\gamma}_s$  höchstens ein  $\tilde{\gamma}$  derart, daß jede Folge  $u_n$  aus  $\tilde{\gamma}_s$ , für die  $u_n \in \mathfrak{H}$  gilt und welche auch in  $\mathfrak{H}$  konvergent ist, der Klasse  $\tilde{\gamma}$  angehört, und zwar gibt es genau dann zu  $\tilde{\gamma}_s$  solchermaßen ein  $\tilde{\gamma}$ , wenn die Folgen  $u_n$  aus  $\tilde{\gamma}_s$  gegen ein Element  $\varphi$  aus  $\mathfrak{H}'_s$   $s$ -konvergieren. In diesem Falle streben alle  $u_n$  aus  $\tilde{\gamma}$  mit  $u_n$  aus  $\mathfrak{H}$ ,  $\|u_n - \varphi\|_s < \varepsilon, n, m > N(\varepsilon)$ , gegen dieses Element  $\varphi$ , welches zufolge der Identifizierung von  $\mathfrak{H}'_s$  mit  $\mathfrak{H}$  ja auch Element von  $\mathfrak{H}$  ist.

III. Sei  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit. Aus  $\varphi_n \in \mathfrak{H}$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  und der Konvergenz von  $\varphi_n$  in  $\mathfrak{H}$  folgt dann  $\varphi \in \mathfrak{H}$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ .

IV. Wenn  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{H}$  dicht ist, dann ist  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{H}_s$   $s$ -dicht.

V.  $\mathfrak{H}_s$  und  $\mathfrak{H}_t$  sind separabel und unendlichdimensional, also HILBERT-Räume, falls sie existieren, d. h. falls  $\mathfrak{P}$   $s$ -(bzw.  $t$ -) definit ist.

VI. Die Operatoren  $S'$  und  $T'$  sind in  $\mathfrak{H}'_s$   $s$ -beschränkt und  $s$ -hermitesch, es gilt  $0 \leq (u, S' u)_s \leq (u, u)_s$ ,  $0 \leq (u, T' u)_s \leq (u, u)_s$ . Ist  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit, so gilt dasselbe auch für den durch Abschließen von  $S'$  in  $\mathfrak{H}_s$  entstehenden Operator  $S$ . In diesem Falle gilt sogar  $0 < (u, S u)_s \leq (u, u)_s$ , falls nur  $u \neq 0$ ,  $u \in \mathfrak{H}_s$  ist. Die Reziproke  $L = S^{-1}$  existiert dann eindeutig und ist selbstadjungiert, ihr Definitionsbereich  $\mathfrak{L}$  ist ganz in  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s^{(2)}$  enthalten und noch dicht.

VII. Es gilt

$$(1.3) \quad \begin{aligned} (u, v)_s &= (S u, v) && \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}_s, v \text{ aus } \mathfrak{H}, \\ (u, v) &= (L u, v)_s && \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{L}, v \text{ aus } \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Diese Gleichheit ist natürlich allein als Mengengleichheit aufzufassen.

VIII. Zu jedem endlichdimensionalen Unterraum  $\mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{H}$  gibt es stets ein in  $\mathfrak{R}$  vollständiges Totalorthogonalsystem (siehe Def. 1.1.2).

*Beweis der Behauptungen I bis VIII.*

I. Auf Grund der Beziehung  $S' + T' = 1$  folgt für  $u, v$  aus  $\mathfrak{H}$ :  $(u, v) = (u, v)_s + (u, v)_t$ . Zudem gilt

$$(1.4) \quad \|u\|_s^2 \geq 0, \quad \|u\|_t^2 \geq 0,$$

da  $S', T'$  nach Voraussetzung positiv sind.

IV, V. Der Beweis von IV und V ist klar.

II. (Daß alle Folgen  $u_n$  einer Klasse  $\mathfrak{F}$  auch bezüglich  $\|u\|_s$  äquivalent sind, folgt wie bei I) aus der Beziehung (1.4). Gilt andererseits  $\|u_n - v_n\|_s < \varepsilon$ ,  $n > N(\varepsilon)$ ,  $u_n, v_n \in \mathfrak{H}'$  (d. h.  $u_n, v_n \in \mathfrak{H}$ ), sowie  $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ ,  $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$ ,  $n, m > N(\varepsilon)$ , so folgt für  $w$  aus  $\mathfrak{H}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n, S' w) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n, w)_s = 0.$$

Andererseits aber gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n, S' w) = (u - v, S' w)$ , wo  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ,  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  ist. Also folgt  $(u - v, S' w) = 0$ , da aber  $\mathfrak{B}$  nach Voraussetzung  $s$ -definit ist, ist  $S' \mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{H}$  dicht, und es folgt  $u - v = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$ .

Somit gilt auch  $\|u_n - v_n\| < \varepsilon$  für alle  $n > N_1(\varepsilon)$ , und es sind die Folgen  $u_n$  und  $v_n$  auch bezüglich der Metrik  $\|u\|$  äquivalent. Setzt man  $u = v = \varphi$ , so gilt auch in  $\mathfrak{H}_s$ :  $u_n \rightarrow \varphi$ ,  $v_n \rightarrow \varphi$ . Wenn also einem  $\mathfrak{F}_s$  ein  $\mathfrak{F}$  entspricht, so  $s$ -konvergieren die Folgen der Klasse  $\mathfrak{F}_s$  auch gegen ein Element aus  $\mathfrak{H}_s$ . Da das Umgekehrte trivial ist, wäre damit II. bewiesen.

III. Unter diesen Voraussetzungen folgt die Existenz eines Vektors  $\psi$  aus  $\mathfrak{H}$  mit  $\|\psi - \varphi_n\| < \varepsilon$ ,  $n > N(\varepsilon)$ , also auch  $\|\psi - \varphi_n\|_s < \varepsilon$ ,  $n > N(\varepsilon)$ . Somit gilt  $\varphi_n \rightarrow \psi$ . Da andererseits gilt  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , folgt  $\varphi = \psi$ , also  $\varphi \in \mathfrak{H}$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ .

VI. Für die Operatoren  $S'$  und  $T'$ , die im Raum  $\mathfrak{H}$  erklärt sind, folgt nach einem bekannten Satz aus  $\|S'\| \leq 1$ ,  $\|T'\| \leq 1$  die Gültigkeit der Relationen

$$(1.5) \quad \begin{aligned} 0 &\leq (S' u, S' u) \leq (S' u, u) \\ 0 &\leq (S' u, T' u) \leq (S' u, u) \end{aligned} \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_t.^2)$$

Das bedeutet

$$(1.6) \quad \begin{aligned} 0 &\leq (u, S' u)_s \leq (u, u)_s \\ 0 &\leq (u, T' u)_s \leq (u, u)_s \end{aligned} \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

Wie oben (1.5) folgt auch  $(u, S'^2 u) \leq (u, S' u)$ ,  $(u, S' T'^2 u) \leq (u, S' u)$ , für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}$ , also

$$(1.7) \quad \|S' u\|_s \leq \|u\|_s, \quad \|T' u\|_s \leq \|u\|_s$$

für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}$ .

Sowohl  $S'$  als auch  $T'$  sind daher  $s$ -beschränkt. Offenbar ist zufolge der Vertauschbarkeit des Operators  $S'$  mit den Operatoren  $S'$  und  $T' = 1 - S'$  sowohl  $S'$ , als auch  $T'$  in  $\mathfrak{H}$   $s$ -hermitesch. Ist daher  $\mathfrak{B}$   $s$ -definit, so existiert die  $s$ -Abschließung  $S$  von  $S'$ , es gilt:

$$(1.8) \quad \|S\|_s \leq 1 \text{ und } 0 \leq (u, S u)_s \leq (u, u)_s \text{ für alle } u \text{ aus } \mathfrak{H}_s.$$

Aus  $S u = 0$  für irgendein  $u$  aus  $\mathfrak{H}_s$  folgt dann  $0 = (v, S u)_s = (S' v, u)_s$  für jedes  $v$  aus  $\mathfrak{H}$ . Da aber bei  $s$ -Definitheit die Form  $(u, S' v)$  positiv definit ist,

folgt die Existenz der Reziproken  $(S')^{-1}$  in einem dichten Definitionsbereich  $\mathfrak{D}_{(S')^{-1}} = S' \mathfrak{H}$ . Da nach V. dann auch  $S' \mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{H}_s$   $s$ -dicht ist, folgt  $u = 0$ . Da nun schon gezeigt wurde, daß  $S$   $s$ -beschränkt und  $s$ -hermitesch ist, besitzt dieser Operator auch in  $\mathfrak{H}_s$  eine Spektralzerlegung, die Null nicht zum Punkteigenwert haben kann, es gilt daher

$$(1.9) \quad 0 < (u, S u)_s \leq (u, u)_s \quad \text{für alle } u \neq 0 \text{ aus } \mathfrak{H}_s.$$

Zudem existiert auch die Reziproke  $L = S^{-1}$  des Operators  $S$  in einem  $s$ -dichten Definitionsbereich  $\mathfrak{L}$ . Selbstverständlich ist  $L$  in  $\mathfrak{L}$   $s$ -selbstadjungiert. Offensichtlich ist  $(S')^{-1}$  in  $\mathfrak{D}_{(S')^{-1}}$  Einschränkung von  $L$  in  $\mathfrak{L}$ , also ist  $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}$  auch dicht. Es gilt aber sogar  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ . Denn man hat für  $u$  aus  $\mathfrak{L}$  die Beziehung  $u = S f$ ,  $f \in \mathfrak{H}_s$ . Sei nun  $f_n$  eine Folge aus  $\mathfrak{H}$  mit  $f_n \xrightarrow{s} f$ . Man setze alsdann  $u_n = S' f_n$ .

Offenbar gilt  $u_n \in \mathfrak{H}$ . Man hat daher

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \|S' (f_n - f_m)\|^2 = (f_n - f_m, S' (f_n - f_m))_s \\ &\leq \|f_n - f_m\|_s^2 < \varepsilon, \quad n, m > N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Also konvergiert  $u_n$  auch in  $\mathfrak{H}$ . Da  $u_n$  aber in  $\mathfrak{H}_s$  gegen  $u = S f$  strebt, folgt nach III. auch  $u_n \rightarrow u$ . Folglich ist  $u$  aus  $\mathfrak{H}$ , und somit gilt  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ . Damit wäre auch V. bewiesen.

VII. Es ist laut Definition

$$(1.12) \quad (u, v)_s = (S' u, v) \quad \text{für } u, v \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

Sei nun  $u$  beliebig aus  $\mathfrak{H}_s$ ,  $v$  aus  $\mathfrak{H}$  vorgegeben, so gibt es eine Folge  $u_n$  von Vektoren aus  $\mathfrak{H}$  mit  $u_n \xrightarrow{s} u$ . Wie beim Beweis von VI. bereits abgeleitet, folgt aber daraus nunmehr  $S' u_n \rightarrow S u$ . Trägt man dieses in (1.12) ein und vollzieht den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ , so ergibt sich

$$(1.13) \quad (u, v)_s = (S u, v) \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{H}_s, v \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

Ersetzt man hierin noch  $S u$  durch  $u$ , so folgt

$$(1.14) \quad (u, v) = (L u, v)_s \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{L}, v \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

VIII. Zum Beweis von VIII. hat man nur zu bemerken, daß  $(u, u)$  in dem euklidischen Raum  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{H}$  mit der positiv definiten Metrik  $\|u\| = [(u, u)]^{\frac{1}{2}}$  eine hermitesche Form darstellt, die nach dem bekannten Satz über die Hauptachsentransformation ein in  $\mathfrak{R}$  vollständiges, orthonormiertes System von Vektoren besitzt, bezüglich derer sie sich als Summe von Quadraten darstellt. Sei  $\varphi_r$ ,  $r = 1, \dots, n$  ein solches System, so gilt offenbar

$$(1.15) \quad \begin{aligned} (\varphi_r, \varphi_\mu) &= \delta_{r\mu} \\ (\varphi_r, \varphi_\mu)_s &= \lambda_r \delta_{r\mu} \quad (0 \leq \lambda_r \leq 1) \\ (\varphi_r, \varphi_\mu)_t &= (\varphi_r, \varphi_\mu) - (\varphi_r, \varphi_\mu)_s = (1 - \lambda_r) \delta_{r\mu}. \end{aligned}$$

Also ist nach Definition 1.1.2 das System der  $\varphi_r$ ,  $r = 1, \dots, n$ , totalorthogonal, und es gilt Vollständigkeit der  $\varphi_r$  in bezug auf jede der Metriken  $\|u\|$ ,  $\|u\|_s$  und  $\|u\|_t$ , die nur in  $\mathfrak{R}$  definit ist.

## § 2. Operatoren in $\mathfrak{P}$ -Systemen.

Solange man beim Rechnen mit Operatoren in  $\mathfrak{P}$  in einem der drei Räume  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_s$ ,  $\mathfrak{H}_t$  allein sich bewegt, bleiben selbstverständlich alle Regeln für das Rechnen mit Operatoren in HILBERT-Räumen auch hier in Kraft. Wir haben



aber schon bei der Beschäftigung mit den Operatoren  $S'$  und  $T'$  bemerkt, daß durch einen Operator im Raum  $\mathfrak{H}$  stets auch eine entsprechende Zuordnung der Elemente der beiden anderen Räume, also je ein Operator in diesen induziert wird. Wir wollen bei unserer bisherigen stillschweigenden Gepflogenheit bleiben und derartige Operatoren nicht unterscheiden, sofern nicht Veränderungen an den Definitionsbereichen vorgenommen worden sind. Hingegen machen diese Wechselbeziehungen folgende Betrachtungen notwendig:

**Definition 1.2.1:**

Sei  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  ein Operator des Raumes  $\mathfrak{H}$ ,  $C$  in  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{H}_s$  ein Operator des Raumes  $\mathfrak{H}_s$ . Dann erkläre man, genau wie im Falle zweier Operatoren desselben Raumes, das Produkt  $CA$  in  $\mathfrak{D}_{CA}$  folgendermaßen:  $\mathfrak{D}_{CA}$ : Alle  $u$  aus  $\mathfrak{A}$  mit  $Au$  aus  $\mathfrak{C}$ ;  $CAu = C(Au)$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{CA}$ .  $CA$  ist als Operator des Raumes  $\mathfrak{H}_s$  zu betrachten.

Insbesondere sind damit zu Operatoren  $A$  in  $\mathfrak{A}$  des Raumes  $\mathfrak{H}$  bei  $s$ - (bzw.  $t$ -) definitem  $\mathfrak{P}$  die Operatoren  $LA$  bzw.  $MA$  in dieser Weise definiert.

**Hilfssatz 1.2.1:**

Sei  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit. Wenn dann  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  hermitesch ist und  $LA$   $s$ -dicht definiert ist, dann ist  $LA$   $s$ -hermitesch.

Der Beweis folgt unter Benutzung von (1.3).

**Hilfssatz 1.2.2:**

Es sei  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit. Wenn dann  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  selbstadjungiert und  $\lambda$  ein Punkt der Resolventenmenge von  $A$  ist, dann folgt

$$(1.16) \quad \begin{aligned} L(A - \lambda) \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)} &= \mathfrak{H}_s \\ (L(A - \lambda))^{(s)} &= L(A - \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Die Einschränkung von  $A$  in  $\mathfrak{A}$  auf den Definitionsbereich  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  ist noch wesentlich selbstadjungiert. Gibt es zu einem  $f$  aus  $\mathfrak{H}_s$  ein  $g$  aus  $\mathfrak{H}$ , so daß gilt:  $(f, L(A - \lambda)u)_s = (g, u)$  für  $u \in \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ , so folgt  $f \in \mathfrak{A}$  und  $(A - \bar{\lambda})f = g$ .

*Beweis:* Es sei  $\lambda$  ein Punkt der Resolventenmenge von  $A$  in  $\mathfrak{A}$ . Dann ist  $(A - \lambda)^{-1}$  beschränkt und überall in  $\mathfrak{H}$  erklärt. Es gilt  $(A - \lambda)\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$ . Nun ist  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  die Menge aller  $u$  aus  $\mathfrak{A}$  mit  $(A - \lambda)u$  aus  $\mathfrak{Q}$ . Es folgt

$$(1.17) \quad \mathfrak{Q} = (A - \lambda) \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$$

und folglich

$$(1.18) \quad L\mathfrak{Q} = L(A - \lambda) \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)} = \mathfrak{H}_s.$$

Sei  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ , dann existiert  $(A - \lambda)u$  und ist ein Element aus  $\mathfrak{H}$ . Man wähle eine Folge  $f_n$  von Vektoren aus  $\mathfrak{Q}$  mit  $f_n \rightarrow (A - \lambda)u$  und bezeichne  $(A - \lambda)^{-1}f_n = u_n$ . Wegen der Beschränktheit von  $(A - \lambda)^{-1}$  konvergiert  $u_n$  in  $\mathfrak{H}$  gegen  $u$ . Wegen (1.17) aber liegt  $u_n$  in  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ , also ist  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  in  $\mathfrak{A}$ , also auch in  $\mathfrak{H}$  dicht, also endlich ist  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  auch in  $\mathfrak{H}_s$   $s$ -dicht. Zudem läßt sich wegen der gleichzeitigen Konvergenz von  $u_n$  und  $Au_n = f_n + \lambda u_n$  die Einschränkung von  $A$  in  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  durch Abschließen wieder auf  $A$  in  $\mathfrak{A}$  fortsetzen. Also folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit dieser Einschränkung. Weiter hat man für  $u \in \mathfrak{D}_{L(A - \bar{\lambda})}$ ,  $v \in \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ :

$$(u, L(A - \lambda)v)_s = (u, (A - \lambda)v) = ((A - \bar{\lambda})u, v) = (L(A - \bar{\lambda})u, v)_s,$$



also  $(L(A - \lambda))^{[s]} \supseteq L(A - \bar{\lambda})$ . Sei  $f$  aus  $\mathfrak{F}_s$ ,  $g$  aus  $\mathfrak{F}_s$  und gelte

$$(1.19) \quad (f, L(A - \lambda) u)_s = (g, u)_s$$

für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ .

Wegen  $L\mathfrak{Q} = \mathfrak{F}_s$  ist es dann möglich,  $g = Lv$  zu setzen, es gilt  $v \in \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{H}$ , also gibt es dann wiederum ein  $w$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \bar{\lambda})}$ , so daß  $v = (A - \bar{\lambda})w$  ist. Denn mit  $\lambda$  ist auch  $\bar{\lambda}$  Punkt der Resolventenmenge von  $A$ . Trägt man dieses in (1.19) ein, so ergibt sich

$$(f, L(A - \lambda) u)_s = (L(A - \bar{\lambda}) w, u)_s = (w, L(A - \lambda) u)_s.$$

Aus (1.18) folgt nun aber sofort  $f = w$ , d. h.  $f$  aus  $\mathfrak{A}$ ,  $(A - \bar{\lambda})f = v$  aus  $\mathfrak{Q}$ ,  $L(A - \bar{\lambda})f = g$ ,  $f$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \bar{\lambda})}$ . Also gilt auch  $(L(A - \lambda))^{[s]} \subseteq L(A - \bar{\lambda})$  und insgesamt folglich  $(L(A - \lambda))^{[s]} = L(A - \bar{\lambda})$ . Gilt endlich für  $f \in \mathfrak{F}_s$ ,  $g \in \mathfrak{F}$  und alle  $u \in \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ :  $(f, L(A - \lambda) u)_s = (g, u)$ , so gibt es ähnlich wie oben ein  $v$  mit  $g = (A - \bar{\lambda})v$ , man hat also  $(f, L(A - \lambda) u)_s = ((A - \bar{\lambda})v, u) = (v, L(A - \lambda) u)_s$  für  $u \in \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ , also  $f = v$ ,  $f \in \mathfrak{A}$ ,  $(A - \bar{\lambda})f = g$ .

### Hilfssatz 1.2.3:

Sei  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit und  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  selbstadjungiert. Dann gilt für  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  stets

$$(1.20) \quad \|(L(A - \lambda T') - \mu) u\|_s^2 \geq \mu_2^2 \|u\|_s^2 + 2\mu_2 \lambda_2 \|u\|^2,$$

(wo  $\lambda_2 = \text{Im } \lambda$ ,  $\mu_2 = \text{Im } \mu$  sei).

Fordert man noch  $\lambda_2 \mu_2 > 0$ , so ist

$$(1.21) \quad (L(A - \lambda T') - \mu) \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)} = \mathfrak{F}_s, \text{ und}$$

die Reziproke  $(L(A - \lambda T') - \mu)^{-1}$  ist überall in  $\mathfrak{F}_s$  eindeutig erklärt und  $s$ -beschränkt. Man hat alsdann die Relationen

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \|(L(A - \lambda T') - \mu)^{-1} u\|_s &\leq \frac{1}{|\mu_2|} \|u\|_s \\ \|(L(A - \lambda T') - \mu)^{-1} u\|_s &\leq (2\mu_2 \lambda_2)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_s \end{aligned} \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{F}_s.$$

*Beweis:* a) Es gilt  $(L(A - \lambda T') - \mu) = L(A - \lambda) - \mu + \lambda$ , denn es folgt aus  $S' + T' = 1$ :  $L(A - \lambda T') = L(A - \lambda + \lambda S') = L(A - \lambda) + \lambda$ , da  $(A - \lambda + \lambda S')f$  dann und nur dann in  $\mathfrak{Q}$  liegt, wenn  $(A - \lambda)f$  aus  $\mathfrak{Q}$  ist. Insbesondere hat man

$$\mathfrak{D}_{L(A - \lambda T')} = \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}.$$

b) Nun seien  $\lambda, \mu$  beliebig komplex und sei  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ,  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ ,  $u$  sei aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|(L(A - \lambda T') - \mu) u\|_s^2 &= \|((L(A - \lambda T') - \mu_1) - i\mu_2) u\|_s^2 \\ &= \|(L(A - \lambda T') - \mu_1) u\|_s^2 + \mu_2^2 \|u\|_s^2 \\ &\quad - i\mu_2 ((L(A - \lambda T') - \mu_1) u, u)_s + i\mu_2 (u, (L(A - \lambda T') - \mu_1) u)_s \\ &\geq \mu_2^2 \|u\|_s^2 - i\mu_2 \{ (u, (A - \bar{\lambda} T' - \mu_1 S') u) - (u, (A - \lambda T' - \mu_2 S') u) \} \\ &= \mu_2^2 \|u\|_s^2 + 2\mu_2 \lambda_2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Also:

$$(1.20) \quad \|(L(A - \lambda T') - \mu) u\|_s^2 \geq \mu_2^2 \|u\|_s^2 + 2\mu_2 \lambda_2 \|u\|^2 \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}.$$

c) Setzt man jetzt  $\lambda_2 \mu_2 > 0$  voraus, so folgt insbesondere  $\text{Im } \lambda = \lambda_2 \neq 0$ , d. h.  $\lambda$  gehört zur Resolventenmenge von  $A$ . Aus  $(f, (L(A - \lambda T') - \mu) u)_s = 0$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda)}$  ergäbe sich daher  $(f, L(A - \lambda) u)_s = ((\bar{\mu} - \bar{\lambda}) f, u)_s$ , also nach

Hilfssatz 1.2.2  $f \in \mathfrak{D}_{L(A-\bar{\lambda})}$ ,  $L(A-\bar{\lambda})f = (\bar{\mu}-\bar{\lambda})f$ , d. h.  $(L(A-\bar{\lambda}T^v) - \bar{\mu})f = 0$ . Nun folgt aber aus  $\lambda_2 \mu_2 > 0$  sofort  $f = 0$ , wenn man  $f$  in (1.20) einsetzt und noch  $\lambda, \mu$  darin durch  $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$  ersetzt. Daher ist der Raum  $(L(A-\lambda T^v) - \mu) \mathfrak{D}_{L(A-\lambda)}$  in  $\mathfrak{H}_s$   $s$ -dicht.

d) Sei  $\varphi$  aus  $\mathfrak{H}_s$ , dann gibt es also eine Folge  $\varphi_n = (L(A-\lambda T^v) - \mu) u_n$  mit  $u_n$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A-\lambda)}$ , so daß  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  gilt. Aus (1.20) ergibt sich die Konvergenz der Folge  $u_n$  sowohl in  $\mathfrak{H}_s$ , als auch in  $\mathfrak{H}_t$ , also nach (1.1.I) auch die Konvergenz dieser Folge in  $\mathfrak{H}$  gegen ein Element  $u$  aus  $\mathfrak{H}$ . Aus der  $s$ -Konvergenz von  $(L(A-\lambda T^v) - \mu) u_n$  folgt wiederum die Konvergenz von  $(A - \lambda T^v - \mu S^v) u_n$ , also diejenige von  $A u_n$  in  $\mathfrak{H}$ . Somit hat man einmal wegen der Abgeschlossenheit des selbstadjungierten Operators  $A$  in  $\mathfrak{A}$ :  $A u_n \rightarrow A u$ , andererseits wegen der  $s$ -Abgeschlossenheit des  $s$ -selbstadjungierten Operators  $L$  ebenso  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A-\lambda)}$  und  $(L(A-\lambda T^v) - \mu) u_n \rightarrow (L(A-\lambda T^v) - \mu) u$ . Folglich gilt  $\varphi = (L(A-\lambda T^v) - \mu) u$ , d. h.  $\varphi$  ist aus  $(L(A-\lambda T^v) - \mu) \mathfrak{D}_{L(A-\lambda)}$ . Also ist

$$(1.21) \quad (L(A-\lambda T^v) - \mu) \mathfrak{D}_{L(A-\lambda)} = \mathfrak{H}_s.$$

e) Schließlich ist die durch  $L(A-\lambda T^v) - \mu$  geleistete Abbildung von  $\mathfrak{D}_{L(A-\lambda)}$  auf den Raum  $\mathfrak{H}_s$  im Falle  $\lambda_2 \mu_2 > 0$  offenbar eineindeutig, denn aus  $(L(A-\lambda T^v) - \mu) u = 0$  folgt dann wiederum wegen (1.20):  $u = 0$ . Die Reziproke  $(L(A-\lambda T^v) - \mu)^{-1}$  existiert daher für jedes  $\lambda, \mu$  mit  $\lambda_2 \mu_2 > 0$  überall in  $\mathfrak{H}_s$  und es gelten die Relationen (1.22), wie man sofort aus (1.20) folgert, indem man darin  $u$  durch  $(L(A-\lambda T^v) - \mu)^{-1} u$  ersetzt.

#### Hilfssatz 1.2.4:

Sei  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  selbstadjungiert. Dann gelten für  $u$  aus  $\mathfrak{A}$  und komplexes  $\lambda, \mu$  die Relationen

$$(1.23) \quad \|(A - \lambda S^v - \mu T^v) u\|^2 \geq \lambda_2^2 \|u\|^2 + 2(\mu_2 - \lambda_2) \lambda_2 \|u\|^2$$

$$(1.24) \quad \|(A - \lambda S^v - \mu T^v) u\|^2 \geq \mu_2^2 \|u\|^2 + 2(\lambda_2 - \mu_2) \mu_2 \|u\|^2.$$

( $\lambda_2, \mu_2$  siehe die Bezeichnungen von Hilfssatz 1.2.3.) Immer dann, wenn  $\lambda_2 \mu_2 > 0$  ist, ist die Reziproke  $R_{\lambda, \mu} = (A - \lambda S^v - \mu T^v)^{-1}$  überall in  $\mathfrak{H}$  eindeutig erklärt und beschränkt und es gilt

$$(1.25) \quad \|R_{\lambda, \mu} u\|^2 \leq \left\{ \max \left( \frac{1}{\lambda_2^2}, \frac{1}{\mu_2^2} \right) \right\} \|u\|^2.$$

Beweis: a) Man hat für  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ :

$$\|(A - \lambda S^v - \mu T^v) u\|^2 = \left\| (A - \lambda - (\mu - \lambda) T^v) u \right\|^2 = \left\| (A - (\lambda - \mu) S^v - \mu) u \right\|^2.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda S^v - \mu T^v) u\|^2 &= \|(A - (\mu - \lambda) T^v - \lambda_1) u - i \lambda_2 u\|^2 \\ &\geq \lambda_2^2 \|u\|^2 + 2(\mu_2 - \lambda_2) \lambda_2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

und ebenso

$$\|(A - (\lambda - \mu) S^v - \mu) u\|^2 \geq \mu_2^2 \|u\|^2 + 2(\lambda_2 - \mu_2) \mu_2 \|u\|^2,$$

wie man sich leicht analog zum Beweis von Hilfssatz 1.2.3 durch Ausrechnen der Beträge klarmacht. Insgesamt ergibt sich also (1.23) und (1.24).

b) Sei nun  $\lambda_2 \mu_2 > 0$ ,  $f$  aus  $\mathfrak{H}$  und  $(f, (A - \lambda S^v - \mu T^v) u) = 0$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ . Alsdann gilt  $(f, A u) = ((\bar{\lambda} S^v + \bar{\mu} T^v) f, u)$  für  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ , also wegen der

Selbstadjungiertheit von  $A$  in  $\mathfrak{A}$ :  $f \in \mathfrak{A}$  und  $(A - \bar{\lambda} S' - \bar{\mu} T') f = 0$ . Wegen  $Im \bar{\lambda} Im \bar{\mu} = Im \bar{\lambda} Im \mu > 0$  gilt immer mindestens eine der beiden Relationen  $(\lambda_2 - \mu_2) \mu_2 \geq 0$ ,  $(\mu_2 - \lambda_2) \lambda_2 \geq 0$ . Daher folgt aus (1.23) bzw. (1.24), wenn man darin  $u$  durch  $f$ ;  $\lambda, \mu$  durch  $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$  ersetzt, sofort  $f = 0$ . Also ist wiederum  $(A - \lambda S' - \mu T') \mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{H}$  dicht.

c) Für  $\varphi$  aus  $\mathfrak{H}$  folgt daher die Existenz einer Folge  $u_n$  aus  $\mathfrak{A}$  mit  $(A - \lambda S' - \mu T') u_n \rightarrow \varphi$ . Aus (1.23) bzw. (1.24) ergibt sich die Konvergenz von  $u_n$ . Gelte  $u_n \rightarrow u$ , so schließt man  $(A - \lambda S' - \mu T') u = \varphi$ , es ist also  $(A - \lambda S' - \mu T') \mathfrak{A} = \mathfrak{H}$ .

d) Aus  $(A - \lambda S' - \mu T') u = 0$  folgt schließlich wieder wegen (1.23) bzw. (1.24) sofort  $u = 0$ , also existiert  $R_{\lambda, \mu} = (A - \lambda S' - \mu T')^{-1}$  eindeutig in ganz  $\mathfrak{H}$ . Für  $|\mu_2| \geq |\lambda_2|$  entnimmt man endlich aus (1.23), für  $|\lambda_2| \geq |\mu_2|$  hingegen aus (1.24) die Beschränktheit der Reziproken  $R_{\lambda, \mu}$  und die Beziehung (1.25). Damit ist der Satz bewiesen.

### Hilfssatz 1.2.5:

Es sei  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  selbstadjungiert. Für den Punkt  $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0$  sei der Operator  $R_{\lambda, \mu} = (A - \lambda S' - \mu T')^{-1}$  beschränkt und überall erklärt. Es gelte

$$(1.26) \quad \|R_{\lambda, \mu_0} u\| \leq c \|u\|.$$

Dann ist  $R_{\lambda, \mu_0}$  für alle  $\lambda$  des Kreises  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  noch überall in  $\mathfrak{H}$  erklärt und beschränkt. Es gilt

$$(1.27) \quad \|R_{\lambda, \mu_0} u\| \leq \frac{c}{1 - c |\lambda - \lambda_0|} \|u\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H},$$

und die Funktion  $\varphi_{u, v}(\lambda) = (u, (A - \lambda S' - \mu_0 T')^{-1} v)$  ist für alle  $\lambda$  des offenen Kreises  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  und alle  $u, v$  aus  $\mathfrak{H}$  erklärt und regulär analytisch.

Beweis<sup>a)</sup>: a) Es ist  $(A - \lambda S' - \mu_0 T') = (A - \lambda_0 S' - \mu_0 T') - (\lambda - \lambda_0) S' = [1 + (\lambda_0 - \lambda) S' R_{\lambda_0, \mu_0}] (A - \lambda_0 S' - \mu_0 T') = (1 + Q) (A - \lambda_0 S' - \mu_0 T')$ . Dabei folgt wegen (1.26) und  $\|S'\| \leq 1$  sofort  $\|Q\| \leq |\lambda_0 - \lambda| c$ , also ist  $(1 + Q)^{-1}$  für alle  $\lambda$  mit  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  überall in  $\mathfrak{H}$  erklärt und beschränkt, und es gilt  $\|(1 + Q)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - c |\lambda - \lambda_0|}$ . Folglich ist auch  $(A - \lambda S' - \mu_0 T')^{-1} = R_{\lambda_0, \mu_0} (1 + Q)^{-1}$  beschränkt und überall in  $\mathfrak{H}$  erklärt, und es gilt

$$(1.27) \quad \|R_{\lambda, \mu_0} u\| \leq \frac{c}{1 - c |\lambda - \lambda_0|} \|u\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H},$$

falls nur  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  ist.

b) Offenbar ist auch  $R_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}^* = R_{\lambda, \mu}^*$  ebenso beschränkt und überall erklärt, und es gilt

$$(1.28) \quad \|R_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}_0}^* u\| \leq \frac{c}{1 - c |\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0|} \|u\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}$$

und  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$ . Also folgt für  $|\lambda' - \lambda_0| < 1/c, |\lambda - \lambda_0| < 1/c$ :

$$(1.29) \quad \frac{(u, R_{\lambda', \mu_0} v) - (u, R_{\lambda, \mu_0} v)}{\lambda' - \lambda} = (R_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}_0}^* u, R_{\lambda', \mu_0} v)_s.$$

Beschränkt man  $\lambda, \lambda'$  auf die abgeschlossene Kreisscheibe  $|\lambda - \lambda_0| \leq 1/c - \varepsilon$ , ( $0 < \varepsilon < 1/c$ ), so ergibt sich unter Benutzung von (1.27) und (1.28):

$$|(u, R_{\lambda', \mu_0} v) - (u, R_{\lambda, \mu_0} v)| \leq a(\varepsilon) |\lambda' - \lambda| \|u\| \|v\|.$$

<sup>a)</sup> Der wesentliche Gedanke dieses Schlusses ist aus [13] entnommen.

Also hat man  $R_{\lambda', \mu_s} u \rightarrow R_{\lambda, \mu_s} u$ , falls  $\lambda' \rightarrow \lambda$  und  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  gilt. Läßt man nunmehr in (1.29)  $\lambda'$  auf beliebigem Wege gegen  $\lambda$  streben, so strebt die rechte Seite dieser Gleichung stets gegen  $(R_{\lambda, \mu_s} u, R_{\lambda, \mu_s} v)$ . Also ist  $\varphi_{u,v}(\lambda) = (u, R_{\lambda, \mu_s} v)$  für jedes  $\lambda$  mit  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  differenzierbar, daher in  $|\lambda - \lambda_0| < 1/c$  regulär analytisch. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

#### Hilfssatz 1.2.6:

Es sei  $\mathfrak{P}$   $s$ -definit,  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  selbstadjungiert und  $E_\lambda$  die linksstetige Spektralschar des Operators  $A$  in  $\mathfrak{A}$ . Für jedes  $\lambda_1, \lambda_2$  mit  $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$  aus einer gewissen, offenen, reellen Umgebung  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$  des festen, reellen Punktes  $\lambda_0$  und für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}$  gelte

$$(1.30) \quad \|E_\lambda u\|_t \leq c(\lambda) \|E_\lambda u\|_s,$$

wo  $E_\lambda = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$  sei und  $c(\lambda)$  eine von  $u$  nicht abhängige Konstante vertrete. Dann ist  $L(A - \lambda_0)$  in  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda_0)}$   $s$ -selbstadjungiert. Gilt für irgendein  $f$  aus  $\mathfrak{H}_s$  und ein  $g$  aus  $\mathfrak{H}$  die Beziehung  $(f, L(A - \lambda_0) u)_s = (g, u)$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda_0)}$ , so folgt daraus  $f \in \mathfrak{A}$ ,  $(A - \lambda_0) f = g$ .  $\mathfrak{D}_{L(A - \lambda_0)}$  ist in  $\mathfrak{H}$  noch dicht.

*Beweis:* a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $\lambda_0 = 0$  angenommen werden. Die Hermitezität von  $L A$  folgt nach Hilfssatz 1.2.1, sobald die  $s$ -Dichtheit des Definitionsbereiches  $\mathfrak{D}_{LA}$  gezeigt ist. Sei speziell  $-\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  und der Wertebereich  $\mathfrak{B}_{E_\lambda}$  mit  $\mathfrak{M}_\lambda$  bezeichnet, so gilt wegen (1.30) für alle  $u$  aus  $\mathfrak{M}_\lambda$ :  $\|u\| = \{\|u\|_s^2 + \|u\|_t^2\}^{\frac{1}{2}} \leq (1 + c^2(\lambda))^{\frac{1}{2}} \|u\|_s = c'(\lambda) \|u\|_s$ .

Es erweist sich daher der Raum  $\mathfrak{M}_\lambda$  als  $s$ -abgeschlossen, denn ist  $u_n$   $s$ -konvergent,  $u_n$  aus  $\mathfrak{M}_\lambda$ , so folgt hiernach auch die Konvergenz von  $u_n$  in  $\mathfrak{H}$ . Gelte  $\lim u_n = u$ , so hat man also  $u \in \mathfrak{M}_\lambda$ . Da dann auch  $\lim u_n = u$  gilt, führen

Grenzübergänge bezüglich der Metrik  $\|u\|_s$  nicht aus dem Raum  $\mathfrak{M}_\lambda$  heraus. Sei nun  $\mathfrak{N}_\lambda$  der in  $\mathfrak{H}$  auf  $\mathfrak{M}_\lambda$  orthogonale Raum, so daß gilt  $\mathfrak{M}_\lambda \oplus \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H}$ . Sei ebenso  $\mathfrak{N}_{\lambda,s}$  der in  $\mathfrak{H}$  auf  $\mathfrak{M}_\lambda$   $s$ -orthogonale Raum, für den gilt  $\mathfrak{M}_\lambda \oplus \mathfrak{N}_{\lambda,s} = \mathfrak{H}_s$ .

Dann ist die Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda$  in  $\mathfrak{M}_\lambda$  noch dicht, und es gilt  $L(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda) = \mathfrak{N}_{\lambda,s}$ . Denn ist  $f$  aus  $\mathfrak{N}_{\lambda,s}$ , so gilt  $(f, u)_s = 0$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{M}_\lambda$ , also ergibt sich wegen  $\mathfrak{M}_\lambda \subseteq \mathfrak{H}$ :  $(Sf, u) = 0$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{M}_\lambda$ . Daher hat man  $S\mathfrak{N}_{\lambda,s} \subseteq \mathfrak{M}_\lambda$  oder  $\mathfrak{N}_{\lambda,s} \subseteq L(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$ . Umgekehrt gilt für  $u$  aus  $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  und  $f$  aus  $\mathfrak{N}_\lambda$ :  $(f, Lu)_s = (f, u) = 0$ , d. h. es ist  $L(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda) \subseteq \mathfrak{N}_{\lambda,s}$ , also folgt insgesamt  $L(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda) = \mathfrak{N}_{\lambda,s}$ , und die durch  $L$  geleistete Abbildung der beiden Räume  $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  und  $\mathfrak{N}_{\lambda,s}$  aufeinander ist offenbar eineindeutig, da  $(L)^{-1} = S$  existiert. Ist aber  $(f, u) = 0$  für alle  $u$  aus  $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  und gilt  $f \in \mathfrak{N}_\lambda$ , so folgt daraus für  $v = Lu$ :  $(f, v)_s = (f, Lu)_s = (f, u) = 0$  für alle  $v$  aus  $L(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$ , das heißt, es ist  $f$  aus  $\mathfrak{N}_{\lambda,s}$ . Da andererseits  $f \in \mathfrak{N}_\lambda$  gelten sollte und  $\mathfrak{N}_\lambda \perp \mathfrak{N}_{\lambda,s}$  gilt, ist  $f = 0$ , also  $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  noch dicht in  $\mathfrak{M}_\lambda$ . Erklärt man nun  $A_\lambda = A(E - E_\lambda)$ ,

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu} d_{(\mu)}(E_\mu(E - E_\lambda)), \text{ so ist } \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}_\lambda \text{ dicht in } \mathfrak{M}_\lambda \text{ und } A(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}_\lambda) =$$

$= A_\lambda(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}_\lambda) = \mathfrak{N}_\lambda$ . Der Operator  $R_\lambda$  ist beschränkt, seine Einschränkung auf den Raum  $\mathfrak{N}_\lambda$  ist die Reziproke der Einschränkung jedes der Operatoren  $A, A_\lambda$  auf den Raum  $(\mathfrak{N}_\lambda \cdot \mathfrak{M})$ . Da nun  $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  in  $\mathfrak{M}_\lambda$  dicht ist, ist auch  $\mathfrak{D}_{LA} \cdot \mathfrak{N}_\lambda = R_\lambda(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  in  $\mathfrak{N}_\lambda$  dicht. Denn sicherlich läßt sich die Einschränkung des Operators  $R_\lambda$  auf  $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  wegen der Beschränktheit von  $R_\lambda$  durch Abschließen noch auf den Raum  $\mathfrak{M}_\lambda$  fortsetzen, also ist  $R_\lambda(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{M}_\lambda)$  in  $\mathfrak{M}_\lambda$

dicht.  $\mathfrak{B}_{R_A} = \mathfrak{D}_{L_A} \cdot \mathfrak{N}_A = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N}_A$  ist aber noch in  $\mathfrak{N}_A$  dicht. Da nun dieses für jedes  $A$  gilt und da man hat  $\mathfrak{N}_A = (E - E_A) \mathfrak{H}$ ,  $\lim_{A \rightarrow 0} (E - E_A) = \tilde{E}$ ,  $(E - \tilde{E}) u \in \mathfrak{N}$ , ist der Raum  $\mathfrak{D}_{L_A}$ , für den gilt  $\mathfrak{D}_{L_A} \supseteq \mathfrak{D}_{L_A} \cdot \sum_{0 < \lambda < \delta_n} \mathfrak{N}_A = \sum_{0 < \lambda < \delta_n} \mathfrak{D}_{L_A} \cdot \mathfrak{N}_A$ , tatsächlich in  $\mathfrak{H}$  dicht. Denn sei  $f$  aus  $\mathfrak{H}$ , so wähle man  $\tilde{f}_{nm}$  aus  $\mathfrak{D}_{L_A} \cdot \mathfrak{N}_{A_n}$  ( $A_n: \lambda = \frac{\delta_n}{n}, n = 2, 3, \dots$ ) mit  $\tilde{f}_{nm} \rightarrow (E - E_{A_n}) f$ . Für eine passend gewählte Folge ganzer Zahlen  $\{m_n\}$  und  $f_{nm} = \tilde{f}_{nm} + (E - \tilde{E}) f$  hat man dann  $f_{nm_n} \rightarrow f$  und  $f_{nm_n} \in \mathfrak{D}_{L_A}$ . Also ist  $LA$  hermitesch.

b) Sei  $(f, LAu)_s = (g, u)$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L_A}$ . Dann gilt diese Gleichung speziell auch für  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L_A} \cdot \mathfrak{N}_A$ . Man hat nun für diese  $u$  stets  $R_A A_A u = u$ . Also folgt:

$$(1.31) \quad (f, LAu)_s = (g, R_A S L A u) = (R_A g, LAu)_s.$$

Folglich ist  $(f - R_A g, LAu)_s = 0$  für  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L_A} \cdot \mathfrak{N}_A$ . Da gilt  $LA(\mathfrak{D}_{L_A} \cdot \mathfrak{N}_A) = \mathfrak{N}_{A_s}$ , folgert man jetzt  $(f - R_A g, v)_s = 0$  für  $v$  aus  $\mathfrak{N}_{A_s}$ , d. h.  $f - R_A g \in \mathfrak{N}_{A_s}$ . Folglich ist  $A_A f - (E - E_A) g = 0$ . Daraus ergibt sich  $(E - E_A) f \in \mathfrak{N}$ ,  $E_A f \in \mathfrak{N}$ , also  $f \in \mathfrak{N}$ , somit schließlich  $(f, LAu)_s = (A f, u) = (g, u)$ ,  $A f = g$ . Gilt dagegen  $(f, LAu)_s = (g, u)_s$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L_A}$ , so folgt  $(f, LAu)_s = (Sg, u)$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L_A}$ . Somit ist nach obigem  $f \in \mathfrak{N}$ ,  $A f = Sg$ ,  $f \in \mathfrak{D}_{L_A}$ ,  $LA f = g$ . Also ist  $LA$   $s$ -selbstadjungiert. Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes bewiesen.

#### Hilfssatz 1.2.7:

Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1.2.6 hat man für  $u$  aus  $\mathfrak{D}_{L(A-\lambda_0)}$ .

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \|u\| &\leq \alpha \|(A - \lambda_0) u\| + b \|u\|_s \\ \|u\| &\leq 2 \text{Max}(a, b) \|(L(A - \lambda_0) \pm i) u\|_s. \end{aligned}$$

Dabei folgt für  $a$  und  $b$ :

$$\begin{aligned} a &\leq 2 [\text{Min} \{|\lambda_2 - \lambda_0|, |\lambda_1 - \lambda_0|\} (1 - c(A) (1 + c^2(A))^{-\frac{1}{2}})^{-1}] \\ b &\leq \sqrt{2} (1 + c^2(A))^{\frac{1}{2}} [1 - c(A) (1 + c^2(A))^{-\frac{1}{2}}]^{-1}, \end{aligned}$$

falls nur  $\lambda_1, \lambda_2, A$  irgendwie gemäß den Voraussetzungen von Hilfssatz 1.2.6 gewählt werden.

*Beweis:* Zunächst folgt offenbar die zweite der Formeln (1.32) unmittelbar aus der ersten. Sei  $P_\tau$ ,  $(0 < \tau \leq 1)$  die rechtsstetige Spektralschar des Operators  $S'$  und  $E_A = E_{\lambda_s} - E_{\lambda_i}$  ( $E_{\lambda_s}, \lambda_1, \lambda_2$  siehe Hilfssatz 1.2.6). Offenbar hat man dann

$$\begin{aligned} \|(E - P_\tau) E_A u\| &\leq \|(E - E_A) u\| + \|(E - P_\tau) E_A u\| \\ &= \|(E - E_A) u\| + \|(E - P_\tau)(E_A - P_\tau) u\| \leq \|(E - E_A) u\| + \|(E_A - P_\tau) u\| \\ &\leq 2 \|(E - E_A) u\| + \|(E - P_\tau) u\|. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \|(E - P_\tau) u\|^2 &= ((E - P_\tau) u, (E - P_\tau) u) \leq \tau^{-1} ((E - P_\tau) u, S' (E - P_\tau) u) \\ &= \tau^{-1} \|(E - P_\tau) u\|_s^2, \end{aligned}$$

folglich

$$\|(E - P_\tau) u\| \leq \tau^{-\frac{1}{2}} \|u\|_s.$$

Andererseits hat man

$$\|(E - E_A)u\| \leq m^{-1} \|(A - \lambda_0)(E - E_A)u\| \leq m^{-1} \|(A - \lambda_0)u\|$$

mit  $m = \min\{|\lambda_1 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|\}$ .

Folglich gilt

$$(1.33) \quad \|(E - P_\tau E_A)u\| \leq 2m^{-1} \|(A - \lambda_0)u\| + \tau^{-\frac{1}{2}} \|u\|_s.$$

Es gilt nun nach Voraussetzung  $\|E_A u\|_t \leq c(A) \|E_A u\|_s$ , woraus folgt  $\|E_A u\| \leq c'(A) \|E_A u\|_s$  ( $c'(A) = (1 + c^2(A))^{\frac{1}{2}}$ ).

Das aber liefert  $\int_0^1 (1 - \sigma c'^2(A)) d(\sigma) \|P_\sigma E_A u\|^2 \leq 0$ .

Es gilt:

$$1 - \sigma c'^2(A) \geq \begin{cases} 1/2 & \text{für } 0 \leq \sigma \leq \varepsilon' = (2c'^2(A))^{-1} \\ 1 - c'^2(A) & \text{für } \varepsilon' \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Trägt man dieses ein, so ergibt sich:

$$\|P_{\varepsilon'} E_A u\|^2 \leq (c'^2(A) - 1) \|(E - P_{\varepsilon'}) E_A u\|^2 = c^2(A) \|(E - P_{\varepsilon'}) E_A u\|^2.$$

Also ist

$$\begin{aligned} c'^2(A) \|P_{\varepsilon'} E_A u\|^2 &= c^2(A) \|P_{\varepsilon'} E_A u\|^2 + \|P_{\varepsilon'} E_A u\|^2 \\ &\leq c^2(A) (\|P_{\varepsilon'} E_A u\|^2 + \|(E - P_{\varepsilon'}) E_A u\|^2) \\ &= c^2(A) \|E_A u\|^2 \leq c^2(A) \|u\|^2, \end{aligned}$$

woraus wegen  $c'^2(A) = 1 + c^2(A)$  folgt:  $\|P_{\varepsilon'} E_A u\| \leq c(A) (1 + c^2(A))^{-\frac{1}{2}} \|u\|$ .  
Setzt man daher in (1.33) speziell  $\tau = \varepsilon'$ , so folgt

$$\begin{aligned} (1 - c(A) (c^2(A) + 1)^{-\frac{1}{2}}) \|u\| &\leq \{\|u\| - \|P_{\varepsilon'} E_A u\|\} \\ &\leq \|(E - P_{\varepsilon'} E_A)u\| \leq 2m^{-1} \|(A - \lambda_0)u\| + \tau^{-\frac{1}{2}} \|u\|_s. \end{aligned}$$

Also ergibt sich nach Division mit  $1 - c(A) (1 + c^2(A))^{-\frac{1}{2}}$  insgesamt (1.32).  
Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

#### Hilfssatz 1.2.8:

Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1.2.6 ist  $((S')^{-1}(A - \lambda T^v) - i)^{-1} = R_{i, \lambda}^{\varepsilon'}$  in jedem abgeschlossenen Halbkreis  $H_{\lambda_0, \delta}$ :  $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta < \delta_0$ , Im  $\lambda \geq 0$  gleichmäßig beschränkt, d. h. es gilt  $\|R_{i, \lambda}^{\varepsilon'} u\| \leq c \|u\|$  mit von  $\lambda$  unabhängigem  $c$  für alle  $\lambda$  aus  $H_{\lambda_0, \delta}$  und  $u$  aus  $\mathfrak{H}$ . Ist  $\mathfrak{P}$  sogar doppelt definit, so ist für jedes  $u$  aus dem Durchschnitt  $\mathfrak{D}^2$  aller Definitionsbereiche  $\mathfrak{D}_{(M(A + iS' - \lambda T^v))^{-1}}$  mit  $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ ,  $\lambda$  reell und für jedes  $v$  aus  $\mathfrak{H}'$  die Funktion  $\eta(\lambda) = (u, R_{i, \lambda}^{\varepsilon'} v)$  im Innern von  $H_{\lambda_0, \delta}$  analytisch und auf dem Rande noch stetig.

Beweis: Wir können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei  $\lambda_0 = \lambda$ . Nach Hilfssatz 1.2.3. ist  $R_{i, \lambda}^{\varepsilon'}$  als Einschränkung von  $R_{i, \lambda}^{\varepsilon}$  für jedes nichtreelle  $\lambda$  aus  $H_{0, \delta}$   $s$ -beschränkt und überall in  $\mathfrak{H}'_s$  erklärt, es gilt nach (1.22):

$$(1.34) \quad \|R_{i, \lambda}^{\varepsilon'} u\|_s \leq \|u\|_s \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{H} = \mathfrak{H}'_s.$$

Für reelles  $\lambda$  aus  $H_{0, \delta}$  dagegen ist nach Hilfssatz 1.2.6 der Operator  $L(A - \lambda)$   $s$ -selbstadjungiert, also auch der Operator  $L(A - \lambda T^v) = L(A - \lambda) + \lambda$   $s$ -selbstadjungiert, also ist wiederum  $R_{i, \lambda}^{\varepsilon'}$  überall in  $\mathfrak{H}'_s = \mathfrak{H}$  erklärt, und es gilt die Beziehung (1.34). Angenommen nun, es gäbe keine gleichmäßige

Schranke der geforderten Art. Dann folgte die Existenz einer Folge  $\lambda_n$  von Punkten aus  $H_{0,\delta}$  und einer Folge  $u_n$  von Vektoren aus  $\mathfrak{H}$  mit  $\|u_n\| = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , so daß gilt:  $\|R_{i,\lambda_n}^s u_n\| \rightarrow +\infty$ . Nach dem Häufungssatz besitzt die beschränkte Punktfolge  $\lambda_n$  eine konvergente Teilfolge  $\lambda_{n_r}$ , und diese kann auch noch so ausgewählt werden, daß gilt  $\|R_{i,\lambda_{n_r}}^s u_{n_r}\| > \nu = \nu \|u_{n_r}\|$ . Hierin setzen wir nun ein:  $R_{i,\lambda_{n_r}}^s u_{n_r} = w_r \|R_{i,\lambda_{n_r}}^s u_{n_r}\|$ ,  $\lambda_{n_r} = \mu_r$  und dividieren noch durch  $\nu \|R_{i,\lambda_{n_r}}^s u_{n_r}\|$ . Dann folgt  $\|(S')^{-1}(A - \mu_r T^r) - i\| w_r \| < 1/\nu$ , und somit ist:  $\lim_{r \rightarrow \infty} ((S')^{-1}(A - \mu_r T^r) - i) w_r = 0$ . Erst recht gilt also:  $\lim_{(s)_{r \rightarrow \infty}} ((S')^{-1}(A - \mu_r T^r) - i) w_r = 0$ . Daraus folgt nun, wenn man  $w_r, \mu_r, i$  in die Formel (1.20) einsetzt und noch  $\operatorname{Im} \mu_r \geq 0$  berücksichtigt, sofort  $w_r \rightarrow 0$  und somit auch  $L(A - \mu_r) w_r = (L(A - \mu_r T^r) - i) w_r + (i + \mu_r) w_r \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Daraus folgt schließlich  $(A - \mu_r) w_r \rightarrow 0$ , denn man hat  $\|(A - \mu_r) w_r\| \leq \|L(A - \mu_r) w_r\|_s$ . Sei  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu_r = \mu_0$ , so ergibt sich endlich

$$\|(A - \mu_0) w_r\| \leq \|(A - \mu_r) w_r\| + |\mu_r - \mu_0| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Nunmehr wenden wir, falls  $\mu_0$  reell ist, die Formel (1.32) an und schließen aus  $w_r \rightarrow 0$ ,  $(A - \mu_0) w_r \rightarrow 0$  sofort  $w_r \rightarrow 0$ . Denn wegen  $|\mu_0| \leq \delta < \delta_0$  gibt es noch eine Umgebung von  $\mu_0$ , für die die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1.2.7 erfüllt sind. Da andererseits  $\|w_r\| = 1$  normiert war, ist das ein Widerspruch. Ist aber  $\operatorname{Im} \mu_0 > 0$ , so ist  $(A - \mu_r)^{-1}$  für hinreichend großes  $r$  gleichmäßig in  $r$  beschränkt, also hat man wiederum  $w_r \rightarrow 0$ , also denselben Widerspruch. Also ist  $R_{i,\lambda}^s$  in  $H_{0,\delta}$  gleichmäßig beschränkt. Die Funktion  $\eta(\lambda)$  ist endlich nach Hilfssatz 1.2.5 überall im Innern von  $H_{0,\delta}$  und für  $u, v$  aus  $\mathfrak{H}$  analytisch in  $\lambda$ . Um die Stetigkeit von  $\eta(\lambda)$  in  $H_{0,\delta}^*$  auf der reellen Achse zu zeigen, berücksichtige man nur, daß für reelles  $\lambda_2$  aus  $H_{0,\delta}$  und beliebiges  $\lambda_1$  aus  $H_{0,\delta}$  sowie  $u$  aus  $\mathfrak{D}^x$ ,  $v$  aus  $\mathfrak{H}$  gilt:

$$\begin{aligned} |\eta(\lambda_2) - \eta(\lambda_1)| &= |(T^r u, (R_{i,\lambda_2} - R_{i,\lambda_1}) S' v)| = |\lambda_2 - \lambda_1| |(R_{-i,\lambda_1} T^r u, R_{i,\lambda_1}^s v)|_t \\ &\leq c |\lambda_2 - \lambda_1| \|R_{-i,\lambda_1} T u\|_t \|v\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

falls nur  $\lambda_2 - \lambda_1 \rightarrow 0$  gilt. Damit wäre der Satz bewiesen.

### § 3. Kreuzprodukte von $\mathfrak{P}$ -Systemen.

#### Definition 1.3.1:

Seien  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  zwei  $\mathfrak{P}$ -Systeme<sup>4)</sup> und zwar seien entweder  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$   $s$ -definit, oder  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$   $t$ -definit, oder es sei  $\mathfrak{P}^1$  doppelt definit oder endlich  $\mathfrak{P}^2$  doppelt

<sup>4)</sup> Vektoren, Operatoren, Teilräume usw. des Systems  $\mathfrak{P}^1$  sollen im folgenden immer mit dem oberen Index (1) bezeichnet werden, Vektoren, Operatoren, Teilräume usw. eines der Räume des Systems  $\mathfrak{P}^2$  dagegen stets mit dem oberen Index (2), während die Symbole der entsprechenden Begriffe aus dem neu zu definierenden  $\mathfrak{P}$ -System  $\mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  (siehe Def. 1.3.2) ohne jeden oberen Index stehen sollen. Die oberen Indizes 1 und 2 sollen in allen weiteren Ausführungen ausschließlich für diese Charakterisierung vorbehalten sein, wenn sie direkt oben am zu bezeichnenden Symbol stehen. Wo Potenzen von Operatoren auftreten, seien die zu potenzierenden Operatoren in Klammern gesetzt, also z. B.  $(A^1)^2$ ,  $(S^1)^{-1}$ .

definit<sup>5)</sup>. Man bilde den Raum  $\mathfrak{H}^1 \odot \mathfrak{H}^2$  im Sinne der Bezeichnungsweise von SCHATTEN [14] (S. 19ff.): (Alle formalen Produkte  $u = u^1 u^2$  mit  $u^1 \in \mathfrak{H}^1, u^2 \in \mathfrak{H}^2$  und deren endliche Linearkombinationen — wir werden hier statt  $u = u^1 \otimes u^2$  die einfachere, ebenfalls unzweideutige Bezeichnung  $u = u^1 u^2$  benutzen.) Dieser Raum sei hier mit  $\mathfrak{H}'$  bezeichnet. Die Menge aller  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{H}'$  soll mit  $\mathfrak{S}$  bezeichnet werden. Man erkläre in  $\mathfrak{H}'$  folgende vier Skalarprodukte:

$$(1.35) \quad (u, v) = (u^1, v^1)_s (u^2, v^2)_s + (u^1, v^1)_t (u^2, v^2)_t$$

$$(u, v)_s = (u^1, v^1)_s (u^2, v^2)_s$$

$$(1.36) \quad (u, v)_t = (u^1, v^1)_t (u^2, v^2)_t$$

$$(u, v)_0 = (u^1, v^1) (u^2, v^2)$$

falls  $u, v$  aus  $\mathfrak{S}$  sind, linear für alle übrigen  $u, v$  aus  $\mathfrak{H}'$ .

Ersichtlich gilt:

$$(1.37) \quad (u, v) = (u, v)_s + (u, v)_t \quad \text{für } u, v \text{ aus } \mathfrak{H}'.$$

Offensichtlich bestimmen die drei Skalarprodukte (1.36) je eine *cross-norm* im Sinne von [14]. Dagegen entspricht dem Produkt (1.35) keine *cross-norm*. Während wir uns daher bei der weiteren Verwendung der Normen (1.36) auf [14] bzw. die vorhergehenden Arbeiten von J. v. NEUMANN berufen können, haben wir die Eigenschaften von (1.35) noch zu besprechen.

#### Hilfssatz 1.3.1:

Unter den Voraussetzungen von Definition 1.3.1 sind stets  $(u, u)$  und  $(u, u)_0$  in  $\mathfrak{H}'$  positiv definite Formen.  $(u, u)$ , und  $(u, u)_t$  sind  $\geq 0$  und dann und nur dann ebenfalls definit, wenn  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  beide *s*-definit (bzw. beide *t*-definit) sind. Es gilt

$$(1.38) \quad \|u\|^2 \leq 2 \|u\|_0^2 \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}'.$$

*Beweis:* Sei  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$ . Dann gilt  $u = \sum_{r=1}^n u_r^1 u_r^2$ ,  $u_r^1 \in \mathfrak{H}^1$ ,  $u_r^2 \in \mathfrak{H}^2$ . Die Vektoren  $u_r^1$ ,  $r = 1, \dots, n$ , und ebenso die Vektoren  $u_r^2$ ,  $r = 1, \dots, n$ , spannen je einen linearen, höchstens  $n$ -dimensionalen Unterraum  $\mathfrak{R}^1$  und  $\mathfrak{R}^2$  der Räume  $\mathfrak{H}^1$  und  $\mathfrak{H}^2$  auf. Nach (1.1.VIII) gibt es nun in  $\mathfrak{R}^1$  sowohl, als auch in  $\mathfrak{R}^2$  ein dort vollständiges, in bezug auf die Metrik  $\|u^1\|$ , ( $\|u^2\|$ ) normiertes System totalorthogonaler Vektoren  $\varphi_\sigma^1$ ,  $\sigma = 1, \dots, r$ ,  $\varphi_\tau^2$ ,  $\tau = 1, \dots, p$ .

Man hat

$$u_r^1 = \sum_{\sigma=1}^r \alpha_{r\sigma} \varphi_\sigma^1, \quad u_r^2 = \sum_{\tau=1}^p \beta_{r\tau} \varphi_\tau^2, \quad r = 1, \dots, n,$$

also

$$u = \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} \left( \sum_{r=1}^n \alpha_{r\sigma} \beta_{r\tau} \right) \varphi_\sigma^1 \varphi_\tau^2$$

oder mit

$$a_{\sigma\tau} = \sum_{r=1}^n \alpha_{r\sigma} \beta_{r\tau}$$

$$(1.39) \quad u = \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} a_{\sigma\tau} \varphi_\sigma^1 \varphi_\tau^2.$$

<sup>5)</sup> Für das Folgende werden wir o. B. d. A. annehmen, daß entweder  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  *s*-definit sind, oder aber  $\mathfrak{P}^1$  doppelt definit ist. Diese beiden Fälle sollen der Kürze halber im folgenden mit „Fall 1“ und „Fall 2“ bezeichnet werden. Man überlege sich, daß nur in den vier in Def. 1.3.1 aufgeführten Fällen die Definitionen dieses Paragraphen ein neues  $\mathfrak{P}$ -System liefern.



Sei

$$(\varphi_\sigma^1, \varphi_{\sigma'}^1) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\varphi_\sigma^1, \varphi_{\sigma'}^1)_s = \lambda_\sigma^1 \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\varphi_\sigma^1, \varphi_{\sigma'}^1)_t = \mu_\sigma^1 \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\varphi_\tau^2, \varphi_{\tau'}^2) = \delta_{\tau\tau'}, \\ (\varphi_\tau^2, \varphi_{\tau'}^2)_s = \lambda_\tau^2 \delta_{\tau\tau'}, \quad (\varphi_\tau^2, \varphi_{\tau'}^2)_t = \mu_\tau^2 \delta_{\tau\tau'}.$$

Dann gilt

$$(1.40) \quad \begin{aligned} (u, u) &= \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} |a_{\sigma\tau}|^2 (\lambda_\sigma^1 \lambda_\tau^2 + \mu_\sigma^1 \mu_\tau^2) \geq 0 \\ (u, u)_s &= \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} |a_{\sigma\tau}|^2 \lambda_\sigma^1 \lambda_\tau^2 \geq 0 \\ (u, u)_t &= \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} |a_{\sigma\tau}|^2 \mu_\sigma^1 \mu_\tau^2 \geq 0 \\ (u, u)_0 &= \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} |a_{\sigma\tau}|^2 \geq 0 \text{ und „} = \text{“ nur, wenn } u = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Im Falle 1 (siehe Anm. zu Def. 1.3.1) ist  $(u^1, u^1)_s > 0$ ,  $(u^2, u^2)_s > 0$ , falls nur  $u^1 \neq 0$ ,  $u^2 \neq 0$  ist, also gilt  $\lambda_\sigma^1 > 0$ ,  $\lambda_\tau^2 > 0$ , und da  $\mu_\sigma^1 \geq 0$ ,  $\mu_\tau^2 \geq 0$  ist, ergibt sich  $\lambda_\sigma^1 \lambda_\tau^2 + \mu_\sigma^1 \mu_\tau^2 > 0$ ,  $\sigma = 1, \dots, r$ ,  $\tau = 1, \dots, p$ , und somit folgt aus  $(u, u) = 0$  sofort  $a_{\sigma\tau} = 0$ ,  $\sigma = 1, \dots, r$ ,  $\tau = 1, \dots, p$ , also  $u = 0$ . Noch direkter schließt man dann aus  $\lambda_\sigma^1 > 0$ ,  $\lambda_\tau^2 > 0$  und  $(u, u)_s = 0$  wiederum  $a_{\sigma\tau} = 0$ , also  $u = 0$ . Im Falle 2 dagegen hat man wegen der doppelten Definitheit von  $\mathfrak{P}^1$  stets  $(u^1, u^1)_s > 0$ ,  $(u^1, u^1)_t > 0$ , falls nur  $u^1 \neq 0$  ist, also folgt  $\lambda_\sigma^1 > 0$ ,  $\mu_\sigma^1 > 0$ . Da nun gilt  $\lambda_\tau^2 + \mu_\tau^2 = (\varphi_\tau^2, \varphi_\tau^2)_s + (\varphi_\tau^2, \varphi_\tau^2)_t = \|\varphi_\tau^2\|^2 = 1$ , ist immer entweder  $\lambda_\tau^2 > 0$  oder  $\mu_\tau^2 > 0$ , also entweder  $\lambda_\sigma^1 \lambda_\tau^2 > 0$  oder  $\mu_\sigma^1 \mu_\tau^2 > 0$ . Folglich ist auch für jedes  $\sigma = 1, \dots, r$ ,  $\tau = 1, \dots, p$  stets  $\lambda_\sigma^1 \lambda_\tau^2 + \mu_\sigma^1 \mu_\tau^2 > 0$ . Daher erschließt man auch hier, genau wie beim Fall 1 aus  $(u, u) = 0$  sofort  $u = 0$ . Also ist  $(u, u)$  wiederum definit. Sind  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$   $s$ -definit, so liegt der Fall 1 vor, nach obigem ist also auch  $(u, u)_s$   $s$ -definit. Gibt es dagegen einen Vektor  $u^1$  aus  $\mathfrak{S}^1$ , für den gilt:  $u^1 \neq 0$ ,  $(u^1, u^1)_s = 0$ , so hat man für beliebiges  $u^2 \neq 0$  aus  $\mathfrak{S}^2$  und  $u = u^1 u^2$  stets  $(u, u)_s = (u^1, u^1)_s (u^2, u^2)_s = 0$ , d. h.  $(u, u)_s$  ist nicht mehr definit, sondern nur semidefinit. Ebenso erschließt man für die  $t$ -Metriken diese Behauptung. Somit ist  $(u, u)_s$  ( $(u, u)_t$ ) dann und nur dann positiv definit, wenn  $(u^1, u^1)_s$  und  $(u^2, u^2)_s$  positiv definit sind (bzw. wenn  $(u^1, u^1)_t$  und  $(u^2, u^2)_t$  positiv definit sind). Die Ungleichung  $\|u\|^2 \leq 2 \|u\|_0^2$  ist endlich wegen (1.40) und wegen  $\lambda_\sigma^1 \leq 1$ ,  $\lambda_\tau^2 \leq 1$ ,  $\mu_\sigma^1 \leq 1$ ,  $\mu_\tau^2 \leq 1$  evident. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Man schließe nunmehr den Raum  $\mathfrak{S}'$  unter Benutzung der Metrik  $\|(u, u)\| = [(u, u)]^{\frac{1}{2}}$  zu einem Raum  $\mathfrak{S}$  ab. Da in  $\mathfrak{S}'$  gilt:  $(u, u) = (u, u)_s + (u, u)_t$ , folgt wegen  $(u, u)_s \geq 0$ ,  $(u, u)_t \geq 0$ :

$$(1.41) \quad 0 \leq (u, u)_s \leq (u, u), \quad 0 \leq (u, u)_t \leq (u, u) \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{S}'.$$

Es ist daher möglich, auch die beiden Formen  $(u, v)_s$  und  $(u, v)_t$  auf ganz  $\mathfrak{S}$  fortzusetzen, und es gelten dann auch in  $\mathfrak{S}$  die Relationen  $(u, v) = (u, v)_s + (u, v)_t$ ,  $(u, u)_s \geq 0$ ,  $(u, u)_t \geq 0$ . Ebenso schließe man  $\mathfrak{S}'$  unter Benutzung der Metrik  $\|u\|_0 = [(u, u)_0]^{\frac{1}{2}}$  zu einem Raum  $\mathfrak{S}_0$  ab, der wegen  $\|u\| \leq \sqrt{2} \|u\|_0$  als dichter Unterraum von  $\mathfrak{S}$  betrachtet werden kann. Evident ist  $\mathfrak{S}_0$  identisch mit dem gewöhnlichen, v. NEUMANNschen Kreuzprodukt  $\mathfrak{S}^1 \otimes \mathfrak{S}^2$ .

### Hilfssatz 1.3.2:

$\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}_0$  sind Hilberträume.

*Beweis:* Soweit sich die Behauptung auf  $\mathfrak{S}_0$  bezieht, verweisen wir z. B. auf [12], wo der Beweis explizit durchgeführt ist. Zum Beweis der Behauptung für den Raum  $\mathfrak{S}$  ist noch zu zeigen, daß  $\mathfrak{S}$  unendlich viele Dimensionen hat

und daß  $\mathfrak{H}$  separabel ist. Ersteres ist trivial. Die Separabilität von  $\mathfrak{H}$  folgt aus folgendem Hilfssatz, dessen Beweis wir ebenfalls übergehen:

**Hilfssatz 1.3.3:**

Ist  $f_n^1$  abzählbar dicht in  $\mathfrak{H}^1$ ,  $f_n^2$  abzählbar dicht in  $\mathfrak{H}^2$ , so ist die Menge aller Elemente  $f$  der Form  $f = \sum_{r=1}^r f_{n_r}^1 f_{n'_r}^2$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , ( $n_r, n'_r$  irgend zwei  $r$ -tupel natürlicher Zahlen) in  $\mathfrak{H}$  abzählbar dicht, sowie in  $\mathfrak{H}_0$  abzählbar  $o$ -dicht. Ist  $\mathfrak{R}^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $\mathfrak{R}^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  dicht, so folgt die Dichtheit der Menge  $\mathfrak{R}$  aller  $u = \sum_{r=1}^n u_r^1 u_r^2$  mit  $u_r^1 \in \mathfrak{R}^1$ ,  $u_r^2 \in \mathfrak{R}^2$  in  $\mathfrak{H}$  und entsprechend die  $o$ -Dichtheit dieser Menge in  $\mathfrak{H}_0$ .

Nunmehr bezeichne man den Raum  $\mathfrak{H}$  mit der Form  $(u, v)_s$  als Skalarprodukt mit  $\mathfrak{H}_s'$ ,  $\mathfrak{H}$  mit der Form  $(u, v)_t$  als Skalarprodukt aber mit  $\mathfrak{H}_t'$ . Den in  $\mathfrak{H}$  nach (1.41) beschränkten, hermiteschen Formen  $(u, v)_s$  und  $(u, v)_t$  entsprechen in  $\mathfrak{H}$  zwei beschränkte, hermitesche, positive Operatoren  $S'$  und  $T'$ . Man hat offenbar für  $f$  aus  $\mathfrak{H}'$ ,  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{E}$ :

$$(1.42) \quad (f, u)_s = (f, S'^1 u^1 \cdot S'^2 u^2)_0; (f, u)_t = (f, T'^1 u^1 \cdot T'^2 u^2)_0.$$

Durch  $o$ -Abschließen folgert man unter Benutzung von (1.38) die Gültigkeit dieser Relationen für alle  $f$  aus  $\mathfrak{H}_0$ . Sind nun  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$   $s$ -definit und ist  $S' f = 0$  für irgendein  $f$  aus  $\mathfrak{H}$ , so folgt für alle  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{E}$ :

$$(1.43) \quad (S' f, u) = (f, u)_s = 0.$$

Nun ist aber nach (1.42) für  $g$  aus  $\mathfrak{H}'$ ,  $u^1$  aus  $\mathfrak{D}_{(S'^1)^{-1}}$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{D}_{(T'^2)^{-1}}$ :

$$(g, u) = (g, u)_s + (g, u)_t = (g, u^1 u^2)_s + (g, T'^1 u^1 \cdot T'^2 u^2)_0, \\ (g, u) = (g, u^1 u^2 + (S'^1)^{-1} T'^1 u^1 \cdot (S'^2)^{-1} T'^2 u^2)_s.$$

Durch Abschließen zeigt man die Gültigkeit dieser Relation für alle  $g$  aus  $\mathfrak{H}$ . Gilt nun (1.43), so gilt es auch speziell, wenn man  $u$  durch  $u = u^1 u^2$  oder  $v = (S'^1)^{-1} T'^1 u^1 (S'^2)^{-1} T'^2 u^2$  ersetzt, also folgt aber  $(f, u) = (f, u)_s + (f, v)_s = 0$  für alle  $u = u^1 u^2$  mit  $u^1$  aus  $\mathfrak{D}_{(S'^1)^{-1}}$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{D}_{(S'^2)^{-1}}$ . Nach Hilfssatz 1.3.3 ist aber die Menge aller endlichen Linearkombinationen dieser Vektoren in  $\mathfrak{H}$  dicht, also folgt  $f = 0$ . Demnach ist  $S'$  und damit  $(u, v)_s$  in  $\mathfrak{H}$  dann und nur dann definit, wenn  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  beide  $s$ -definit sind (die Notwendigkeit dieser Bedingung ist nach obigem trivial). Analoges gilt selbstverständlich für die  $t$ -Metriken. Schließt man noch im Definitheitsfalle  $\mathfrak{H}_s'$  bzw.  $\mathfrak{H}_t'$  nach ihren Metriken ab, so kann man zusammenfassend den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 1.3:**

Durch die Räume  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_s'$ ,  $\mathfrak{H}_t'$ , bzw. ihre Abschlüsse in bezug auf die Metriken  $\|u\|_s$  und  $\|u\|_t$  ist ein  $\mathfrak{P}$ -System  $\mathfrak{P}_s(\mathfrak{H})$  definiert. Dabei gilt für die Räume  $\mathfrak{H}$ , und  $\mathfrak{H}_t'$ :

$\mathfrak{H}_s = \mathfrak{H}_s' \otimes \mathfrak{H}_s'$ ,  $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_t' \otimes \mathfrak{H}_t'$ , falls dieselben existieren<sup>6)</sup>.  $\mathfrak{P}$  ist dann und nur dann  $s$ -definit, wenn  $\mathfrak{P}^1$ , wie auch  $\mathfrak{P}^2$  beide  $s$ -definit sind,  $\mathfrak{P}$  ist dann und nur dann  $t$ -definit, wenn  $\mathfrak{P}^1$ , wie auch  $\mathfrak{P}^2$  beide  $t$ -definit sind. Im Falle I (siehe Anm. zu Def. 1.3.1) ist  $\mathfrak{P}$  mindestens  $s$ -definit.

**Definition 1.3.2:**

Das in Satz 1.3 definierte  $\mathfrak{P}$ -System soll das direkte Produkt oder das Kreuzprodukt der beiden  $\mathfrak{P}$ -Systeme  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  genannt und mit  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  bezeichnet werden.

<sup>6)</sup> Mit diesen Symbolen sind die gewöhnlichen, z. B. in [12] definierten, v. NEUMANNschen Kreuzprodukte gemeint.

§ 4. Produkte zwischen Elementen von  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$ ,  
elementare Sätze in  $\mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$ .

## Definition 1.4.1:

Sei  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$ ,  $f = \sum_{v=1}^n f_v^1 f_v^2$  ( $f_v = f_v^1 f_v^2$  aus  $\mathfrak{C}$ ) ein Vektor aus  $\mathfrak{H}'$  (siehe Def. 1.3.1) und sei  $u^1, v^1, w^1, u^2, v^2, w^2$  der Reihe nach je ein Vektor aus  $\mathfrak{H}_s^1, \mathfrak{H}_t^1, \mathfrak{H}_0^1, \mathfrak{H}_s^2, \mathfrak{H}_t^2, \mathfrak{H}_0^2$  (bzw.  $\mathfrak{H}_s^{1'}, \mathfrak{H}_t^{1'}, \mathfrak{H}_0^{1'}, \mathfrak{H}_s^{2'}, \mathfrak{H}_t^{2'}, \mathfrak{H}_0^{2'}$  im Falle, daß einer der zuerst genannten Räume nicht existiert). Dann werde definiert:

$$\begin{aligned}
 (u^1, f)_s &= \sum_{v=1}^n (u^1, f_v^1)_s f_v^2 \\
 (v^1, f)_t &= \sum_{v=1}^n (v^1, f_v^1)_t f_v^2 \\
 (w^1, f)_0 &= \sum_{v=1}^n (w^1, f_v^1)_0 f_v^2 \\
 (u^2, f)_s &= \sum_{v=1}^n (u^2, f_v^2)_s f_v^1 \\
 (u^2, f)_t &= \sum_{v=1}^n (u^2, f_v^2)_t f_v^1 \\
 (u^2, f)_0 &= \sum_{v=1}^n (u^2, f_v^2)_0 f_v^1.
 \end{aligned}
 \tag{1.44}$$

Nach Definition sind also die sechs so bezeichneten Produkte der Reihe nach Vektoren aus  $\mathfrak{H}^2, \mathfrak{H}^2, \mathfrak{H}^2, \mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^1$ .

## Hilfssatz 1.4.1:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \|(u^1, f)_s\|_s &\leq \|u^1\|_s \|f\|_s \\
 \|(w^1, f)_0\|_0 &\leq \|w^1\|_0 \|f\|_0
 \end{aligned}
 \tag{1.45}$$

und Analoges für die übrigen vier Produkte.

*Beweis:* Es sei  $f = \sum_{\sigma, \tau=1}^{r, p} a_{\sigma\tau} \varphi_\sigma^1 \varphi_\tau^2$  die beim Beweis von Hilfssatz 1.3.1 bereits benutzte, totalorthogonale Darstellung von  $f$ .

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \|(u^1, f)_s\|_s^2 &= \sum_{\tau} \left| \sum_{\sigma} a_{\sigma\tau} (u^1, \varphi_\sigma^1)_s \right|^2 \|\varphi_\tau^2\|_s^2 \\
 &= \sum_{\tau} \left| (u^1, \sum_{\sigma} a_{\sigma\tau} \varphi_\sigma^1)_s \right|^2 \lambda_\tau^2 \leq \|u^1\|_s^2 \sum_{\tau} \left\| \sum_{\sigma} a_{\sigma\tau} \varphi_\sigma^1 \right\|_s^2 \lambda_\tau^2 \\
 &= \|u^1\|_s^2 \sum_{\sigma, \tau} |a_{\sigma\tau}|^2 \lambda_\sigma^2 \lambda_\tau^2 = \|u^1\|_s^2 \|f\|_s^2.
 \end{aligned}$$

Also  $\|(u^1, f)_s\|_s \leq \|u^1\|_s \|f\|_s$ , was zu beweisen war. Die übrigen fünf Ungleichungen erschließt man auf dieselbe Weise.

Aus den Ungleichungen (1.45) folgt nun sofort der Beweis von

## Hilfssatz 1.4.2:

a) Es liege der Fall 1 der Definition 1.3.1 vor. Dann lassen sich  $(u^1, f)_s$ ,  $(u^2, f)_s$  durch  $s$ -Abschließen für alle  $f$  aus  $\mathfrak{H}_s$ ,  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}_s^1$  und  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}_s^2$  erklären und stellen Vektoren aus  $\mathfrak{H}_s^2$  bzw.  $\mathfrak{H}_s^1$  dar. Die Produkte  $(u^1, f)_t$  und  $(u^2, f)_t$  dagegen

lassen sich durch  $t$ -Abschließen für jedes  $f$  aus  $\mathfrak{H}$ ,  $u^1$  aus  $\mathfrak{L}^1$  bzw.  $u^2$  aus  $\mathfrak{L}^2$  erklären und stellen Vektoren aus  $\mathfrak{H}^2$  bzw.  $\mathfrak{H}^1$  dar.

b) Es liege der Fall 2 der Definition 1.3.1 vor, d. h. es sei  $\mathfrak{P}^1$  doppelt definit. Dann lassen sich die Produkte  $(u^2, f)_s$ ,  $(u^2, f)_t$  für jedes  $f$  aus  $\mathfrak{H}$  und  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_s^{2'} = \mathfrak{H}_t^{2'}$  erklären und stellen Vektoren aus  $\mathfrak{H}_s^1$  bzw.  $\mathfrak{H}_t^1$  dar. Die Produkte  $(u^1, f)_s$ ,  $(u^1, f)_t$ , dagegen existieren für  $u^1$  aus  $\mathfrak{M}^1$  bzw.  $u^1$  aus  $\mathfrak{L}^1$  und stellen jeweils Vektoren aus  $\mathfrak{H}^2$  dar.

c)  $(u^1, f)_0$  läßt sich bei beliebigen Definitheitsverhältnissen von  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  durch  $o$ -Abschließen für alle  $f$  aus  $\mathfrak{H}_0$ ,  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$  als Vektor von  $\mathfrak{H}^2$ ,  $(u^2, f)_0$  dagegen für alle  $f$  aus  $\mathfrak{H}_0$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}^2$  als Vektor von  $\mathfrak{H}^1$  erklären.

Beweis:  $a_1$ ) Für  $f$  aus  $\mathfrak{H}$  gibt es eine Folge  $f_n$  aus  $\mathfrak{H}'$  mit  $f_n \xrightarrow{s} f$ . Hilfssatz 1.4.1 liefert die  $s$ -Konvergenz von  $(u^1, f_n)_s$  und die  $s$ -Konvergenz von  $(u^2, f_n)_s$ .

$a_2$ ) Ist  $f$  aus  $\mathfrak{H}$ , so gibt es eine Folge  $f_n$  aus  $\mathfrak{H}'$ , für die  $f_n \xrightarrow{s} f$  gilt. Nun folgt aus der Definition der Produkte für  $u^1$  aus  $\mathfrak{L}^1$ :  $(u^1, f_n)_t = (T^{1'} L^1 u^1, f_n)_s$ , also ist  $(u^1, f_n)_s$  für solche  $u^1$   $s$ - und auch  $t$ -konvergent, nach (1.1.I) also konvergent. Ebenso folgt die Konvergenz von  $(u^2, f_n)_t$  in  $\mathfrak{H}'$ , falls  $u^2 \in \mathfrak{L}^2$  gilt. Setzt man

$$(1.46) \quad \begin{aligned} \lim_{(s)_{n \rightarrow \infty}} (u^1, f_n)_s &= (u^1, f)_s, & \lim_{(s)_{n \rightarrow \infty}} (u^2, f_n)_s &= (u^1, f)_s \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u^1, f_n)_t &= (u^1, f)_t, & \lim_{n \rightarrow \infty} (u^2, f_n)_t &= (u^2, f)_t, \end{aligned}$$

so hat man die Produkte in den gewünschten Definitionsbereichen definiert.

Die Fälle b) und c) erledigen sich in analoger Weise.

Zum Zwecke der geschlossenen Formulierung stellen wir wiederum die weiteren Eigenschaften des  $\mathfrak{P}$ -Systemkreuzproduktes und der Produkte (1.44) in einer Tabelle zusammen:

I)  $(u^1, f)_s$  ist im Falle der  $s$ -Definitheit von  $\mathfrak{P}$   $s$ -stetig in beiden Variablen, d. h. es gilt  $\lim_{(s)_{n \rightarrow \infty}} (u_n^1, f)_s = (u^1, f)_s$ , falls  $\lim_{(s)_{n \rightarrow \infty}} u_n^1 = u^1$ ,  $\lim_{(s)_{n \rightarrow \infty}} (u^1, f_n)_s = (u^1, f)_s$ , falls  $\lim_{(s)_{n \rightarrow \infty}} f_n = f$  ist.  $(u^1, f)_0$  ist dagegen stetig in der Variablen  $u^1$ ,  $o$ -stetig in der Variablen  $f$ .

II) Es gilt  $(u^1, (u^2, f)_0) = (u^1 u^2, f)_0 = (u^2, (u^1, f)_0)$ ,  $(u^1 u^2, f)_s = (u^1, (u^2, f)_s)_s$ ,  $(u^1 u^2, f)_t = (u^2, (u^1, f)_s)_s$ ,  $(u^1, (u^2, f)_s)_s = (u^2, (u^1, f)_s)_s$ , falls nur jeweils alle in einer derartigen Gleichung aufgeführten Produkte existieren.

III) Wenn  $u_n^1, u^1 \in \mathfrak{H}^1$ ,  $u_n^2, u^2 \in \mathfrak{H}^2$  ist und wenn gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^1 = u^1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^2 = u^2$ , dann folgt für  $u_n = u_n^1 u_n^2$ ,  $u = u^1 u^2$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ .

IV) Wenn  $A^1$  in  $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{L}^1$  als Operator in  $\mathfrak{L}^1$  erklärt ist, erkläre man den Operator  $\underline{A}^1$  in  $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{H}^1$  folgendermaßen:  $\mathfrak{M}^1$ : Alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$  mit  $u = \sum_{r=1}^n u_r^1 u_r^2$ ,

wo  $u_r^1 \in \mathfrak{M}^1$ ,  $u_r^2 \in \mathfrak{L}^2$  ist,  $\underline{A}^1 u = \sum_{r=1}^n (A^1 u_r^1) u_r^2$  für  $u$  aus  $\mathfrak{M}^1$ . Wenn dann  $A^1$   $\gamma$ -beschränkt ist, ( $\gamma$  vertrete einen der Buchstaben  $o, s, t$ ), so ist auch  $\underline{A}^1$   $\gamma$ -beschränkt. Ist dann  $\mathfrak{H}_\gamma$  ein v. NEUMANNsches Kreuzprodukt (für  $\gamma = 0$  gilt dies natürlich immer, für  $\gamma = s$  oder  $\gamma = t$  dagegen genau dann, wenn  $\mathfrak{P}$   $s$ -(bzw.  $t$ -)definit ist), so kann  $\underline{A}^1$  durch  $\gamma$ -Abschließen zu einem überall in  $\mathfrak{H}_\gamma$  erklärten und  $\gamma$ -beschränkten Operator fortgesetzt werden, welchen wir mit  $\underline{A}_\gamma^1$  (also bzw.  $\underline{A}_0^1, \underline{A}_s^1, \underline{A}_t^1$ ) bezeichnen wollen. Jede Schranke von  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$

ist auch Schranke von  $\underline{A}_i^*$  in  $\mathfrak{H}_i$ . Für derartige Operationen gilt dann bzw.:

$$(1.47) \quad \begin{aligned} A^1(u^2, f)_0 &= (u^2, \underline{A}_0^1 f)_0 && \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}_0, u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_0^2, \\ A^1(u^2, f)_s &= (u^2, \underline{A}_s^1 f)_s && \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}_s, u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_s^2, \\ A^1(u^2, f)_t &= (u^2, \underline{A}_t^1 f)_t && \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}_t, u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_t^2. \end{aligned}$$

V) Der Operator  $\underline{S}^V$  ist in jeder der Metriken (1.36) beschränkt und durch Abschließen auf jeden der Räume  $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_s, \mathfrak{H}_t$  fortsetzbar, der nach § 1.3 existiert. Es gilt

$$(1.48) \quad \|\underline{S}^V u\| \leq \|u\|, \|\underline{S}^V u\|_0 \leq \|u\|_0, \|\underline{S}^V u\|_s \leq \|u\|_s, \|\underline{S}^V u\|_t \leq \|u\|_t \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}'.$$

VI) Der Operator  $\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}$  ist in  $\mathfrak{H}'$  erklärt, beschränkt, hermitesch und positiv definit. Es gilt

$$(1.49) \quad \|(\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) u\| \leq 2 \|u\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}'.$$

Seine Reziproke  $B = (\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'})^{-1}$  ist noch dicht definiert und daher in  $\mathfrak{H}$  wesentlich selbstadjungiert. Es gilt:

$$(1.50) \quad \underline{B} \subseteq \mathfrak{H}_0 \quad \text{und} \quad (f, \underline{B} u) = (f, u)_0 \quad \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}_0 \text{ und } u \text{ aus } \mathfrak{B}.$$

( $\underline{B}$  in  $\mathfrak{B}$  sei die  $\mathfrak{H}$ -Abschließung von  $B$  in  $\mathfrak{B}$ .)

*Beweis von I) bis VI):*

Wir beschränken uns hier auf die genaue Durchführung des Beweises von VI) und überlassen die sehr einfache Begründung der übrigen Regeln dem Leser (siehe auch die zu den Kreuzprodukten angegebene Literatur [12], [14]).

Die Operatoren  $\underline{S}^V, \underline{S}^{2'}, \underline{T}^V, \underline{T}^{2'}$  sind paarweise vertauschbar und besitzen alle den Definitionsbereich  $\mathfrak{H}'$  sowie einen Wertebereich, der in  $\mathfrak{H}'$  enthalten ist. Daher ist die Beschränktheit, Hermitezität und Positivität von  $\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}$  in  $\mathfrak{H}'$  trivial. Die Relation (1.49) ist nach V) unmittelbar evident. Es gilt für  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$ :  $(\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) u \in \mathfrak{H}' \subseteq \mathfrak{H}_0$ . Man hat nach (1.42) für alle  $f$  und  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$ :

$$(1.53) \quad (f, \underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) u)_0 = (f, u)_s + (f, u)_t = (f, u).$$

Ist  $f$  ein Vektor aus  $\mathfrak{H}_0$  mit  $(f, (\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) u)_0 = 0$  für  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$ , so folgt danach  $(f, u) = 0$  für  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$ , also  $f = 0$ , also ist der Wertebereich von  $\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}$  in  $\mathfrak{H}_0$   $o$ -dicht. Wegen (1.38) ist dieser Wertebereich dann auch in  $\mathfrak{H}$  dicht. Da schließlich aus  $(\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) f = 0$  für ein  $f$  aus  $\mathfrak{H}'$  sofort nach (1.53)  $(f, (\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) f)_0 = \|f\|_s^2 = 0$  folgt, ist die Reziproke  $B$  in  $\mathfrak{B}$  von  $\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}$  in  $\mathfrak{H}$  dicht definiert und natürlich wesentlich selbstadjungiert, da  $\underline{B}^{-1} = \underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}$  nach (1.49) beschränkt und insbesondere dicht definiert ist. Außerdem folgt aus der Existenz der Reziproken die Definitheit von  $\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}$ . Es gilt zufolge (1.53), wenn man darin  $(\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) u$  durch  $u$  ersetzt:

$$(1.54) \quad (f, B u) = (f, u)_0, \quad \text{falls } f \text{ aus } \mathfrak{H}', u \text{ aus } \mathfrak{B} \text{ ist.}$$

Durch  $o$ -Abschließen verifiziert man diese Gleichung zunächst für alle  $f$  aus  $\mathfrak{H}_0$ ,  $u$  aus  $\mathfrak{B}$ . Ist nun  $u$  aus  $\mathfrak{B}$ , so wähle man eine Folge  $u_n$  aus  $\mathfrak{B}$  mit  $u_n \rightarrow u$ ,  $B u_n \rightarrow B u$ . Man hat zufolge (1.38) und (1.53):  $\|u_n - u_m\|_0^2 = (B u_n - B u_m, (\underline{S}^V \underline{S}^{2'} + \underline{T}^V \underline{T}^{2'}) (B u_n - B u_m))_0 \leq 2 \|B u_n - B u_m\|^2 < \varepsilon$ , falls

$n, m > N(\varepsilon)$ . Also ist  $B u_n$  auch  $o$ -konvergent. Gelte  $u_n \rightarrow \tilde{u}$ , so folgt wegen (1.38) auch  $u_n \rightarrow \tilde{u}$ , also  $\tilde{u} = u$ , also  $u \in \mathfrak{H}_0$ . Folglich gilt  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}_0$ . Ersetzt man in (1.54)  $u$  durch  $u_n$  und vollzieht den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ , so folgt

$$(1.50) \quad (f, \underline{B} u) = (f, u)_0 \quad \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}_0, u \text{ aus } \mathfrak{B}.$$

Damit wäre VI) bewiesen.

## II. Definition des separierbaren Operators und Selbstadjungiertheitskriterien.

### § 1. Der separierbare Operator.

Mit Hilfe der im ersten Kapitel bereitgestellten Hilfsmittel definieren wir nun den „separierbaren“ Operator im Raume  $\mathfrak{H}$  des Produktes  $\mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  wie folgt:

#### Definition 2.1.1:

Es seien  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  die aus den Räumen  $\mathfrak{H}^1$  und  $\mathfrak{H}^2$  mit Hilfe der Operatoren  $S^1, T^1, S^2, T^2$  gebildeten  $\mathfrak{P}$ -Systeme (Def. 1.1.1),  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  das aus ihnen im Sinne von Def. 1.3.2 gebildete Kreuzprodukt;  $B$  in  $\mathfrak{B}$  sei die in (1.4.VI) erläuterte Reziproke von  $S^1 S^{2'} + T^{1'} T^2$  und  $B$  in  $\mathfrak{B}$  ihr Abschluß. Endlich seien in  $\mathfrak{A}^1 \subseteq \mathfrak{H}^1$  und  $\mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{H}^2$  zwei lineare Operatoren  $A^1$  bzw.  $A^2$  der Räume  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $\mathfrak{H}^2$  definiert. Dann erkläre man den Operator  $A$  in  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$  und die Vektorenmenge  $\mathfrak{S}_A$  folgendermaßen:

$\mathfrak{S}_A$ : Alle  $u = u^1 \cdot u^2$  mit  $u^1 \in \mathfrak{A}^1, u^2 \in \mathfrak{A}^2$  und  $(\underline{A}^1 \underline{S}^{2'} + \underline{A}^2 \underline{T}^{1'}) u \in \mathfrak{B}$ .

$\mathfrak{A}$ : Alle endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus  $\mathfrak{S}_A$ .

$$A u = \underline{B}(\underline{A}^1 \underline{S}^{2'} + \underline{A}^2 \underline{T}^{1'}) \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{A}.$$

Wir werden sagen, daß der Operator  $A$  in  $\mathfrak{A}$  bezüglich der direkten Zerlegung  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  in die Komponenten  $A^1$  und  $A^2$  zerfällt oder separiert werden kann. Daneben ist auch die folgende, zu  $A$  in  $\mathfrak{A}$  gehörige Form von Bedeutung:

#### Definition 2.1.2:

Es seien die Voraussetzungen von Def. 2.1.1 erfüllt. Dann sei mit Hilfe von  $A^1$  in  $\mathfrak{A}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{A}^2$  die Form  $A(u, v)$  im Definitionsbereich  $\mathfrak{D}$  und die Vektorenmenge  $\mathfrak{S}_A$  folgendermaßen erklärt:

$\mathfrak{S}_A$ : Alle  $u = u^1 u^2$  mit  $u^1$  aus  $\mathfrak{A}^1, u^2$  aus  $\mathfrak{A}^2$ .

$\mathfrak{D}$ : Alle endlichen Linearkombinationen von Elementen aus  $\mathfrak{S}_A$ .

$$(2.1) \quad A(u, v) = (u^1, A^1 v^1)(u^2, v^2)_e + (u^1, v^1)_t(u^2, A^2 v^2)$$

jeweils für  $u, v$  aus  $\mathfrak{S}_A$ , linear für alle anderen  $u, v$  aus  $\mathfrak{D}$ .

Trivial ist damit der

#### Hilfssatz 2.1.1:

Für alle  $u$  aus  $\mathfrak{D}, v$  aus  $\mathfrak{A}$  gilt:

$$(2.2) \quad A(u, v) = (u, A v).$$

Denn man hat nach (1.50) für  $u$  aus  $\mathfrak{D}, v$  aus  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{aligned} (u, A v) &= (u, \underline{B}(\underline{A}^1 \underline{S}^{2'} + \underline{A}^2 \underline{T}^{1'}) v) \\ &= (u, \underline{A}^1(\underline{S}^{2'} + \underline{A}^2 \underline{T}^{1'}) v)_0 = A(u, v) \end{aligned}$$

Um zu erkennen, daß auf diese Weise tatsächlich eine Verallgemeinerung der bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen bekannten Separation der Variablen gewonnen wird, wollen wir die Definition 2.1.1 an einer der bereits bekannten Separationen aus der Potentialtheorie erläutern. Beispiele zur Separation der Variablen werden meistens in der Form (0.2) angeboten, an welcher die Möglichkeit der Separation am leichtesten ins Auge springt. Das so vorgelegte Problem ist nur unter der Bedingung behandelbar, daß  $C_x, D_x, C_y, D_y$  sämtlich in bezug auf passend eingeführte Skalarprodukte  $[u^1, v^1]$  und  $[u^2, v^2]$  hermitesch sind und daß wenigstens auf einer Seite der obigen Gleichung ein positiv definiter Operator steht. Als dann kann o.B.d.A. angenommen werden,  $D_x + D_y$  sei definit und  $D_x$ , wie auch  $D_y$  selbst seien mindestens positiv. Man gelangt rein formal zu der von uns benötigten Form, indem man diese Gleichung von links mit  $(1 + D_x)^{-1} (1 + D_y)^{-1}$  multipliziert. Führt man dann ein

$$\begin{aligned} S^{1'} &= (1 + D_x)^{-1} D_x, & T^{1'} &= (1 + D_x)^{-1} \\ S^{2'} &= (1 + D_y)^{-1}, & T^{2'} &= (1 + D_y)^{-1} D_y \\ A^1 &= (1 + D_x)^{-1} C_x, & A^2 &= (1 + D_y)^{-1} C_y, \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$(2.3) \quad (\underline{A}^1 \underline{S}^{2'} + \underline{A}^2 \underline{T}^{1'}) u = \lambda (\underline{S}^{1'} \underline{S}^{2'} + \underline{T}^{1'} \underline{T}^{2'}) u.$$

Ist also  $\mathfrak{P}^1$  das mit Hilfe von  $S^{1'}$  und  $T^{1'}$  aus  $\mathfrak{H}^{1,7}$  gebildete  $\mathfrak{P}$ -System,  $\mathfrak{P}^2$  das mit Hilfe von  $S^{2'}$  und  $T^{2'}$  aus  $\mathfrak{H}^{2,7}$  gebildete  $\mathfrak{P}$ -System, sei  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  und werde endlich  $A$  in  $\mathfrak{A}$  nach Def. 2.1.1 gebildet, so folgt aus (2.3):  $Au = \lambda u$ . Man gelangt also zu einem Operator  $A$  in  $\mathfrak{A}$  von der in Def. 2.1.1 charakterisierten Form.

Man betrachte als Beispiel etwa den von E. HILB [7] und [8] behandelten Fall:

Es sei das Problem

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 2\sqrt{R(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( 2\sqrt{R(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} f \right) + 2\sqrt{R_1(v)} \frac{\partial}{\partial v} \left( 2\sqrt{R_1(v)} \frac{\partial}{\partial v} f \right) \\ - \frac{5}{4} (\mu^3 - v^3) f = H \cdot (\mu - v) f \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R(\mu) &= (\mu - e_1)(\mu - e_2)(\mu - e_3)(\mu - e_4)(e_5 - \mu) \\ R_1(v) &= (v - e_1)(v - e_2)(v - e_3)(e_4 - v)(e_5 - v) \end{aligned}$$

( $e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5$  reell,  $\sum_{i=1}^5 e_i = 0$  im Rechteck  $R$ :  $\bar{v}_1 \leq v \leq \bar{v}_2, \bar{\mu}_1 \leq \mu \leq \bar{\mu}_2$ ,  $e_3 < \bar{v}_1 < \bar{v}_2 < e_4 < \bar{\mu}_1 < \bar{\mu}_2 < e_5$ ) betrachtet. Randbedingungen:  $f$  (Rand des Rechteckes) = 0.  $H$  sei der Eigenwertparameter. Bei HILB [7] ist die Vollständigkeit der Eigenprodukte dieses Problems bewiesen. In [8] wird auch noch die Möglichkeit der Integraldarstellung willkürlicher Funktionen nach Produkten der Wellenfunktionen des aus (2.4) durch die spezielle Wahl  $e_2 = e_3 = \bar{v}_1$  entstehenden singulären Problems gezeigt. Unterwirft man diese Probleme den in dieser Arbeit beschriebenen Prozessen, so hat man nach

<sup>7)</sup>  $\mathfrak{H}^1$  sei der mit Hilfe von  $(u^1, v^1) = [u^1, (1 + D_x) v^1]$  aus den Funktionen  $u^1(x)$  gebildete Hilbertraum, desgl.  $\mathfrak{H}^2$  der mit Hilfe von  $(u^2, v^2) = [u^2, (1 + D_y) v^2]$  aus den Funktionen  $u^2(y)$  gebildete Hilbertraum.

obigem zu setzen:

$$S^V u^1(\mu) = \frac{\mu - e}{1 + \mu - e} u^1(\mu), \quad T^V u^1(\mu) = \frac{1}{1 + \mu - e} u^1(\mu)$$

$$T^V u^2(v) = \frac{e - v}{1 + e - v} u^2(v), \quad S^V u^2(v) = \frac{1}{1 + e - v} u^2(v)$$

$$A^1 u^1 = \frac{1}{1 + \mu - e} \left\{ 2 \sqrt{R(\mu)} \frac{d}{d\mu} \left( 2 \sqrt{R(\mu)} \frac{du^1}{d\mu} \right) - \frac{5}{4} \mu^3 u^1 \right\}$$

$$A^2 u^2 = \frac{1}{1 + e - v} \left\{ 2 \sqrt{R_1(v)} \frac{d}{dv} \left( 2 \sqrt{R_1(v)} \frac{du^2}{dv} \right) + \frac{5}{4} v^3 u^2 \right\}.$$

Dabei ist  $e$  eine beliebige Zahl mit  $\bar{v}_2 < e < \bar{\mu}_1$ .  $\mathfrak{H}^1$  und  $\mathfrak{H}^2$  sind die Räume aller Funktionen mit

$$\int_{\bar{\mu}_1}^{\bar{\mu}_2} \frac{1 + \mu - e}{|R(\mu)|} |u^1(\mu)|^2 d\mu < \infty \quad \text{bzw.} \quad \int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} \frac{1 + e - v}{|R_1(v)|} |u^2(v)|^2 dv < \infty$$

und den entsprechenden Skalarprodukten. Offenbar ist daher zunächst auch für ganz beliebige Entartungen des Problems, in denen nur noch  $\bar{v}_2 < \bar{\mu}_1$  bleibt, stets jeder der Operatoren  $(S^V)^{-1}$ ,  $(T^V)^{-1}$ ,  $(S^W)^{-1}$ ,  $(T^W)^{-1}$  beschränkt. Auch lassen sich, wie aus der Theorie der regulären oder singulären STURM-LIOUVILLESCHEN Eigenwertproblemen hervorgeht, stets die Definitionsbereiche von  $A^1$  und  $A^2$  so wählen, daß diese Operatoren selbstadjungiert sind. Nach dem später zu beweisenden Kriterium I folgt daher sofort die wesentliche Selbstadjungiertheit des aus  $A^1$  und  $A^2$  im Kreuzprodukt  $\mathfrak{P}$  der durch  $\mathfrak{H}^1$ ,  $S^V$ ,  $T^V$  und  $\mathfrak{H}^2$ ,  $S^W$ ,  $T^W$  gebildeten  $\mathfrak{P}$ -Systeme  $\mathfrak{P}^1$  und  $\mathfrak{P}^2$  gebildeten Operators. Im Zusammenhang mit einer späteren Arbeit werde ich für diese Probleme sehr leicht auch die allgemeinen Entwicklungssätze, die über die von HILB gewonnenen weit hinausgehen, beweisen können.

## § 2. Elementare Eigenschaften des Operators der Definition 2.1.1.

Man hat zunächst sofort den

### Hilfssatz 2.2.1:

Für den in Definition 2.1.1 erklärten Operator  $A$  in  $\mathfrak{H}$  gilt stets  $(u, Av) = (Au, v)$ , falls  $u$  und  $v$  aus  $\mathfrak{H}$  und  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$ ,  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  hermitesch sind.

*Beweis:* Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2.1.1.

Um jedoch z. B. Bedingungen dafür anzugeben, daß der Operator  $A$  in  $\mathfrak{H}$  z. B. dicht definiert ist, hat man etwas umfangreichere Betrachtungen anzustellen. Wir definieren zunächst:

### Definition 2.2.1:

Es seien die Voraussetzungen der Definition 2.1.1 erfüllt. Ferner möge  $\mathfrak{P}^1$   $s$ -definit und  $\mathfrak{P}^2$   $t$ -definit sein. Die Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  seien dicht definiert.  $\alpha$  sei eine beliebige komplexe Zahl. Dann erkläre man den Operator  $A_\alpha$  in  $\mathfrak{H}_\alpha$  und die Vektormenge  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_\alpha}$  folgendermaßen:

$\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_\alpha}$ : Alle  $u = u^1 u^2$  mit

$$u^1 \in \mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)}, \quad u^2 \in \mathfrak{D}_{M^1(A^2 + \alpha)}.$$

$\mathfrak{H}_\alpha$ : Alle endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_\alpha}$ .  $A_\alpha$  sei so beschaffen, daß für  $f$  aus  $\mathfrak{D}$ ,  $u$  aus  $\mathfrak{H}_\alpha$  stets gilt:

$$(2.5) \quad A(f, u) = (f, A_\alpha u)^s.$$

<sup>s)</sup> Zur Begründung der Möglichkeit dieser Definition siehe Hilfssatz 2.2.2.



**Hilfssatz 2.2.2:**

Die Definition 2.2.1 ist sinnvoll, d. h. es gibt unter den Voraussetzungen von Definition 2.2.1 tatsächlich zu jedem  $u$  aus  $\mathfrak{A}_x$  genau einen Vektor  $A_x u$ , der der Beziehung (2.5) genügt. Es gilt für alle  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}$  die Abschätzung

$$(2.6) \quad \|A_x u\| \leq c(u^1, u^2) \text{ mit} \\ c(u^1, u^2) = \{\|u^2\|_s \|L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1\|_s + \|u^1\|_t \|M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2\|_t\}.$$

Zudem hat man

$$(2.7) \quad (f, A_x u) = ((u^2, f)_s, L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1)_s + ((u^1, f)_t, M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2)_t$$

für  $f$  aus  $\mathfrak{F}$  und  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}$ .

*Beweis:* Man hat für  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}$ ,  $f = \sum_{r=1}^n f_r^1 f_r^2$  aus  $\mathfrak{F}$ ,  $f_r^1 f_r^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ :

$$\begin{aligned} A(f, u) &= \sum_{r=1}^n \{(f_r^2, u^2)_s (f_r^1, A^1 u^1) + (f_r^1, u^1)_t (f_r^2, A^2 u^2)\} \\ &= \sum_{r=1}^n \{(f_r^2, u^2)_s (f_r^1, (A^1 - \alpha T^{1'}) u^1) + (f_r^1, u^1)_t (f_r^2, (A^2 + \alpha S^{2'}) u^2)\} \\ &= (\sum_{r=1}^n f_r^1 (f_r^2, u^2)_s, L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1)_s + (\sum_{r=1}^n (f_r^1, u^1)_t f_r^2, M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2)_t, \end{aligned}$$

also

$$(2.8) \quad A(f, u) = ((u^2, f)_s, L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1)_s + ((u^1, f)_t, M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2)_t.$$

Denn da für  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}$  stets gilt  $u^1 \in \mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)}$ ,  $u^2 \in \mathfrak{D}_{M^2(A^2 + \alpha)}$ , folgt auch die Existenz von  $L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1 = L^1(A^1 - \alpha) u^1 + L^1 S^1 u^1$  und analog diejenige von  $M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2$ . Daraus erschließt man unter Benutzung der Ungleichungen (1.45):

$$(2.9) \quad |A(f, u)| \leq \|f\|_s \|u^2\|_s \|L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1\|_s + \|f\|_t \|u^1\|_t \|M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2\|_t,$$

also

$$(2.10) \quad |A(f, u)| \leq c(u^1, u^2) \|f\| \text{ mit} \\ c(u^1, u^2) = \|u^2\|_s \|L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1\|_s + \|u^1\|_t \|M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2\|_t.$$

Nach dem FRECHETSchen Satz folgt hieraus die Existenz eines Vektors  $\varphi(u)$ , so daß gilt:

$$(2.11) \quad A(f, u) = (f, \varphi(u)).$$

Die Eindeutigkeit des Vektors  $\varphi$  ist trivial. Setzt man  $A_x u = \varphi(u)$ , so ist damit der Operator  $A_x$  für jedes  $u$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}$  im Sinne der Definition 2.2.1

eindeutig erklärt. Erklärt man für  $u = \sum_{r=1}^n u_r^1 u_r^2$ , ( $u_r^1 u_r^2 \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}$ ):  $A_x u =$

$$= \sum_{r=1}^n A_x(u_r^1 u_r^2), \text{ so ist damit } A_x \text{ in ganz } \mathfrak{A}_x \text{ eindeutig erklärt, es gilt (2.5)}$$

und die Definition 2.2.1 ist somit sinnvoll. Weiter folgt aus (2.5), indem man darin  $f$  eine gegen  $A_x u = \varphi$  strebende Folge durchlaufen läßt, daß die Relationen (2.6) Gültigkeit haben. Aus (2.5) und (2.8) ergibt sich

$$(2.12) \quad (f, A_x u) = ((u^2, f)_s, L^1(A^1 - \alpha T^{1'}) u^1)_s + ((u^1, f)_t, M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) u^2)_t \\ \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{F}, u = u^1 u^2 \text{ aus } \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_x}.$$

Da schließlich  $\overline{\mathfrak{D}}$  zufolge der Dichtheit von  $\mathfrak{H}^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $\mathfrak{H}^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  in  $\mathfrak{H}$  dicht ist, ergibt sich aus (2.12) durch Abschließen unter Berücksichtigung von (1.4.I) sofort die Relation (2.7). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

### Definition 2.2.2:

Es sei  $e$  eine Punktmenge der komplexen  $\alpha$ -Ebene. Zu jedem  $\alpha \in e$  seien zwei Operatoren  $A_\alpha^1$  in  $\mathfrak{H}_\alpha^1 \subseteq \mathfrak{H}^1$  und  $A_\alpha^2$  in  $\mathfrak{H}_\alpha^2 \subseteq \mathfrak{H}^2$  so definiert, daß die Voraussetzungen der Definition 2.2.1 erfüllt sind. Für  $u^1 \in \mathfrak{H}_\alpha^1$ ,  $\alpha, \alpha' \in e$  gelte  $A_\alpha^1 u^1 = A_{\alpha'}^1 u^1$ , für  $u^2 \in A_\alpha^2 \cdot A_{\alpha'}^2$  ebenso  $A_\alpha^2 u^2 = A_{\alpha'}^2 u^2$ . Dann definiere man den Operator  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  sowie die Vektorenmenge  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_e}$  folgendermaßen:

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_e} = \sum_{\alpha \in e} \mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_\alpha}.$$

$\mathfrak{H}_e$ : Alle endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_e}$ ,  $A_e u = A_\alpha u$  für  $u$  aus  $\mathfrak{H}_\alpha$ , linear sonst.

### Hilfssatz 2.2.3:

Gilt im Falle der Gültigkeit der Voraussetzungen der Definition 2.2.2 für  $\alpha \in e$ :  $A_\alpha^1 \subseteq A^1$ ,  $A_\alpha^2 \subseteq A^2$  und genügen  $A^1$  und  $A^2$  den Voraussetzungen von Definition 2.1.1, so ist der Operator  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  stets Einschränkung des Operators  $A$  in  $\mathfrak{H}$ , der nach Definition 2.1.1 aus den Komponenten  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$ ,  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  gebildet wird. Für jede Teilmenge  $e'$  von  $e$  gilt  $A_{e'} \subseteq A_e$ .

Beweis: a) Es gilt nach (2.5) und (2.1) für  $f$  aus  $\overline{\mathfrak{D}}$ ,  $u$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_\alpha}$ :

$$\begin{aligned} (f, A_\alpha u) &= A(f, u) = (f, A_\alpha^1 u^1 S^{2'} u^2 + A_\alpha^2 u^2 T^{1'} u^1)_0 \\ &= (f, A^1 u^1 S^{2'} u^2 + A^2 u^2 T^{1'} u^1)_0. \end{aligned}$$

Da  $\overline{\mathfrak{D}}$  nach Hilfssatz 1.3.3 in  $\mathfrak{H}_0$  o-dicht ist, gilt die Relation  $(f, A_e u) = (f, A^1 u^1 S^{2'} u^2 + A^2 u^2 T^{1'} u^1)_0$  auch für alle  $f$  aus  $\mathfrak{H}_0$ , wie man durch o-Abschließen unter Benutzung von (1.38) sofort folgert. Nun ist nach (1.50)  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_0$ , also hat man für  $f$  aus  $\mathfrak{H}$  nach (1.50):

$$(f, A_e u) = (B f, (\underline{A}^1 S^{2'} + \underline{A}^2 T^{1'}) u).$$

Aus der Selbstadjungiertheit des Operators  $B$  in  $\mathfrak{H}$  folgt nun aber sofort  $(\underline{A}^1 S^{2'} + \underline{A}^2 T^{1'}) u \in \mathfrak{H}$ , d. h.  $u \in \mathfrak{H}$ ,

$$A_e u = A u = B(\underline{A}^1 S^{2'} + \underline{A}^2 T^{1'}) u = A u.$$

Also ist  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_\alpha} \subseteq \mathfrak{H}$  für  $\alpha \in e$ , also  $\mathfrak{H}_e \subseteq \mathfrak{H}$  und  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  Einschränkung von  $A$  in  $\mathfrak{H}$ .

b) Gilt  $e' \subseteq e$ , so folgt sofort  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_{e'}} \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{H}_e}$ , also  $\mathfrak{H}_{e'} \subseteq \mathfrak{H}_e$ . Da nach Definition gilt  $A_e u = A_{e'} u$ , falls  $u$  aus  $\mathfrak{H}_{e'}$  gilt, ist die Behauptung  $A_{e'} \subseteq A_e$  evident. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

### Hilfssatz 2.2.4:

Es seien die Voraussetzungen der Definition 2.2.1 erfüllt, und es seien die Definitionsbereiche  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)}$  und  $\mathfrak{D}_{M^1(A^1 + \alpha)}$  in  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $\mathfrak{H}^2$  dicht. Dann ist  $A_\alpha$  in  $\mathfrak{H}_\alpha$ , sowie das nach Def. 2.1.1 gebildete  $A$  in  $\mathfrak{H}$  dicht definiert.

Beweis: Folgt aus den Hilfssätzen 1.3.3 und 2.2.3.

### Zusatz zu Hilfssatz 2.2.4:

Die Behauptung des Hilfssatzes gilt ebenfalls, wenn man statt der Dichtheit der Räume  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)}$ ,  $\mathfrak{D}_{M^1(A^1 + \alpha)}$  verlangt, daß  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  abgeschlossen seien, daß der Durchschnitt  $z$  der Resolventenmengen von  $A^1$  und  $-A^2$  nicht leer und  $\alpha \in z$  sei.

*Beweis:* Es sei  $\alpha$  ein Punkt der Menge  $z$ . Dann ist sowohl  $(A^1 - \alpha)^{-1}$  als auch  $(A^2 + \alpha)^{-1}$  für alle  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}^2$  erklärt und beschränkt. Es ist möglich, die (dicht definierten) Einschränkungen dieser Operatoren auf die Bereiche  $\mathfrak{Q}^1$  bzw.  $\mathfrak{M}^1$  durch Abschließen wieder auf  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $\mathfrak{H}^2$  zu erweitern. Also sind auch die Bereiche  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)} = (A^1 - \alpha)^{-1} \mathfrak{Q}^1$ ,  $\mathfrak{D}_{M^2(A^2 + \alpha)} = (A^2 + \alpha)^{-1} \mathfrak{M}^2$  in  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $\mathfrak{H}^2$  noch dicht, also auch in  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $\mathfrak{H}^2$  dicht. Damit ist aber der Hilfssatz 2.2.4 anwendbar und die Behauptung bewiesen.

#### Hilfssatz 2.2.5:

Es seien die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.2.3 für die Punktmenge  $e$  erfüllt. Für irgendein  $\alpha \in e$  mögen überdies die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2.4 oder diejenigen des Zusatzes zu Hilfssatz 2.2.4 Gültigkeit haben. Die Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  seien außerdem hermitesch. Dann sind auch die Operatoren  $A$  in  $\mathfrak{H}$  und  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  hermitesch.

*Beweis:* Aus Hilfssatz 2.2.4 oder dessen Zusatz folgt die Dichtheit von  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{H}_e$ ; nach Hilfssatz 2.2.1 ist aber dann  $A$  in  $\mathfrak{H}$  bzw.  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  hermitesch, was zu beweisen war.

#### Hilfssatz 2.2.6:

Seien die Voraussetzungen der Definition 2.2.1 sowohl in bezug auf das Operatorenpaar  $\overset{\circ}{A}^1$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}^1$ ,  $\overset{\circ}{A}^2$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}^2$ , als auch auf das Operatorenpaar  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$ ,  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  erfüllt, und gelte  $\overset{\circ}{A}^1 \subseteq A^1$ ,  $\overset{\circ}{A}^2 \subseteq A^2$ . Für einen festen Punkt  $\gamma$  sei  $L^1(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma)$  in  $\mathfrak{D}_{L^1(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma)}$  durch  $s$ -Abschließen auf  $L^1(A^1 - \gamma)$  in  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \gamma)}$ ,  $M^2(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma)$  in  $\mathfrak{D}_{M^2(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma)}$  durch  $t$ -Abschließen auf  $M^2(A^2 + \gamma)$  in  $\mathfrak{D}_{M^2(A^2 + \gamma)}$  fortsetzbar<sup>9)</sup>. Ferner sei wenigstens eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- $A^1, A^2$  seien abgeschlossen,  $\gamma$  sei ein Punkt des Durchschnittes der Resolventenmengen von  $A^1$  und  $-A^2$ .
- Es seien die Reziproken  $(S^1)^{-1}$  und  $(T^2)^{-1}$  beschränkt.
- $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$ ,  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  seien selbstadjungiert,  $\gamma$  sei reell, für die (linksstetigen) Spektralscharen  $E_{\lambda}^1$  und  $E_{\lambda}^2$  von  $A^1$  und  $-A^2$  gelte:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \|E_{\lambda_1}^1 u^1\|_t &\leq c(\Delta) \|E_{\lambda_1}^1 u^1\|_s && \text{für } u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}^1, \\ \|E_{\lambda_2}^2 u^2\|_s &\leq c(\Delta) \|E_{\lambda_2}^2 u^2\|_t && \text{für } u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}^2 \end{aligned}$$

und für jedes  $E_{\lambda_1}^1 = E_{\lambda_1}^1 - E_{\lambda_1}^1$ ,  $E_{\lambda_2}^2 = E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}^2$  mit  $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $|\lambda_1 - \gamma| < \delta$ ,  $v = 1, 2$ . Dabei sei  $c(\Delta)$  eine von  $u^1$  und  $u^2$  nicht abhängige Konstante.

Ist dann  $\overset{\circ}{A}_\gamma$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}_\gamma$  der aus  $\overset{\circ}{A}^1$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}^1$  und  $\overset{\circ}{A}^2$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}^2$  nach Definition 2.2.1 entstehende Operator, so ist  $\overset{\circ}{A}_\gamma$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}_\gamma$  Einschränkung von  $A_\gamma$  in  $\mathfrak{H}_\gamma$ , die sich durch Abschließen wieder auf  $A_\gamma$  in  $\mathfrak{H}_\gamma$  fortsetzen läßt<sup>9)</sup>.

<sup>9)</sup> Wir werden diese Ausdrucksweise in folgender Form benutzen: Die Einschränkung  $\overset{\circ}{C}$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$  eines Operators  $C$  in  $\mathfrak{U}$  (der nicht notwendig dicht definiert zu sein braucht) kann durch Abschließen (bzw.  $s$ -Abschließen bzw.  $t$ -Abschließen) wieder auf  $C$  in  $\mathfrak{U}$  fortgesetzt werden, wenn zu  $u$  aus  $\mathfrak{U}$  stets eine Folge  $u_n$  aus  $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$  existiert, derart, daß  $u_n \rightarrow u$ ,  $\overset{\circ}{C} u_n \rightarrow C u$  (bzw.  $u_n \xrightarrow{s} u$ ,  $\overset{\circ}{C} u_n \xrightarrow{s} C u$ , bzw.  $u_n \xrightarrow{t} u$ ,  $\overset{\circ}{C} u_n \xrightarrow{t} C u$ ) gilt. Über die eindeutige Abschließbarkeit ist damit also nichts ausgesagt, da ja z. B.  $\overset{\circ}{C}$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$  gar nicht dicht definiert zu sein braucht.

*Beweis:* Zunächst erschließt man sofort  $\overset{\circ}{A}_\gamma \subseteq A_\gamma$ , denn es gilt sicherlich  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_\gamma} \subseteq \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_\gamma}$ , also  $\mathfrak{A}_\gamma \subseteq \mathfrak{A}_\gamma$  und  $\overset{\circ}{A}_\gamma u = A_\gamma u$  für alle  $u$  aus  $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}_\gamma$ . Sei nun  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_\gamma}$ . Dann gibt es wegen  $u^1 \in \mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \gamma)}$ ,  $u^2 \in \mathfrak{D}_{M^1(A^2 + \gamma)}$  nach Voraussetzung eine Folge  $u_n^1$  aus  $\mathfrak{D}_{L^1(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma)}$  und eine Folge  $u_n^2$  aus  $\mathfrak{D}_{M^1(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma)}$ , so daß gilt:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} u_n^1 &\xrightarrow{s} u^1, \quad L^1(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma) u_n^1 \xrightarrow{s} L^1(A^1 - \gamma) u^1 \\ u_n^2 &\xrightarrow{t} u^2, \quad M^2(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma) u_n^2 \xrightarrow{t} M^2(A^2 + \gamma) u^2. \end{aligned}$$

Aus den Konvergenzen

$$(2.15) \quad \begin{aligned} L^1(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma) u_n^1 &\xrightarrow{s} L^1(A^1 - \gamma) u^1 \\ M^2(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma) u_n^2 &\xrightarrow{t} M^2(A^2 + \gamma) u^2 \end{aligned}$$

folgt man sofort die  $\mathfrak{S}$ -Konvergenzen

$$(2.16) \quad (\overset{\circ}{A}^1 - \gamma) u_n^1 \rightarrow (A^1 - \gamma) u^1, \quad (\overset{\circ}{A}^2 + \gamma) u_n^2 \rightarrow (A^2 + \gamma) u^2.$$

Hieraus nun folgt im Falle der Gültigkeit der Voraussetzung (a) sofort

$$(2.17) \quad u_n^1 \rightarrow u^1, \quad u_n^2 \rightarrow u^2.$$

Gelten die Voraussetzungen (c), so folgt unter Anwendung von Hilfssatz 1.2.7 aus  $(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma) (u_n^1 - u^1) \rightarrow 0$ ,  $(u_n^1 - u^1) \xrightarrow{s} 0$  und  $(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma) (u_n^2 - u^2) \rightarrow 0$ ,  $(u_n^2 - u^2) \xrightarrow{t} 0$  sofort erneut (2.17). Gelten aber die Voraussetzungen (b), so hat man sofort  $\|u_n^1 - u^1\|^2 = (u_n^1 - u^1, (S^V)^{-1} (u_n^1 - u^1))_s \leq c \|u_n^1 - u^1\|_s^2 < \varepsilon$ ,  $n > N(\varepsilon)$ , ebenso  $\|u_n^2 - u^2\| < \varepsilon$ ,  $n > N(\varepsilon)$ , also wiederum (2.17).

Daher gilt (wegen 1.1.I) insgesamt stets

$$(2.18) \quad \begin{aligned} u_n^1 &\xrightarrow{t} u^1, \quad L^1(\overset{\circ}{A}^1 - \gamma) u_n^1 \xrightarrow{s} L^1(A^1 - \gamma) u^1 \\ u_n^2 &\xrightarrow{s} u^2, \quad M^2(\overset{\circ}{A}^2 + \gamma) u_n^2 \xrightarrow{t} M^2(A^2 + \gamma) u^2. \end{aligned}$$

Folglich hat man aber nach (2.6):

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{A}_\gamma u_n^1 - A_\gamma u^1\| &= \|A_\gamma (u_n - u)\| \leq \|A_\gamma u_n^1 (u_n^2 - u^2)\| \\ &+ \|A_\gamma (u_n^1 - u^1) u^2\| \leq c (u_n^1, u_n^2 - u^2) + c (u_n^1 - u^1, u^2). \end{aligned}$$

Aus (2.6) liest man ohne weiteres ab, daß die rechte Seite dieser Ungleichung für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Da andererseits nach (1.4.III)  $u_n \rightarrow u$  gilt, hat man gleichzeitig  $u_n \rightarrow u$ ,  $\overset{\circ}{A}_\gamma u_n \rightarrow A_\gamma u$ . Auf diesem Wege kann man die gesamte Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}_\gamma}$  durch Abschließen dem Definitionsbereich  $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}_\gamma$  hinzufügen. Da aber mit zwei Elementen  $u$  und  $v$  auch jede Linearkombination von  $u$  und  $v$  durch Abschließen dem Definitionsbereich  $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}_\gamma$  hinzugefügt werden kann, folgt hieraus unmittelbar die Behauptung.

#### Hilfssatz 2.2.7:

Seien für alle  $\alpha$  einer Punktmenge  $e$  die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.2.6 für die Operatoren  $\overset{\circ}{A}_\alpha^1$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}_\alpha^1$ ,  $\overset{\circ}{A}_\alpha^2$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}_\alpha^2$  und  $A_\alpha^1$  in  $\mathfrak{A}_\alpha^1$ ,  $A_\alpha^2$  in  $\mathfrak{A}_\alpha^2$  erfüllt. Dann ist der Operator  $\overset{\circ}{A}_e$  in  $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}_e$  durch Abschließen auf  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$  fortsetzbar.

*Beweis:* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2.2.6, indem man die am Schluß des Beweises zu diesem Satz gemachten Überlegungen wiederholt.

### § 3. Selbstadjungiertheitskriterien.

Für die nun folgenden Selbstadjungiertheitskriterien machen wir nachstehende

#### Generalvoraussetzungen:

Es seien für die Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  der Räume  $\mathfrak{H}^1$  bzw.  $\mathfrak{H}^2$  die Voraussetzungen der Definition 2.2.1 erfüllt. Die Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  seien selbstadjungiert.  $A$  in  $\mathfrak{A}$  sei immer der in Definition 2.1.1 erklärte Operator,  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$  der Operator, der nach Definition 2.2.2 aus den Operatoren  $A_\alpha^1 = A^1$ ,  $A_\alpha^2 = A^2$  (für jedes  $\alpha \in e$ ) gebildet wird.

Nachstehende vier Kriterien werden wir im weiteren gemeinsam beweisen:

#### Kriterium I:

Es gelte eine der beiden folgenden Bedingungen:

a) Der (in (1.4.VI) erklärte) Operator  $B$  in  $\mathfrak{B}$  ist beschränkt.

b) Wenigstens einer der Operatoren  $(S^1)^{-1}$ ,  $(T^2)^{-1}$  ist beschränkt.

Dann ist  $A$  in  $\mathfrak{A}$  sowie auch  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$  für jedes  $e$ , welches einen Kreis enthält, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, wesentlich selbstadjungiert.

#### Kriterium II:

Es werde die reelle  $\alpha$ -Achse durch die offenen, paarweise punktfremden, reellen Intervalle  $I_r$  bis auf eine höchstens abzählbare Punktmenge  $x$  vollständig überdeckt. Zu jedem  $r$  sei wenigstens einer der Operatoren

$$(2.19) \quad \begin{aligned} R_{i,\alpha}^1 &= (A^1 - i S^1 - \alpha T^1)^{-1} \\ R_{\alpha,i}^2 &= (A^2 + \alpha S^2 - i T^2)^{-1} \end{aligned}$$

für jedes  $\alpha$  aus  $I_r$  überall in  $\mathfrak{H}^1$  (bzw.  $\mathfrak{H}^2$ ) erklärt und beschränkt. Dann ist  $A$  in  $\mathfrak{A}$  wesentlich selbstadjungiert. Ebendasselbe gilt auch für jeden Operator  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$ , falls nur  $e$  zu jedem  $I_r$  einen Kreis  $K_r$  enthält, so daß der Mittelpunkt von  $K_r$  im Intervall  $I_r$  liegt.

#### Kriterium III:

Es sei  $\mathfrak{B}$  doppelt definit. Es gebe eine Menge von Intervallen  $I_r$ , der im Kriterium II geforderten Überdeckungseigenschaft, so daß für zwei beliebige Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2$  mit  $\lambda_1 < \lambda_2$  aus einem bestimmten der Intervalle  $I_r$  gilt:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \|E_\lambda^1 u^1\|_t &\leq c(\lambda) \|E_\lambda^1 u^1\|_s && \text{für } u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}^1, \\ \|E_\lambda^2 u^2\|_s &\leq c(\lambda) \|E_\lambda^2 u^2\|_t && \text{für } u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}^2. \end{aligned}$$

Dabei sei  $E_\lambda^1 = E_{\lambda_1}^1 - E_{\lambda_2}^1$ ,  $E_\lambda^2 = E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_2}^2$ ,  $E_{\lambda_1}^1, E_{\lambda_2}^1$  aber seien die (linksstetigen) Spektralscharen der selbstadjungierten Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $-A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$ . Dann ist  $A$  in  $\mathfrak{A}$  wesentlich selbstadjungiert. Ebendasselbe gilt bereits für jedes  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$ , dessen Menge  $e$  alle Intervalle  $I_r$  enthält.

#### Kriterium IV:

Es sei  $\mathfrak{B}$  doppelt definit. Die Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$  sollen beide nur Punkteigenwerte besitzen, und zwar soll die Menge  $x$  der Häufungspunkte der Spektren von  $A^1$  und  $A^2$  höchstens abzählbar sein. (Ein unendlichdimensionaler Punkteigenwert ist dabei als Häufungspunkt zu werten.) Dann ist  $A$  in  $\mathfrak{A}$  wesentlich selbstadjungiert. Ebendasselbe gilt für jedes  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$ , dessen Menge  $e$  das Komplement von  $x$  in bezug auf die reelle Achse enthält.

Ohne expliziten Beweis führen wir noch an:

### Kriterium V:

Es sei  $\mathfrak{B}$  doppelt definit, und es gebe eine Menge von Intervallen  $I$ , der im Kriterium II beschriebenen Eigenschaften, so daß in jedem  $I$ , entweder einer der Operatoren (2.19) für jedes  $\alpha$  aus  $I$ , beschränkt ist, oder aber die im Kriterium III geforderten Bedingungen Gültigkeit haben. Dann ist  $A$  in  $\mathfrak{A}$  wesentlich selbstadjungiert, und dasselbe gilt für jedes  $A_e$  in  $\mathfrak{A}_e$ , dessen Menge  $e$  Bedingungen genügt, die denen aus Kriterium II bzw. III hier entsprechen.

Der Leser überzeuge sich davon, daß das Kriterium V allein mit Hilfe der im Beweis der Kriterien II und III verwandten Beweiselemente herleitbar ist. Wir beginnen den Beweis der Kriterien I bis IV mit der Zurückführung der Kriterien I und IV auf die Kriterien II und III: Man sieht sehr leicht ein (wie hier nicht auseinandergesetzt werden soll), daß die Voraussetzungen (a) und (b) von Kriterium I gleichbedeutend sind. Wir nehmen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es sei  $\|(S^V)^{-1} u^1\| \leq c_s \|u^1\|$ . Dann gilt für  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$ :  $\|u^1\|_s \geq c_s^{-\frac{1}{2}} \|u^1\|$ , woraus sofort folgt  $\mathfrak{H}_s^1 = \mathfrak{H}_s^{1'} = \mathfrak{H}^1$ , also  $S^V = S^1$ . Daher ist  $(S^V)^{-1} = L^1$ , also  $L^1$  ebenfalls beschränkt und offenbar mit derselben Schranke  $c_s$  auch  $s$ -beschränkt. Zudem folgt für reelles  $\alpha$  die  $s$ -Selbstadjungiertheit des Operators  $L^1(A^1 - \alpha T^V)$ , denn aus  $(g^1, u^1)_s = (f^1, L^1(A^1 - \alpha T^V) u^1)_s$  für  $u^1$  aus  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha T^V)}$  und ein festes Vektorenpaar  $f^1, g^1 \in \mathfrak{H}_s^1 = \mathfrak{H}^1$  folgert man  $(f^1, (A^1 - \alpha T^V) u^1) = (S^1 g^1, u^1)$  für  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha T^V)}$ , also  $f^1 \in \mathfrak{H}^1, (A^1 - \alpha T^V) f^1 = S^1 g^1, L^1(A^1 - \alpha T^V) f^1 = g^1$ . Somit aber ist  $R_{i,\alpha}^{1,s} = \{L^1(A^1 - \alpha T^V) - i\}^{-1}$  überall in  $\mathfrak{H}_s^1$  erklärt und durch die Schranke 1 beschränkt. Folglich ist auch  $R_{i,\alpha}^1 = R_{i,\alpha}^{1,s} L^1$  überall in  $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H}_s^1$  erklärt; es gilt:

$$\|R_{i,\alpha}^1 u^1\| \leq c_s^{\frac{1}{2}} \|R_{i,\alpha}^{1,s} u^1\|_s = c_s^{\frac{1}{2}} \|R_{i,\alpha}^{1,s} L^1 u^1\|_s \leq c_s \|u^1\|.$$

Also existiert die Reziproke  $R_{i,\alpha}^1$  mit dem Definitionsbereich  $\mathfrak{H}^1$  und ist beschränkt für jedes reelle  $\alpha$ . Es sind daher die Voraussetzungen des Kriteriums II erfüllt, falls man als Überdeckung  $I$ , der reellen Achse das einzige Intervall  $-\infty < \alpha < +\infty$  wählt. Damit ist der Beweis von Kriterium I auf den Beweis des Kriteriums II zurückgeführt.

Seien jetzt die Voraussetzungen des Kriteriums IV erfüllt. Alsdann wähle man als Überdeckung  $I_r, r = 1, 2, \dots$  eine beliebige Abzählung der Intervalle, in welche die reelle Achse durch die Punkte der Menge  $x$  eingeteilt wird. Sei nämlich dann  $\lambda_1, \lambda_2$  aus einem beliebigen  $I_r$  gewählt und  $\lambda_1 < \lambda_2$ , so liegen zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nur höchstens endlich viele endlichdimensionale Punkteigenwerte der Operatoren  $A^1$  in  $\mathfrak{H}^1$  und  $-A^2$  in  $\mathfrak{H}^2$ . Die Wertebereiche  $\mathfrak{B}_1^1, \mathfrak{B}_2^1$  der Operatoren  $E_1^1 = E_{\lambda_1}^1 - E_{\lambda_2}^1, E_2^1 = E_{\lambda_2}^1 - E_{\lambda_1}^1$  sind daher höchstens endlichdimensional. Wählt man in  $\mathfrak{B}_1^1$  ein vollständiges, totalorthogonales,

$s$ -normiertes Vektorensystem  $\varphi_v^1, v = 1, \dots, n$ , und setzt  $\beta_v = \|\varphi_v^1\|_s^2, \text{Max}_{v=1}^n \beta_v$

$= (c_1(A))^2$ , so gilt für beliebiges  $u^1$  aus  $\mathfrak{B}_1^1$ :  $u^1 = \sum_{v=1}^n u_v^1 \varphi_v^1$  und  $\|u^1\|_s^2$

$= \sum_{v=1}^n |u_v^1|^2 \beta_v \leq (c_1(A))^2 \sum_{v=1}^n |u_v^1|^2 = (c_1(A))^2 \|u^1\|_s^2$ , also  $\|u^1\|_s \leq c_1(A) \|u^1\|$ . Folglich

wegen  $E_1^1 u^1 \in \mathfrak{B}_1^1$ :  $\|E_1^1 u^1\|_s \leq c_1(A) \|E_1^1 u^1\|$  für  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$ . Ebenso folgt  $\|E_2^1 u^1\|_s \leq c_2(A) \|E_2^1 u^1\|$  für  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}^2$ . Setzt man noch  $c(A) = \text{Max}(c_1(A),$

$c_2(A)$ ), so ergeben sich die Beziehungen (2.20). Also ist Kriterium III anwendbar und das Kriterium IV auf das Kriterium III zurückgeführt.

Zum Beweis der Kriterien II und III stellen wir folgende Hilfsmittel bereit:

a) Nach Hilfssatz 1.2.3 sind die Reziproken

$R_{-\alpha, i}^{2, t} = \{M^2(A^2 + \alpha S^2 - i T^2)\}^{-1}$  und  $R_{i, \alpha}^{1, t} = \{L^1(A^1 - i S^1 - \alpha T^1)\}^{-1}$  für alle  $\alpha$  der unteren bzw. der oberen Halbebene überall in  $\mathfrak{H}_i^2$  erklärt und beschränkt und es gilt:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \|R_{-\alpha, i}^{2, t} u^2\|_t &\leq (2|\alpha_2|)^{-\frac{1}{2}} \|u^2\|_t && \text{für } u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_i^2, \\ \|R_{-\alpha, i}^{2, t} u^2\|_t &\leq \|u^2\|_t && \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha < 0, \\ \|R_{i, \alpha}^{1, t} u^1\|_t &\leq (2|\alpha_2|)^{-\frac{1}{2}} \|u^1\|_t && \text{für } u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}_i^1, \\ \|R_{i, \alpha}^{1, t} u^1\|_t &\leq \|u^1\|_t && \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha > 0. \end{aligned}$$

Damit das Produkt  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  existiert, ist nach § 1.3 notwendig, daß entweder noch  $\mathfrak{P}^1$   $t$ -definit ist, oder aber  $\mathfrak{P}^2$   $s$ -definit ist. Wir werden hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\mathfrak{P}^1$   $t$ -definit ist. Dann ist ebenso die Reziproke  $R_{i, \alpha}^{1, t} = \{M^1(A^1 - i S^1 - \alpha T^1)\}^{-1}$  für jedes  $\alpha$  der oberen Halbebene überall in  $\mathfrak{H}_i^1$  erklärt und beschränkt, und es gilt:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \|R_{i, \alpha}^{1, t} u^1\|_s &\leq (2|\alpha_2|)^{-\frac{1}{2}} \|u^1\|_t && \text{für } u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}_i^1 \\ \|R_{i, \alpha}^{1, t} u^1\|_t &\leq |\alpha_2|^{-1} \|u^1\|_t && \text{und } \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha > 0. \end{aligned}$$

b) Nach Hilfssatz 1.2.4 folgt die Existenz von  $R_{i, \alpha}^1 = (A^1 - i S^1 - \alpha T^1)^{-1}$  für alle  $\alpha$  der oberen Halbebene als Operator in  $\mathfrak{H}^1$ , der beschränkt und überall erklärt ist, ebenso die Existenz von  $R_{-\alpha, i}^2 = (A^2 + \alpha S^2 - i T^2)^{-1}$  für alle  $\alpha$  der unteren Halbebene als Operator in  $\mathfrak{H}^2$ , der beschränkt und überall erklärt ist. Es gilt:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \|R_{i, \alpha}^1 u^1\| &\leq \operatorname{Max}(|\alpha_2|^{-1}, 1) \|u^1\| && \text{für } u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}^1 \text{ und } \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha > 0, \\ \|R_{-\alpha, i}^2 u^2\| &\leq \operatorname{Max}(|\alpha_2|^{-1}, 1) \|u^2\| && \text{für } u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}^2 \text{ und } \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha < 0. \end{aligned}$$

c) Nach Hilfssatz 1.4.2 hat man (wiederum unter der schon unter (a) gemachten Annahme, daß  $\mathfrak{P}^1$   $t$ -definit ist), die Existenz von  $(u^1, f)_s$  und  $(u^2, f)_t$  für  $f$  aus  $\mathfrak{H}$ ,  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$  und  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}_i^2$ . Infolgedessen ist es möglich, für  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}_i^2$  und  $f$  aus  $\mathfrak{H}$  die Funktionen

$$(2.24a) \quad \begin{aligned} \kappa_1(\alpha) &= ((u^1, f)_s, R_{-\alpha, i}^2 T^2 u^2)_s && \text{für } \alpha \text{ aus } E_-: \alpha_2 < 0 \\ \kappa_2(\alpha) &= ((u^2, f)_t, R_{i, \alpha}^1 S^1 u^1)_t && \text{für } \alpha \text{ aus } E_+: \alpha_2 > 0 \end{aligned}$$

zu definieren. Nach Hilfssatz 1.2.5 und (2.24) ist  $\kappa_1(\alpha)$  in  $E_-$ ,  $\kappa_2(\alpha)$  in  $E_+$  eindeutig regulär analytisch. Denn es ist zum Beispiel  $((u^1, f)_s, R_{-\alpha, i}^2 T^2 u^2)_s = (S^2(u^1, f)_s, R_{-\alpha, i}^2 T^2 u^2)_s$ , und es gilt  $T^2 u^2 \in \mathfrak{H}^2$ ,  $S^2(u^2, f) \in \mathfrak{H}^2$ . Sind die Voraussetzungen des Kriteriums III erfüllt, so gilt infolge der doppelten Definitheit von  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \otimes \mathfrak{P}^2$  dieses ebenso für  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}_i^1$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}_i^2$  und  $f$  aus  $\mathfrak{H}$ . In jedem dieser Fälle setze man schließlich noch

$$(2.25) \quad \kappa(\alpha) = \begin{cases} \kappa_1(\alpha) & \text{für } \alpha_2 < 0 \\ -\kappa_2(\alpha) & \text{für } \alpha_2 > 0. \end{cases}$$

Sind nun die Voraussetzungen des Kriteriums II erfüllt<sup>10)</sup>, so gibt es zu einem beliebigen, reellen Punkt  $\alpha_0$  eines der Intervalle  $I$ , nach Hilfssatz 1.2.5

<sup>10)</sup> Die Hermitizität der in den Kriterien II, III erwähnten Operatoren  $A_s$  und  $A_t$  und damit diejenige des jeweiligen Operators  $A$  in  $\mathfrak{H}$  ergibt sich sofort nach Hilfssatz 2.2.5, denn man überzeugt sich leicht davon, daß die Menge  $e$  stets mindestens einen Punkt  $\alpha$  enthält, für den die dort gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Wir werden diese daher in dem nun folgenden Beweis der Kriterien II und III als bewiesen annehmen.



eine offene Kreisumgebung  $K'_{\alpha_0}$ , in welcher entweder  $R^1_{\alpha_0}$  oder  $R^2_{-\alpha_0}$  ein beschränkter, überall in  $\mathfrak{S}^1$  ( $\mathfrak{S}^2$ ) erklärter Operator ist, je nachdem, ob die erste oder die zweite der Bedingungen (2.19) in  $I_v$  Gültigkeit hat. Es kann daher jedes der reell offenen Intervalle  $I_v$  in je ein einfach zusammenhängendes, offenes, komplexes Gebiet  $G_v = \sum_{\alpha \in I_v} K'_{\alpha}$  eingebettet werden, in welchem

einer der beiden Operatoren  $R^1_{\alpha}, R^2_{-\alpha}$  beschränkt und überall in  $\mathfrak{S}^1$  ( $\mathfrak{S}^2$ ) erklärt ist, in welcher also nach Hilfssatz 1.2.5 entweder  $\kappa_2(\alpha)$  oder  $\kappa_1(\alpha)$  im Sinne von (2.24a) ebenfalls eindeutig regulär analytisch erklärt werden kann. Jedes der so erklärten Gebiete  $G_v$  besitzt nun mit jeder der offenen Halbebenen  $E_+$ ,  $E_-$  einen nichtleeren, offenen Durchschnitt  $G_v^+ = E_+ \cdot G_v$ ,  $G_v^- = E_- \cdot G_v$ . Nach (c) ist aber  $\kappa_1(\alpha)$  in  $G_v^-$ ,  $\kappa_2(\alpha)$  in  $G_v^+$  ohnehin erklärt, daher sind nun  $\kappa_1(\alpha)$  und  $\kappa_2(\alpha)$  in mindestens einem der Gebiete  $G_v^+$ ,  $G_v^-$  beide eindeutig regulär analytisch im Sinne von (2.24a) erklärbar. Wir bezeichnen dieses Gebiet jeweils mit  $\hat{G}_v$  und fixieren in jedem  $\hat{G}_v$  einen Punkt  $\beta_v$  und eine gegen  $\beta_v$  konvergierende Punktfolge  $\beta_{v\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots$ , von paarweise verschiedenen Punkten. Die Menge der Punkte  $\beta_{v\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots$ , heiße  $e_v$ . Schließlich setze man  $e^- = \sum_{I_v} e_v$ .  $A_{e^-}$  in  $\mathfrak{A}_{e^-}$  sei der in Definition

2.2.1 erklärte Operator. Wird dann etwa  $f$  so gewählt, daß gilt  $(f, (A_{e^-} - i)u) = 0$  für  $u$  aus  $\mathfrak{A}_{e^-}$ , so gilt dieses auch für  $u$  aus  $\mathfrak{S}_{\beta_{v\mu}}$ . Nach (2.7) folgt jetzt für  $u = u^1 u^2$  aus  $\mathfrak{S}_{\beta_{v\mu}}$ , also  $u^1$  aus  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \beta_{v\mu})}$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{D}_{M^2(A^1 + \beta_{v\mu})}$ ,  $v, \mu = 1, 2, \dots$

$$(2.26) \quad \begin{aligned} & ((u^2, f)_s, (L^1(A^1 - \beta_{v\mu} T^{v'}) - i) u^1)_s \\ & + ((u^1, f)_t, (M^2(A^2 + \beta_{v\mu} S^{2'}) - i) u^2)_t = 0. \end{aligned}$$

Wegen  $\beta_{v\mu} \in \hat{G}_v$  existieren die beiden Reziproken  $R^1_{i, \beta_{v\mu}} = R^1_{i, \beta_{v\mu}} S^1$  und  $R^2_{-\beta_{v\mu}, i} = R^2_{-\beta_{v\mu}, i} T^2$  im ganzen Raum  $\mathfrak{S}^1_s$  bzw.  $\mathfrak{S}^2_t$ , ersetzt man daher in (2.26) jetzt  $(L^1(A^1 - \beta_{v\mu} T^{v'}) - i) u^1$  durch  $u^1, (M^2(A^2 + \beta_{v\mu} S^{2'}) - i) u^2$  durch  $u^2$ , so folgt für  $u^1$  aus  $\mathfrak{S}^1_s$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{S}^2_t$ :  $0 = ((R^1_{i, \beta_{v\mu}} u^1, f)_s, u^2)_s + ((R^2_{-\beta_{v\mu}, i} u^2, f)_t, u^1)_t = 0$ .

Für  $u^1$  aus  $\mathfrak{R}^1$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{S}^2$  gilt daher endlich:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} & ((u^1, f)_s, R^1_{-\beta_{v\mu}, i} T^2 u^2)_s = -((u^2, f)_t, R^1_{i, \beta_{v\mu}} S^1 u^1)_t, \text{ also} \\ & \kappa_1(\beta_{v\mu}) = -\kappa_2(\beta_{v\mu}), \quad v, \mu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Hieraus folgert man sofort nach dem Identitätssatz für Potenzreihen, daß gilt  $\kappa_1(\alpha) = \kappa_2(\alpha)$  in jedem  $G_v$ . Also ist  $\kappa(\alpha)$  (siehe (2.25)) für solche  $f$  in der vollen komplexen  $\alpha$ -Ebene, aus der allein die Punkte der Ausnahmemenge  $x$  entfernt worden sind, eindeutig regulär analytisch.

Um das analoge Resultat aus den Voraussetzungen des Kriteriums III herzuleiten, verfare man folgendermaßen: Man setze hier  $e^- = \Sigma I_v$ . Ist dann  $(f, (A_{e^-} - i)u) = 0$  für  $u$  aus  $\mathfrak{A}_{e^-}$ , so gilt dieses speziell für  $u$  aus  $\mathfrak{S}_{\alpha}$ ,  $\alpha \in I_v$ , und es folgt wiederum

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & ((u^2, f)_s, (L^1(A^1 - \alpha T^{v'}) - i) u^1)_s \\ & + ((u^1, f)_t, (M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) - i) u^2)_t = 0 \end{aligned}$$

für  $u^1$  aus  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)}$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{D}_{M^2(A^2 + \alpha)}$ .



Daraus leitet man her:

$$\begin{aligned} & ((u^2, f)_s, (L^1(A^1 - \alpha T^V) - i) u^1)_s \\ &= (-T^1((M^2(A^2 + \alpha S^{2'} - i) u^2, f)_t, u^1), \end{aligned}$$

also  $((u^2, f)_s, (L^1(A^1 - \alpha) u^1)_s = (g^1, u^1)$  für  $u^1$  aus  $\mathfrak{D}_{L^1(A^1 - \alpha)}$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{D}_{M^2(A^2 + \alpha)}$  und mit

$$g^1 = -T^1(M^2(A^2 + \alpha S^{2'} - i T^{2'}) u^2, f)_t - (i + \alpha) S^1(u^2, f)_s.$$

Folglich gilt nach Hilfssatz 1.2.6:  $(u^2, f)_s \in \mathfrak{H}^1$ ,

$$(A^1 - \alpha)(u^2, f)_s = g^1 = -T^1(M^2(A^2 + \alpha S^{2'} - i T^{2'}) u^2, f)_t - (i + \alpha) S^1(u^2, f)_s$$

oder endlich

$$M^1(A^1 - \alpha T^V + i S^V)(u^2, f)_s = -(M^2(A^2 + \alpha S^{2'} - i T^{2'}) u^2, f)_t.$$

Ersetzt man hierin  $M^{2'}(A^2 + \alpha S^{2'} - i T^{2'}) u^2$  durch  $u^2$ , so folgt, da nach Hilfssatz 1.2.6 und den im Kriterium III gemachten Voraussetzungen  $M^2(A^2 + \alpha S^{2'}) = M^2(A^2 + \alpha) - \alpha t$ -selbstadjungiert ist, also  $R_{-\alpha, i}^{2, t}$  existiert und überall in  $\mathfrak{H}_i^2$  erklärt und  $t$ -beschränkt ist, für  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}_i^2$  sofort  $(u^2, f)_t = M^1(A^1 - \alpha T^V + i S^V)(R_{-\alpha, i}^{2, t} u^2, f)_s$  und also gilt  $(u^2, f)_t \in \mathfrak{D}_{R_{-\alpha, i}^{1, t}} \cdot (R_{-i, \alpha}^{1, t})_{-i, \alpha}$  existiert sicherlich eindeutig in  $\mathfrak{H}^1$ . Genau auf dieselbe Weise folgt auch  $(u^1, f)_t \in \mathfrak{D}_{R_{-\alpha, -i}^{2, s}}$  für  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}_i^1$ . Die in (c) definierten, in  $E_-$  bzw.  $E_+$  analytischen Funktionen  $\kappa_1(\alpha)$  und  $\kappa_2(\alpha)$  sind daher nach Hilfssatz 1.2.8 auf der reellen Achse, dem gemeinsamen Rand von  $E_+$  und  $E_-$  für alle  $\alpha$ , die in einem  $I$ , liegen, beide noch stetig. Zudem leitet man für  $\alpha \in I$ , aus (2.28) sofort wieder  $-\kappa_2(\alpha) = \kappa_1(\alpha)$  her. Nach einer bekannten funktionentheoretischen Schlußweise folgt aber daraus wiederum, daß für solche  $f$  und alle  $u^1$  aus  $\mathfrak{H}^1$ ,  $u^2$  aus  $\mathfrak{H}^2$  die Funktion  $\kappa(\alpha)$  im Komplement der Ausnahmemenge  $x$  eindeutig regulär analytisch ist. Nach (2.22) und (2.24a) folgt endlich  $|\sqrt{\alpha_2} \kappa(\alpha)| \leq c$  gleichmäßig für alle  $\alpha$ , die nicht zur Ausnahmemenge  $x$  gehören. Es kann nun gezeigt werden, daß eine Funktion mit diesen Eigenschaften identisch verschwinden muß. (Dieser Beweis werde hier übergangen.)  $\kappa(\alpha) \equiv 0$  für alle angegebenen  $u^1, u^2$  ist jedoch nur möglich, wenn  $f = 0$  gilt. Der Operator  $A_{e^-}$  und  $\mathfrak{A}_{e^-}$  und auch dessen Fortsetzung  $A$  in  $\mathfrak{H}$  besitzt somit keinen negativen Defektraum  $D_-$ . Da aus der Beschränktheit von  $R_{i, \alpha}^1$  oder  $R_{-\alpha, i}^2$  in einem  $I$ , sofort diejenige von  $R_{i, \alpha}^1 = (R_{i, \alpha}^1)^*$  bzw.  $R_{-\alpha, -i}^2 = (R_{-\alpha, i}^2)^*$  folgt, läßt sich aber für eine analog gewählte Menge  $e^+$  genau so zeigen, daß  $A_{e^+}$  in  $\mathfrak{H}_{e^+}$ , also dessen hermitesche Fortsetzung  $A$  in  $\mathfrak{H}$  keinen positiven Defektraum besitzt. Also ist  $A$  in  $\mathfrak{H}$  wesentlich selbstadjungiert. Es ist sogar schon jeweils der Operator  $A_{e^-+e^+}$  in  $\mathfrak{H}_{e^-+e^+}$ , der hermitesche Fortsetzung von  $A_{e^-}$  und  $A_{e^+}$  ist, wesentlich selbstadjungiert, also im Falle des Kriteriums III wegen  $e^- = e^+$  auch jeder Operator  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  mit  $e \geq I$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . Dasselbe gilt natürlich dann für jedes  $A_{e^*}$  in  $\mathfrak{H}_{e^*}$ , für dessen  $e^*$  gilt:  $e^- + e^+ \leq e^*$ . Enthält im Falle des Kriteriums II  $e$  je einen Kreis  $K_r$ , dessen Mittelpunkt in  $I$ , liegt, so hat man nur  $e^-$  und  $e^+$  so zu wählen, daß noch jeweils  $\beta_{v\mu} \in K_r$  gilt, um einzusehen, daß auch  $A_e$  in  $\mathfrak{H}_e$  wesentlich selbstadjungiert ist. Damit sind die angeführten Kriterien in vollem Umfang bewiesen.

Der praktischen Anwendung der vier in diesem Paragraphen ausgesprochenen Kriterien steht nun noch folgendes Hindernis entgegen: Fast immer liegen nämlich die Operatoren  $A^1$  und  $A^2$  nicht in selbstadjungierter, sondern nur in wesentlich selbstadjungierter Form vor. Es erscheint demgemäß wünschenswert, die Forderungen nach Selbstadjungiertheit von  $A^1$  und  $A^2$  in den Kriterien I bis IV durch andere Forderungen zu ersetzen, die nur die wesentliche Selbstadjungiertheit von  $A^1$  und  $A^2$  enthalten. Unter Benutzung von Hilfssatz 2.2.7 können wir leicht den folgenden Satz einsehen:

**Satz 2.3:**

Seien  $\hat{A}_\alpha^1$  in  $\mathfrak{A}_\alpha^1$  und  $\hat{A}_\alpha^2$  in  $\mathfrak{A}_\alpha^2$  für alle  $\alpha$  einer Punktmenge  $e$  der komplexen Ebene wesentlich selbstadjungierte Einschränkungen der selbstadjungierten Operatoren  $\hat{A}^1$  in  $\mathfrak{A}^1$  und  $\hat{A}^2$  in  $\mathfrak{A}^2$ . Die Menge  $e$  und die Operatoren  $\hat{A}^1, \hat{A}^2$  seien so beschaffen, daß nach einem der Kriterien I bis IV der mit ihrer Hilfe nach Definition 2.2.1 gebildete Operator  $\hat{A}_e$  in  $\mathfrak{A}_e$  wesentlich selbstadjungiert sei. Endlich mögen  $\hat{A}_\alpha^1, \hat{A}^1, \hat{A}_\alpha^2, \hat{A}^2$  für alle  $\alpha \in e$  den Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2.7 genügen. Dann ist der durch Anwendung der Def. 2.2.2 auf die Operatoren  $\hat{A}_\alpha^1$  und  $\hat{A}_\alpha^2$  gebildete Operator  $\hat{A}_e$  in  $\mathfrak{A}_e$  wesentlich selbstadjungiert. Eben dasselbe gilt auch für jeden nach Definition 2.1.1 gebildeten Operator  $A$  in  $\mathfrak{A}$ , für den gilt:  $\hat{A}_\alpha^1 \subseteq A^1 \subseteq \hat{A}^1, \hat{A}_\alpha^2 \subseteq A^2 \subseteq \hat{A}^2$  für jedes  $\alpha$  aus  $e$ .

**Literatur.**

- [1] BÖCHER, M.: Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie; Leipzig 1894. — [2] CAMP, C. C.: An expansion involving  $p$  inseparable parameters associated with a partial differential equation; Amer. J. Math. **50**, 259—263 (1926). — [3] CAMP, C. C.: On multiparameter expansions associated with a differential system and auxiliary conditions at several points in each variable; Amer. J. Math. **60**, 447—452 (1938). — [4] CAMP, C. C.: A convergence proof involving an inseparable multiple contour integral; Amer. J. Math. **65**, 216—220 (1943). — [5] DIXON, A. C.: Harmonic expansions of functions of two variables; London Math. Soc. Proc. (2) **5**, 411—478 (1907). — [6] HAENTZSCHEL, E.: Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen; Berlin: Druck und Verlag G. Reimer 1893. — [7] HILB, E.: Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie; Math. Ann. **63**, 38—53 (1907). — [8] HILB, E.: Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen; Math. Ann. **66**, 1—66 (1909). — [9] HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen; Leipzig-Berlin 1924, (vorw. S. 262—267). — [10] a) LAMÉ, G.: Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, J. de Math. **4**, 126—163 (1839). — b) LAMÉ, G.: Second mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution; J. de Math. **4**, 351—385 (1839). — [11] NAGY, B. V. SZ.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes; Erg. Math. **5**, 413—496 (1942). — [12] MURRAY-V. NEUMANN: On rings of operators, Ann. of Math. **37**, 116—229 (1936). — [13] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung; II. Mitteilung, Math. Ann. **113**, 677—685 (1937). — [14] SCHATTEN, N.: A theory of cross-spaces; Ann. of Math. Studies **26** (1951). — [15] WANGERIN, A.: Über die Reduktion der Gleichung  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$  auf gewöhnliche Differentialgleichungen; Monatsber. Akad. Wiss. Berlin 1878.

(Eingegangen am 18. Juni 1952)

## Perturbation Theory of Semi-Bounded Operators.

By

TOSIO KATO in Tokyo.

Mathematical treatment of the perturbation theory of self-adjoint operators has been developed by several authors<sup>1)</sup>. The main problem consists in the study of the behaviour of the spectrum of a self-adjoint operator  $H_\varepsilon$  depending on a parameter  $\varepsilon$ . The papers of RELICH, SZ.-NAGY and HEINZ<sup>1)</sup> are mostly concerned with the so-called *regular* case, in which the eigenvalues and eigenfunctions of  $H_\varepsilon$  are, under some general conditions, proved to be regular in  $\varepsilon$ , thus being developable into power series of  $\varepsilon$  with positive convergence radii of which at least a rough estimate can be explicitly given<sup>2)</sup>.

It should be noted, however, that the applicability of perturbation theory is by no means restricted to the regular case. It is rather usual that the formal power series for the eigenvalues and eigenfunctions are still useful even if they are divergent or have only finite significant terms. In such a case the series should be regarded as giving *asymptotic* expansions (in a generalized sense) of the quantities under consideration. Sufficient conditions for the validity of the asymptotic expansions up to a specified order have been deduced by TITCHMARSH<sup>1)</sup> and the writer<sup>3)</sup> independently.

The purpose of the present paper is to deduce more general and detailed sufficient conditions for the 0-th, first and second approximations in the case of a semi-bounded operator formally defined by  $H_\varepsilon = H + \varepsilon V$  with  $H \geq 0$  and  $V \geq 0$ .

### § 1. Preliminaries.

Throughout the present paper we consider everything in a *separable* HILBERT space  $\mathfrak{H}$ , and follow the notations and terminology of STONE [17] with a few obvious exceptions. For  $f_n, f \in \mathfrak{H}$ ,  $f_n \rightarrow f$  means strong convergence:  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ , and weak convergence<sup>4)</sup> is stated positively whenever used. The domain and range of an operator  $T$  are denoted by  $\mathfrak{D}(T)$  and  $\mathfrak{R}(T)$  respectively. If  $\mathfrak{D}$  is any subset of  $\mathfrak{D}(T)$ ,  $T\mathfrak{D}$  means the set of all  $Tf$ ,  $f \in \mathfrak{D}$ . The set of all bounded linear operators with domain  $\mathfrak{H}$  is denoted by  $\mathcal{B}$ . If  $A \in \mathcal{B}$ , the norm of  $A$  is defined and is denoted by  $\|A\|$ . For  $A_n, A \in \mathcal{B}$ ,  $A_n \rightarrow A$  means strong convergence:  $A_n f \rightarrow A f$  for every  $f \in \mathfrak{H}$ . Uniform convergence ( $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ ) is positively stated whenever used. The identity operator is denoted simply by 1. If  $E$  is a projection, the dimension number of the closed linear manifold  $\mathfrak{R}(E) = E\mathfrak{H}$  is denoted by  $\dim E$ . If the operator  $H$  is self-adjoint (s. a.), we have  $\mathfrak{R}(H - l) = \mathfrak{H}$  for every  $l$  in the resolvent set of  $H$ , and if  $H$  is essentially self-adjoint<sup>5)</sup> (ess. s. a.),  $\mathfrak{R}(H - l)$  is dense in  $\mathfrak{H}$  for similar  $l$ . In particular, we have

<sup>1)</sup> RELICH [11]—[16], SZ.-NAGY [18], TITCHMARSH [19], [20], HEINZ [3], KATO [4]—[7].

<sup>2)</sup> The writer has also dealt with the same problem independently (KATO [5], [7]).

<sup>3)</sup> KATO [6], [7].

<sup>4)</sup> See e. g. NEUMANN [8].

<sup>5)</sup> STONE [17], p. 51.

*Lemma 1.* Let  $H$  be a linear symmetric operator with positive lower bound<sup>6</sup>). If  $H$  is s. a., then  $\Re(H) = H \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{S}$ , and if  $H$  is ess. s. a., then  $\Re(H) = H \mathfrak{D}(H)$  is dense in  $\mathfrak{S}$ .

Let  $J[f, g]$  be a Hermitian-symmetric bilinear form defined in a linear manifold  $\mathfrak{D}(J)$  dense in  $\mathfrak{S}$  ( $J[\bar{f}, g] = J[g, f]$ ,  $J[f, g]$  is linear with respect to  $f$ ). Then  $J[f] \equiv J[f, f]$  will be called a quadratic form<sup>7</sup>) (q. f.) with domain  $\mathfrak{D}(J)$ . It is *bounded below* if there is a constant  $c$  such that  $J[f] \geq c(f, f)$  for every  $f \in \mathfrak{D}(J)$ ; the largest possible  $c$  is the *lower bound* of  $J$ . In what follows all q. fs. are assumed to be bounded below unless the contrary is positively stated. As for linear operators, closed quadratic forms (c. q. fs) are defined<sup>7</sup>). The closure<sup>7</sup>) of  $J$  is denoted by  $\tilde{J}$  whenever it exists.

According to FRIEDRICHS<sup>7</sup>), to each c. q. f.  $J$  there is uniquely defined a s. a. operator  $H$  such that (1)  $H$  is bounded below with the same lower bound as  $J$ ; (2)  $\mathfrak{D}(H) \subseteq \mathfrak{D}(J)$ ; (3)  $J[f, g] = (Hf, g)$  for every  $f \in \mathfrak{D}(H)$  and  $g \in \mathfrak{D}(J)$ ; (4) if  $J_1$  is the contraction of  $J$  with domain  $\mathfrak{D}(H)$ , then  $\tilde{J}_1$  exists and coincides with  $J$ .  $H$  is called the *s. a. operator corresponding to the c. q. f.  $J$* . In particular if  $T$  is a linear symmetric operator bounded below, a q. f.  $J$  is defined by  $J[f, g] = (Tf, g)$ ,  $\mathfrak{D}(J) = \mathfrak{D}(T)$ . Then  $\tilde{J}$  exists<sup>7</sup>), and the corresponding s. a. operator is an extension of  $T$  and will be called the *F-extension* of  $T$ . It is a distinguished one<sup>8</sup>) among all possible s. a. extensions of  $T$ .

*Lemma 2.* Let  $J$  be a q. f. with positive lower bound  $c$  and let  $\tilde{J}$  exist. Then (a) the corresponding s. a. operator  $H$  has also positive lower bound  $c$ ; (b)  $H^{\frac{1}{2}}$  is defined, is s. a. and has positive lower bound  $c^{\frac{1}{2}}$ ; (c)  $\mathfrak{D}(\tilde{J}) = \mathfrak{D}(H^{\frac{1}{2}})$ ,  $\tilde{J}[f, g] = (H^{\frac{1}{2}}f, H^{\frac{1}{2}}g)$ ; (d)  $H^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}(\tilde{J}) = \Re(H^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{S}$ ; (e)  $H^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}(J)$  is dense in  $\mathfrak{S}$ ; (f)  $H^{-1}$ ,  $H^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}$ ,  $\|H^{-1}\| = c^{-1}$ ,  $\|H^{-\frac{1}{2}}\| = c^{-\frac{1}{2}}$ . (g) In particular if  $T$  is a linear symmetric operator with positive lower bound and  $H$  is its *F-extension*, then  $H^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}(T)$  is dense in  $\mathfrak{S}$ .

Proof. (a) is clear from (1) above and (b) follows at once from (a). To prove (c), let  $J_1$  be the contraction of  $\tilde{J}$  with domain  $\mathfrak{D}(H)$  and also define  $J_0[f, g] = (H^{\frac{1}{2}}f, H^{\frac{1}{2}}g)$  with domain  $\mathfrak{D}(J_0) = \mathfrak{D}(H^{\frac{1}{2}}) \supseteq \mathfrak{D}(H)$ . Then  $J_1[f, g] = (Hf, g) = (H^{\frac{1}{2}}f, H^{\frac{1}{2}}g)$  by (3) above, and hence  $J_0$  is an extension of  $J_1$ . On the other hand if  $f \in \mathfrak{D}(H^{\frac{1}{2}})$ , it is easily shown that there is a sequence  $\{g_n\}$  such that  $g_n \in \mathfrak{D}(H)$ ,  $g_n \rightarrow f$ ,  $H^{\frac{1}{2}}g_n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}f$ . Hence  $J_1[g_n - f] \rightarrow 0$  ( $m, n \rightarrow \infty$ ). This implies<sup>7</sup>) that  $f \in \mathfrak{D}(\tilde{J}_1)$  and  $\tilde{J}_1[f] = \|H^{\frac{1}{2}}f\|^2 = J_0[f]$ . Thus  $\tilde{J}_1$  is an extension of  $J_0$ . But  $J_0$  is closed since  $H^{\frac{1}{2}}$  is a closed operator. Hence we have  $\tilde{J}_1 = J_0$ , which is equivalent to (c) by (4) above. (d) follows immediately from Lemma 1 and (c). To prove (e), we note that<sup>7</sup>) to every  $f \in \mathfrak{D}(H^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}(\tilde{J})$ , there is a sequence  $\{f_n\}$  such that  $f_n \in \mathfrak{D}(J)$ ,  $f_n \rightarrow f$ ,  $\tilde{J}[f_n - f] \rightarrow 0$ . Hence it follows from (c) that  $\|H^{\frac{1}{2}}(f_n - f)\| \rightarrow 0$  or  $H^{\frac{1}{2}}f_n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}f$ . Thus (e) follows from (d). (f) is a direct consequence of (a) and (b). (g) follows from (e) by setting  $J[f, g] = (Tf, g)$ ,  $\mathfrak{D}(J) = \mathfrak{D}(T)$ .

<sup>6</sup>) STONE [17], p. 56.

<sup>7</sup>) FRIEDRICHS [1].

<sup>8</sup>) FRIEDRICHS [1], [2], RELICH [16].

**Lemma 3.** Let  $J_1, J_2$  be two q. fs. with positive lower bounds, let  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2$  exist and let  $H_1, H_2$  be the corresponding s. a. operators. If  $\mathfrak{D}(J_1) \supseteq \mathfrak{D}(J_2)$  and  $J_1[f] \leq J_2[f]$  for all  $f \in \mathfrak{D}(J_2)$ , then  $\mathfrak{D}(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}(\tilde{J}_1) \supseteq \mathfrak{D}(\tilde{J}_2) = \mathfrak{D}(H_2^{\frac{1}{2}})$  and  $\|H_1^{\frac{1}{2}} f\|^2 = \tilde{J}_1[f] \leq \tilde{J}_2[f] = \|H_2^{\frac{1}{2}} f\|^2$  for every  $f \in \mathfrak{D}(\tilde{J}_2)$ .

**Proof.** The assertions are direct consequences of Lemma 2, (c) and the definition<sup>7)</sup> of the closures  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2$ .

**Lemma 4.** Let  $H$  be a s. a. operator and let  $(\alpha, \beta)$  be an open interval containing at most a non-degenerate eigenvalue but no other points of the spectrum of  $H$ . Let  $w$  be an element of  $\mathfrak{D}(H)$ ,  $\|w\| = 1$ , and set  $\eta = (Hw, w)$ ,  $\theta = \|(H - \eta)w\|$ . If  $\theta^2 < (\eta - \alpha)(\beta - \eta)$ , then  $\alpha < \eta < \beta$  and there exists an eigenvalue  $\lambda$  of  $H$  in  $(\alpha, \beta)$  such that  $-(\beta - \eta)^{-1}\theta^2 \leq \lambda - \eta \leq (\eta - \alpha)^{-1}\theta^2$ . Let  $\varphi$  be the corresponding eigenvector,  $\|\varphi\| = 1$ . Then  $\|\varphi - w\| \leq (\theta/d) \{1 - (\theta/d)^2\}^{-\frac{1}{2}}$  with  $d = \text{Min}(\eta - \alpha, \beta - \eta)$ , provided  $\theta < d$  and  $\varphi$  is normalized in such a way that  $(\varphi, w) \geq 0$ .

**Proof.** The first assertion is proved in KATO [4] (see Eq. (10)). The second assertion is also essentially contained there. To show this, suppose that  $d = \eta - \alpha \leq \beta - \eta$  (the contrary case is treated similarly). If  $\theta < d$ , we can replace  $\beta$  by  $\beta' = \eta + d \leq \beta$  without violating the assumptions of the lemma. Then  $\beta' - \alpha = 2d$ ,  $\eta = (\alpha + \beta')/2$ , and it follows from Eq. (11) of that paper that  $1 - c^2 \leq (\theta/d)^2$ , where  $c = (\varphi, w) \geq 0$ . Since  $\|\varphi - w\|^2 = 2(1 - c)$ , the desired inequality follows immediately.

**Remark.** It will be noted that  $\theta \leq \|(H - \gamma)w\|$  for any number  $\gamma$ .

## § 2. The 0-th Approximation.

In what follows we consider the eigenvalue problem of an operator formally given by  $H_\varepsilon = H + \varepsilon V$ , where  $\varepsilon$  is a small parameter tending to zero. For this purpose it is necessary to define the operator  $H_\varepsilon$  precisely. For the present we assume the following

**Assumption 1.**  $H$  and  $V$  are non-negative definite linear symmetric operators with  $\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{D}(V) = \tilde{\mathfrak{D}}$  (which is dense in  $\mathfrak{H}$ ).  $H$  has positive lower bound, which may for simplicity be assumed to be not less than 1, i. e.

$$(2.1) \quad (Hf, f) \geq (f, f), \quad (Vf, f) \geq 0 \quad (f \in \tilde{\mathfrak{D}}).$$

$\varepsilon$  is a real parameter and  $\varepsilon \geq 0$ .

We define the following q. fs. with the domain  $\tilde{\mathfrak{D}}$ :

$$(2.2) \quad J_\varepsilon[f] = ((H + \varepsilon V)f, f) \geq (f, f) \quad (\varepsilon \geq 0) \text{ and } J'[f] = (Vf, f) \geq 0.$$

Then the closures  $\tilde{J}_\varepsilon$  and  $\tilde{J}'$  exist<sup>7)</sup>. The corresponding s. a. operators, i. e., the F-extensions of  $H + \varepsilon V$  and  $V$ , will be denoted by  $H_\varepsilon$  and  $V_0$  respectively<sup>9)</sup>. In particular  $H_0$  is the F-extension of  $H$ . Then the following theorems hold.

**Theorem 1.** (a)  $H_\varepsilon$  and  $H_0^{\frac{1}{2}}$  are s. a. and have lower bounds  $\geq 1$ ; (b)  $\mathfrak{D}(\tilde{J}_\varepsilon) = \mathfrak{D}(H_0^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}(\tilde{J}_0)$  is independent of  $\varepsilon$  for  $\varepsilon > 0$ ; (c)  $\mathfrak{D}(\tilde{J}_\varepsilon) \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{J}_0) = \mathfrak{D}(H_0^{\frac{1}{2}})$  and

<sup>9)</sup> In applications it is usual that  $H + \varepsilon V$  is ess. s. a. (see examples in § 7). In such a case  $H_\varepsilon$  coincides with its closure and some of the following arguments are simplified. But we need not make such an assumption. Rather we can weaken the assumptions still more, and instead of starting from  $H$  and  $V$  with the common domain  $\tilde{\mathfrak{D}}$ , we may start from two q. fs.  $J$  and  $J'$  with a common domain and consider the s. a. operator  $H_\varepsilon$  corresponding to the closure of the q. f.  $J + \varepsilon J'$ . But in the present paper we shall not enter into this generalization.

$\tilde{J}_\varepsilon[f] = \|H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f\|^2$  is a non-decreasing function of  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 0$ ) for every  $f \in \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ ;  
 (d)  $\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{J}) = \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  and  $\|V_0^{\frac{1}{2}} f\|^2 = \tilde{J}'[f] \leq \varepsilon^{-1} \tilde{J}_\varepsilon[f]$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $f \in \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ );  
 (e)  $\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \supseteq \mathfrak{D}(H_\varepsilon) \supseteq \mathfrak{D}(\varepsilon > 0)$ ,  $H_\varepsilon \supseteq H + \varepsilon V$  ( $\varepsilon \geq 0$ ); (f)  $H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathfrak{D}$  is dense in  $\mathfrak{H}$  ( $\varepsilon \geq 0$ );  
 (g)  $H_\varepsilon^{-1}, H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \in \mathbf{B}$ ,  $\|H_\varepsilon^{-1}\| \leq 1$ ,  $\|H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$  ( $\varepsilon \geq 0$ ); (h) if  $A_\varepsilon = H_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ , then  $A_\varepsilon \in \mathbf{B}$ ,  $\|A_\varepsilon\| \leq 1$  ( $\varepsilon \geq 0$ ); (i) if  $B_\varepsilon = V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ , then  $B_\varepsilon \in \mathbf{B}$ ,  $\|B_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  ( $\varepsilon > 0$ ).  
 Proof. (a) and (g) are direct consequences of Lemma 2, (a), (b) and (f). (b) and (c) follow from Lemma 3 if we note that  $(\varepsilon/\varepsilon') J_{\varepsilon'}[f] \leq J_\varepsilon[f] \leq J_{\varepsilon'}[f]$  ( $0 \leq \varepsilon < \varepsilon'$ ) by virtue of (2.1). Similarly (d) follows from  $J'[f] \leq \varepsilon^{-1} J_\varepsilon[f]$  ( $\varepsilon > 0$ ). (e) is clear since  $H_\varepsilon$  is the F-extension of  $H + \varepsilon V$ , and for the same reason (f) follows from Lemma 2, (g). To prove (h), we note that  $A_\varepsilon$  is defined everywhere in  $\mathfrak{H}$  because  $\mathfrak{R}(H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}(H_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{D}(H_0^{\frac{1}{2}})$  by (c). Since  $\|A_\varepsilon f\|^2 = \|H_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f\|^2 = \tilde{J}_0[H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f] \leq \tilde{J}_\varepsilon[H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f] = \|f\|^2$  by (c), we obtain (h). Finally  $\mathfrak{R}(H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  shows that  $B_\varepsilon$  is defined everywhere in  $\mathfrak{H}$ , and since  $\|B_\varepsilon f\|^2 = \|V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f\|^2 = \tilde{J}'[H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f] \leq \varepsilon^{-1} \tilde{J}_\varepsilon[H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f] = \varepsilon^{-1} \|f\|^2$  by (d), we obtain (i).

Remark. For any fixed  $\varepsilon_0 > 0$  we have  $0 \leq (Vf, f) \leq \varepsilon_0^{-1} ((H + \varepsilon_0 V)f, f)$ . From a theorem of RELICH [13] (see Satz 6), it follows that the operator  $H_\varepsilon$  is regular for  $\varepsilon > 0$  in his sense. In particular, any isolated eigenvalue  $\lambda_\varepsilon$  of  $H_\varepsilon$  is an analytic function of  $\varepsilon$  for  $\varepsilon > 0$ . But  $\varepsilon = 0$  is in general a singular point of  $\lambda_\varepsilon$  and lies outside the scope of his theory. On the other hand, it is just the behavior of  $H_\varepsilon$  at  $\varepsilon \rightarrow +0$  that concerns us in this paper.

Theorem 2.  $H_\varepsilon^{-1} \rightarrow H_0^{-1}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) (note that  $H_\varepsilon^{-1}, H_0^{-1} \in \mathbf{B}$ ).

Proof. Let  $f \in \mathfrak{D}$ . Then it follows from Theorem 1, (e) and (g) that  $\|H_\varepsilon^{-1} H_0 f - f\| = \|H_\varepsilon^{-1} (H_0 - H_\varepsilon) f\| \leq \|(H_0 - H_\varepsilon) f\| = \|(H - H - \varepsilon V) f\| = \varepsilon \|V f\| \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Setting  $H_0^{\frac{1}{2}} f = g$ ,  $f = H_0^{-\frac{1}{2}} g$ , it follows that  $H_\varepsilon^{-1} H_0^{\frac{1}{2}} g \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}} g$ . But as  $(H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} H_0^{\frac{1}{2}} g, h) = (g, H_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} h) = (g, A_\varepsilon h) = (A_\varepsilon^* g, h)$  for every  $h \in \mathfrak{H}$  by virtue of Theorem 1, (h), we have  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} H_0^{\frac{1}{2}} g = A_\varepsilon^* g$ . Thus  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^* g \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}} g$  and this is true for every  $g$  of  $H_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{D}$ , which is dense in  $\mathfrak{H}$  by Theorem 1, (f). Consequently, noting that  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}, A_\varepsilon^*, H_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathbf{B}$  and that  $\|H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^*\| \leq \|A_\varepsilon^*\| = \|A_\varepsilon\| \leq 1$  is uniformly bounded (see Theorem 1, (g) and (h)), we obtain  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^* g \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}} g$  for every  $g \in \mathfrak{H}$ , i. e.  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^* \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}}$ . Multiplying from right by  $H_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathbf{B}$ , we have  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^* H_0^{-\frac{1}{2}} \rightarrow H_0^{-1}$ . But  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^* H_0^{-\frac{1}{2}} = H_\varepsilon^{-1}$  because  $(H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon^* H_0^{-\frac{1}{2}} f, g) = (f, H_0^{-\frac{1}{2}} A_\varepsilon H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} g) = (f, H_\varepsilon^{-1} g) = (H_\varepsilon^{-1} f, g)$  for every  $f, g \in \mathfrak{H}$ . Thus we obtain  $H_\varepsilon^{-1} \rightarrow H_0^{-1}$ .

Theorem 3. Let  $\{E_\varepsilon(\lambda)\}$  be the resolution of the identity<sup>10)</sup> corresponding to  $H_\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 0$ ). Then  $E_\varepsilon(\lambda) \rightarrow E_0(\lambda)$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) for all  $\lambda$  except on at most a denumerable set of  $\lambda$  which are eigenvalues of  $H_0$ .

Proof. Let  $\{E'_\varepsilon(\lambda)\}$  be the resolution of the identity corresponding to  $H_\varepsilon^{-1}$ . It follows<sup>11)</sup> from Theorem 2 that  $E'_\varepsilon(\lambda) \rightarrow E'_0(\lambda)$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) except at most for

<sup>10)</sup>  $E_\varepsilon(\lambda)$  is assumed to be continuous to the right.

<sup>11)</sup> See RELICH [12], Satz 1. It will be noted that RELICH considers the case of a discrete parameter  $n$  instead of the continuous one  $\varepsilon$ . But as the exceptional points are contained in the point spectrum of  $H_0^{-1}$  (which is a denumerable set since  $\mathfrak{H}$  is assumed to be separable), this offers no difficulty. See also STONE [17], Theorems 9.20, 9.22.

the values of  $\lambda$  which are eigenvalues of  $H_0^{-1}$ . But  $E_\varepsilon(\lambda)$  are obtained from  $E'_\varepsilon(\lambda)$  by the transformation  $E_\varepsilon(\lambda) = 0$  ( $\lambda < 1$ ),  $E_\varepsilon(\lambda) = 1 - E'_\varepsilon(\lambda^{-1} - 0)$  ( $\lambda \geq 1$ ), so that the assertion follows immediately.

**Theorem 4.**  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}}$ ,  $A_\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $A_\varepsilon^* \rightarrow 1$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ).

**Proof.** If  $\{E'_\varepsilon(\lambda)\}$  is the resolution of the identity corresponding to  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ , it follows from Theorem 3 that  $E'_\varepsilon(\lambda) \rightarrow E'_0(\lambda)$  except for the values of  $\lambda$  which are eigenvalues of  $H_0^{-\frac{1}{2}}$ . Since  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  is uniformly bounded by Theorem 1, (g), it follows<sup>12</sup>) that  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}}$ . Next, we have  $(A_\varepsilon f, g) = (H_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f, g) = (H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f, \tilde{H}_0^{\frac{1}{2}} g) \rightarrow (H_0^{-\frac{1}{2}} f, H_0^{\frac{1}{2}} g) = (f, g)$  for every  $f \in \mathfrak{H}$  and  $g \in \mathfrak{D}(H_0^{\frac{1}{2}})$ . Since  $\mathfrak{D}(H_0^{\frac{1}{2}})$  is dense in  $\mathfrak{H}$  and  $\|A_\varepsilon\| = \|A_\varepsilon^*\| \leq 1$ , it follows<sup>13</sup>) first that  $A_\varepsilon$  and  $A_\varepsilon^*$  converge weakly to 1, and then, that  $A_\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $A_\varepsilon^* \rightarrow 1$ .

**Theorem 5.** Set  $B_0 = V_0^{\frac{1}{2}} H_0^{-\frac{1}{2}}$ . Then  $\bar{\mathfrak{D}}(B_0)$  is dense in  $\mathfrak{H}$  and  $B_0^*$  as well as  $B_0^{**} = \tilde{B}_0$  exists. If  $f \in \mathfrak{D}(B_0^*)$ , then  $B_\varepsilon^* f \rightarrow B_0^* f$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ).

**Proof.**  $B_0 g$  exists at least if  $H_0^{-\frac{1}{2}} g \in \tilde{\mathfrak{D}}$ , i. e. if  $g$  belongs to  $H_0^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathfrak{D}}$  which is dense in  $\mathfrak{H}$  by Theorem 1, (f). Hence  $\mathfrak{D}(B_0)$  is dense in  $\mathfrak{H}$ . If  $f \in \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$ , then  $(f, B_0 g) = (f, V_0^{\frac{1}{2}} H_0^{-\frac{1}{2}} g) = (H_0^{-\frac{1}{2}} V_0^{\frac{1}{2}} f, g)$  for every  $g \in \mathfrak{D}(B_0)$ . Thus  $f \in \mathfrak{D}(B_0^*)$ , or  $\mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}}) \subseteq \mathfrak{D}(B_0^*)$  and  $\mathfrak{D}(B_0^*)$  is dense in  $\mathfrak{H}$ . Hence  $B_0^{**}$  also exists and<sup>14</sup>)  $B_0^{**} = \tilde{B}_0$ . If  $f \in \mathfrak{D}(B_0^*)$ , then  $(B_\varepsilon^* f, g) = (f, B_\varepsilon g) = (f, V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} g) = (f, V_0^{\frac{1}{2}} H_0^{-\frac{1}{2}} g) = (H_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f, g) = (f, B_0 A_\varepsilon g) = (A_\varepsilon^* B_0^* f, g)$  for every  $g \in \mathfrak{H}$ . This means that  $B_\varepsilon^* f = A_\varepsilon^* B_0^* f$ . Hence it follows that  $B_\varepsilon^* f \rightarrow B_0^* f$  by Theorem 4.

**Theorem 6.** Let  $\lambda_0$  be an isolated eigenvalue of  $H_0$  with finite multiplicity  $m$ . Then in each neighborhood of  $\lambda_0$ , there are either eigenvalues of  $H_\varepsilon$  with total multiplicity not less than  $m$  or otherwise at least a point of the continuous spectrum of  $H_\varepsilon$ , provided  $\varepsilon$  is sufficiently small.

**Proof.** Take two numbers  $\alpha, \beta$  such that  $\alpha < \lambda_0 < \beta$  and that the closed interval  $[\alpha, \beta]$  contains no other point of the spectrum of  $H_0$ . Then  $E_0 \equiv E_0(\beta) - E_0(\alpha)$  is the projection on the eigenspace of  $H_0$  belonging to the eigenvalue  $\lambda_0$ . It follows from Theorem 3 that  $E_\varepsilon(\beta) - E_\varepsilon(\alpha) \rightarrow E_0(\beta) - E_0(\alpha) = E_0$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ). Since  $\dim E_0 = m < \infty$ , it follows that<sup>15</sup>)  $\dim \{E_\varepsilon(\beta) - E_\varepsilon(\alpha)\} \geq m$  for sufficiently small  $\varepsilon$ . This implies the assertions of the theorem.

Now we add the following

**Assumption 2.** At least the lower part of the spectrum of  $H_0$  consists of pure point spectrum. More precisely, there are several real numbers  $\lambda_0^{(1)} < \lambda_0^{(2)} < \dots < \lambda_0^{(N)}$  and a  $\delta > 0$  such that

$$(2.3) \quad \begin{cases} E_0(\lambda_0^{(1)} - 0) = 0; & E_0(\lambda_0^{(n)}) = E_0(\lambda_0^{(n+1)} - 0) \quad (n = 1, 2, \dots, N-1); \\ E_0(\lambda_0^{(N)}) = E_0(\lambda_0^{(N)} + \delta); \\ E_0(\lambda_0^{(n)}) - E_0(\lambda_0^{(n)} - 0) \equiv E_\alpha^{(n)}, \dim E_\alpha^{(n)} \equiv m_n, \\ 0 < m_n < \infty \quad (n = 1, 2, \dots, N). \end{cases}$$

<sup>12</sup>) RELICH [12], Satz 2.

<sup>13</sup>) These follow from the following lemmas: If  $(f_\varepsilon, g) \rightarrow (f, g)$  for all  $g$  of a set dense in  $\mathfrak{H}$  and if  $\|f_\varepsilon\|$  is bounded, then  $f_\varepsilon$  converges weakly to  $f$ ; if  $f_\varepsilon$  converges weakly to  $f$  and if  $\limsup \|f_\varepsilon\| \leq \|f\|$ , then  $f_\varepsilon \rightarrow f$ .

<sup>14</sup>) NEUMANN [9].

<sup>15</sup>) RELICH [12], Hilfssatz zu Satz 5.



Of course  $\lambda_0^{(n)}$  are eigenvalues of  $H_0$  with multiplicities  $m_n$ . Also it follows immediately that

$$(2.4) \quad \dim E_0(\lambda_0^{(N)} + \delta) = m_1 + m_2 + \cdots + m_N.$$

Under Assumptions 1 and 2 we shall prove our first main theorem concerning the 0-th approximation of eigenvalues and eigenvectors:

**Theorem 7.** In each neighborhood of  $\lambda_0^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), there are eigenvalues of  $H_\varepsilon$  with total multiplicity just equal to  $m_n$ , and there are no other points of the spectrum of  $H_\varepsilon$ , provided  $\varepsilon$  is sufficiently small. These eigenvalues converge to  $\lambda_0^{(n)}$  when  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Let  $E_\varepsilon^{(n)}$  be the projection on the  $m_n$ -dimensional linear manifold spanned by all the eigenvectors corresponding to these eigenvalues; then  $\|E_\varepsilon^{(n)} - E_0^{(n)}\| \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ).

**Proof.** Take  $N$  intervals  $(\alpha_n, \beta_n)$  such that  $\alpha_n < \lambda_0^{(n)} < \beta_n < \alpha_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $\alpha_{N+1} = \lambda_0^{(N)} + \delta$ ). Then it follows from the proof of Theorem 6 that

$$(2.5) \quad \dim \{E_\varepsilon(\beta_n) - E_\varepsilon(\alpha_n)\} \geq m_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

for sufficiently small  $\varepsilon$ . In particular this implies

$$(2.6) \quad \dim E_\varepsilon(\lambda_0^{(N)} + \delta) \geq m_1 + \cdots + m_N.$$

On the other hand, it can easily be shown that

$$(2.7) \quad \dim E_\varepsilon(\lambda) \leq \dim E_0(\lambda) \quad \text{for every } \lambda,$$

since  $\|H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f\|^2$  is a non-decreasing function of  $\varepsilon$  by Theorem 1, (c). Clearly the three relations (2.4), (2.6), (2.7) are compatible only if the equality sign holds in (2.6), and this is possible only if the equality sign holds in (2.5). Since  $m_n < \infty$ , it follows that the interval  $(\alpha_n, \beta_n)$  contains eigenvalues of  $H_\varepsilon$  with total multiplicity just equal to  $m_n$  and no other points of the spectrum of  $H_\varepsilon$ . Since the interval  $(\alpha_n, \beta_n)$  can be taken arbitrarily small, these eigenvalues converge to  $\lambda_0^{(n)}$  when  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Also we have  $E_\varepsilon^{(n)} = E_\varepsilon(\beta_n) - E_\varepsilon(\alpha_n)$  and  $E_\varepsilon^{(n)} \rightarrow E_0^{(n)}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) by Theorem 3. But as  $\dim E_\varepsilon^{(n)} = \dim E_0^{(n)} = m_n < \infty$ , it follows easily that<sup>16)</sup>  $\|E_\varepsilon^{(n)} - E_0^{(n)}\| \rightarrow 0$ .

**Remark.** If no "splitting" occurs for the eigenvalue  $\lambda_0^{(n)}$ , i. e., if all the eigenvalues of  $H_\varepsilon$  in the neighborhood of  $\lambda_0^{(n)}$  coincide and reduce to one  $\lambda_\varepsilon^{(n)}$  with multiplicity  $m_n$ ,  $E_\varepsilon^{(n)}$  is the projection on the corresponding eigenspace. Then we can select  $m_n$  independent eigenvectors belonging to the eigenvalue  $\lambda_\varepsilon^{(n)}$  in such a way that they converge to the eigenvectors of  $H_0$  for  $\varepsilon \rightarrow +0$ , i. e., the eigenvectors are continuous at  $\varepsilon = 0$  as well as the eigenvalue. In particular this is the case if  $m_n = 1$  (no degeneracy of  $\lambda_0^{(n)}$ ).

For the present (§ 3—§ 5) we always assume Assumptions 1 and 2. It will be noted that these conditions are quite general for practical purposes, except perhaps (2.1) which will be weakened afterwards (§ 6).

### § 3. The First Approximation.

In what follows we are concerned with a particular one,  $\lambda_0^{(n)}$  say, among the

<sup>16)</sup> For simplicity we give the proof in the case  $m_n = 1$ ; the general case is not essentially different. Let  $E_\varepsilon \rightarrow E_0$ ,  $\dim E_\varepsilon = \dim E_0 = 1$ . Set  $E_0 = P_{f_0}$ <sup>16)</sup> and  $f_\varepsilon = E_\varepsilon f_0$ . Then  $f_\varepsilon \rightarrow E_0 f_0 = f_0$  and  $E_\varepsilon = P_{f_\varepsilon}$ . Set  $f_\varepsilon = f_0 + h_\varepsilon$ ,  $h_\varepsilon \rightarrow 0$ . Then  $(E_\varepsilon - E_0)g = \|f_\varepsilon\|^{-2}(g, f_\varepsilon)f_\varepsilon - \|f_0\|^{-2}(g, f_0)f_0$ . Hence follows easily that  $\|(E_\varepsilon - E_0)g\| \leq \|g\|O(\|h_\varepsilon\|)$ , i. e.,  $\|E_\varepsilon - E_0\| = O(\|h_\varepsilon\|) \rightarrow 0$ .



eigenvalues  $\lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(N)}$  of  $H_0$  and omit the affix  $n$ . Thus  $\lambda_0, E_0, E_\varepsilon, m$  etc. mean  $\lambda_0^{(n)}, E_0^{(n)}, E_\varepsilon^{(n)}, m_n$  hitherto considered. Furthermore, we assume for simplicity that  $\lambda_0$  is non-degenerate ( $m = 1$ )<sup>17)</sup>. Thus  $H_\varepsilon$  has just one non-degenerate eigenvalue  $\lambda_\varepsilon$  in the neighborhood of  $\lambda_0$  and  $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) (Theorem 7). Let  $\varphi_\varepsilon$  be the corresponding eigenvector of  $H_\varepsilon$ ,  $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$  ( $\varepsilon \geq 0$ ). Then<sup>18)</sup>  $E_\varepsilon = P[\varphi_\varepsilon]$  and it follows from Theorem 7 that  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$  provided  $\varphi_\varepsilon$  is properly normalized (e. g. put  $\varphi_\varepsilon = \|E_\varepsilon \varphi_0\|^{-1} E_\varepsilon \varphi_0$ ).

Now we shall give our second main theorem concerning the first approximation of the eigenvalue.

**Theorem 8.** Let  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ . Then  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  and  $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda' + o(\varepsilon)$ ,  $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ <sup>19)</sup>, where  $\lambda' = \tilde{J}'[\varphi_0] = \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2$  and  $\varphi_\varepsilon$  is properly normalized. When the operator  $H + \varepsilon V$  is ess. s. a. for some  $\varepsilon > 0$ , the hypothesis  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$  is satisfied if  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_1^{\frac{1}{2}})$  where  $V_1$  is some non-negative s. a. extension of  $V$ , in particular if  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$ .

**Proof.** We apply Lemma 4 to the operator  $H_\varepsilon^{-1}$ , which belongs to  $\mathbf{B}$  and is much more feasible than the non-bounded  $H_\varepsilon$  itself. For this purpose, we need somewhat lengthy preparations.

First let  $f$  be an element of  $\mathfrak{D}$ . Then we have successively

$$\begin{aligned} H_\varepsilon f &= (H + \varepsilon V) f = H_0 f + \varepsilon V_0 f, \quad H_0^{-1} H_\varepsilon f = f + \varepsilon H_0^{-1} V_0 f, \\ (H_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) H_\varepsilon f &= H_0^{-1} H_\varepsilon f - f = \varepsilon H_0^{-1} V_0 f = \varepsilon H_0^{-1} V_0^{\frac{1}{2}} B_\varepsilon H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f \end{aligned}$$

(see Theorem 1, (i)). On setting  $H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f = g$ ,  $f = H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} g$ , and taking the inner product of the last equation with  $\varphi_0$ , we obtain  $\langle H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g, (H_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) \varphi_0 \rangle = \varepsilon \langle V_0^{\frac{1}{2}} B_\varepsilon g, H_0^{-1} \varphi_0 \rangle$ . But  $H_0^{-1} \varphi_0 = \lambda_0^{-1} \varphi_0$  because  $H_0 \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$  (note that  $\lambda_0 \geq 1$ ). Hence

$$(3.1) \quad \langle H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g, (\lambda_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) \varphi_0 \rangle = \varepsilon \lambda_0^{-1} \langle V_0^{\frac{1}{2}} B_\varepsilon g, \varphi_0 \rangle = \varepsilon \lambda_0^{-1} \langle g, B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \rangle,$$

for  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  by hypothesis and Theorem 1, (d). Also  $H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (\lambda_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) \varphi_0 = \lambda_0^{-1} H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_0 - H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \varphi_0$  exists by hypothesis. Hence (3.1) becomes  $\langle g, H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (\lambda_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) \varphi_0 \rangle = \varepsilon \lambda_0^{-1} \langle g, B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \rangle$ . This is true for every  $g$  of  $H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathfrak{D}$ , which is dense in  $\mathfrak{H}$  by Theorem 1, (f). Thus we have  $H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (\lambda_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) \varphi_0 = \varepsilon \lambda_0^{-1} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$ . On applying  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \in \mathbf{B}$  to both sides, we obtain

$$(3.2) \quad H_\varepsilon^{-1} \varphi_0 = \lambda_0^{-1} \varphi_0 - \varepsilon \lambda_0^{-1} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0.$$

Further we can apply  $V_0^{\frac{1}{2}}$  to both sides, since  $V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = B_\varepsilon \in \mathbf{B}$ . Thus  $V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0 = \lambda_0^{-1} V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 - \varepsilon \lambda_0^{-1} B_\varepsilon B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$ , and hence follows that  $\|V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0\| \leq \lambda_0^{-1} \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\| + \varepsilon \lambda_0^{-1} \|B_\varepsilon\| \|B_\varepsilon^*\| \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\| \leq 2 \lambda_0^{-1} \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|$ , since  $\|B_\varepsilon^*\| = \|B_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  by Theorem 1, (i).  $\|V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0\|$  is therefore bounded when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On the other hand, for every  $h \in \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  we have

<sup>17)</sup> The degenerate case will be treated in a subsequent paper.

<sup>18)</sup>  $P[\varphi]$  is the projection on the one-dimensional linear manifold spanned by  $\varphi: P[\varphi] f = \langle f, \varphi \rangle \varphi$ .

<sup>19)</sup> If  $f \in \mathfrak{D}$ ,  $f = o(\varepsilon)$  etc. means  $\|f\| = o(\varepsilon)$  etc.

$(V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0, h) = (H_\varepsilon^{-1} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} h) \rightarrow (H_0^{-1} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} h) = \lambda_0^{-1} (\varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} h) = \lambda_0^{-1} (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, h)$  by Theorem 2. But as  $\mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  is clearly dense in  $\mathfrak{H}$ , it follows<sup>13)</sup>, combined with the fact just proved that  $\|V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0\|$  is bounded, that

$$(3.3) \quad V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0 \text{ converges weakly to } \lambda_0^{-1} V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0).$$

Next we consider  $H_\varepsilon^{-2}$ . We have

$$(3.4) \quad H_\varepsilon^{-2} - H_0^{-2} = H_\varepsilon^{-1} (H_\varepsilon^{-1} - H_0^{-1}) + (H_\varepsilon^{-1} - H_0^{-1}) H_\varepsilon^{-1}.$$

Applying both sides to  $\varphi_0$  and applying  $V_0^{\frac{1}{2}}$  to the result, we obtain  $V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-2} \varphi_0 - \lambda_0^{-2} V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 = V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0 + \lambda_0^{-1} V_0^{\frac{1}{2}} (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0$ , all terms being significant as above. The second term on the right has just been shown to be bounded when  $\varepsilon \rightarrow +0$ . The first term is also bounded, for it follows from the definition of  $B_\varepsilon$  and (3.2) that  $V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0 = B_\varepsilon H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} (-\varepsilon \lambda_0^{-1} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0) = -\varepsilon \lambda_0^{-1} B_\varepsilon H_\varepsilon^{-1} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$  and its norm is  $\leq \varepsilon \lambda_0^{-1} \|B_\varepsilon\| \|H_\varepsilon^{-1}\| \|B_\varepsilon^*\| \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\| \leq \lambda_0^{-1} \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|$  by Theorem 1, (g) and (i). Hence  $\|V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-2} \varphi_0\|$  is also bounded when  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Since  $H_\varepsilon^{-2} \rightarrow H_0^{-2}$  follows immediately from Theorem 2, we conclude in the same way as (3.3) that

$$(3.5) \quad V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-2} \varphi_0 \text{ converges weakly to } \lambda_0^{-2} V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0).$$

It follows from (3.2) that

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (H_\varepsilon^{-1} \varphi_0, \varphi_0) &= \lambda_0^{-1} (\varphi_0, \varphi_0) - \varepsilon \lambda_0^{-1} (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, B_\varepsilon H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \varphi_0) \\ &= \lambda_0^{-1} - \varepsilon \lambda_0^{-1} (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0). \end{aligned}$$

By virtue of (3.3) the last inner product tends to  $(V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, \lambda_0^{-1} V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0) = \lambda_0^{-1} \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2 = \lambda_0^{-1} \lambda'$  when  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Thus we obtain

$$(3.7) \quad \eta \equiv (H_\varepsilon^{-1} \varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0^{-1} - \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' + o(\varepsilon).$$

In the same way, (3.4) and (3.2) yield

$$\begin{aligned} (H_\varepsilon^{-2} \varphi_0, \varphi_0) &= \lambda_0^{-2} (\varphi_0, \varphi_0) + ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0, H_\varepsilon^{-1} \varphi_0) \\ &\quad + \lambda_0^{-1} ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0, \varphi_0) \\ &= \lambda_0^{-2} - \varepsilon \lambda_0^{-1} (H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, H_\varepsilon^{-1} \varphi_0) - \varepsilon \lambda_0^{-2} (H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, \varphi_0) \\ &= \lambda_0^{-2} - \varepsilon \lambda_0^{-1} (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-2} \varphi_0) - \varepsilon \lambda_0^{-2} (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0) \end{aligned}$$

By virtue of (3.3) and (3.5), we obtain as above

$$(3.8) \quad \|H_\varepsilon^{-1} \varphi_0\|^2 = (H_\varepsilon^{-2} \varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0^{-2} - 2\varepsilon \lambda_0^{-3} \lambda' + o(\varepsilon).$$

Finally it follows from (3.7) and (3.8) that

$$(3.9) \quad \|(H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0\|^2 = \|H_\varepsilon^{-1} \varphi_0\|^2 - 2\lambda_0^{-1} (H_\varepsilon^{-1} \varphi_0, \varphi_0) + \lambda_0^{-2} = o(\varepsilon).$$

Now we have in hand all the material necessary to apply Lemma 4 to the s. a. operator  $H_\varepsilon^{-1}$ . Since  $\lambda_\varepsilon$  is the only one point of the spectrum of  $H_\varepsilon$  lying

in the neighborhood of  $\lambda_0$ , the same is true with  $\lambda_\varepsilon^{-1}$  for the operator  $H_\varepsilon^{-1}$  and in the neighborhood of  $\lambda_0^{-1}$ . Hence we can take an interval  $(\alpha, \beta)$  satisfying the hypotheses of Lemma 4 such that  $\alpha < \lambda_0^{-1} < \beta$ . As the "trial function" we take  $w = \varphi_0$ . Then the quantity  $\eta$  of Lemma 4 is equal to (3.7), and  $\theta^2$  is not larger than (3.9) (see the remark after Lemma 4). It follows that  $\eta - \alpha$  and  $\beta - \eta$  have positive lower bounds when  $\varepsilon \rightarrow +0$  and that  $\theta^2 = o(\varepsilon)$ .  $\theta = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ . Lemma 4 shows therefore that  $|\lambda_\varepsilon^{-1} - \eta| = o(\varepsilon)$  and  $\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\| = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  provided  $\varphi_\varepsilon$  is normalized such that  $(\varphi_\varepsilon, \varphi_0) \geq 0$  (note that the eigenvector of  $H_\varepsilon^{-1}$  is the same as that of  $H_\varepsilon$ , i. e.,  $\varphi_\varepsilon$ ). Thus we have  $\lambda_\varepsilon^{-1} = \lambda_0^{-1} - \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' + o(\varepsilon)$ ,  $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  and the first part of Theorem 8 follows immediately.

Finally we prove the second part of the theorem. It is easily seen that the arguments leading to (3.1) are valid even if  $V_0$  is replaced by  $V_1$  and hence  $B_\varepsilon = V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  by  $\bar{B}_\varepsilon = V_1^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  (actually we have  $\bar{B}_\varepsilon = B_\varepsilon$  since  $V_1^{\frac{1}{2}}$  is a metric extension<sup>20</sup> of  $V_0^{\frac{1}{2}}$ ), provided  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_1^{\frac{1}{2}})$ . On setting  $h = H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g = H_\varepsilon f$ , the result becomes

$(h, (\lambda_0^{-1} - H_\varepsilon^{-1}) \varphi_0) = \varepsilon \lambda_0^{-1} (H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} h, \bar{B}_\varepsilon^* V_1^{\frac{1}{2}} \varphi_0) = \varepsilon \lambda_0^{-1} (h, H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{B}_\varepsilon^* V_1^{\frac{1}{2}} \varphi_0)$ . This is true for every  $h$  of  $H_\varepsilon \mathfrak{D}$  which is dense in  $\mathfrak{H}$  if  $H + \varepsilon V$  is ess. s. a. (Lemma 1). Hence  $\lambda_0^{-1} \varphi_0 = H_\varepsilon^{-1} \varphi_0 + \varepsilon \lambda_0^{-1} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{B}_\varepsilon^* V_1^{\frac{1}{2}} \varphi_0$ . The right side belongs to  $\mathfrak{D}(H_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$  so that the same is true with  $\varphi_0$ .

#### § 4. The Second Approximation.

To proceed to the second approximation of the eigenvalue, we introduce some necessary quantities. Set  $S_0 = f'(\lambda - \lambda_0)^{-1} dE_0(\lambda)$ , where  $f'$  means to integrate except the point  $\lambda = \lambda_0$ .  $S_0$  has the following properties:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S_0 \in \mathbf{B}, \quad S_0^* = S_0, \quad S_0 E_0 = E_0 S_0 = 0, \quad S_0 \varphi_0 = 0, \\ S_0 H_0^{\frac{1}{2}} \subseteq H_0^{\frac{1}{2}} S_0 \in \mathbf{B}, \quad S_0 H_0 \subseteq H_0 S_0 \in \mathbf{B}, \quad (H_0 - \lambda_0) S_0 = 1 - E_0. \end{aligned}$$

These follow easily from the definition of  $S_0$  and the fact that  $\lambda_0$  is an isolated eigenvalue of  $H_0$  and  $E_0 = P_{\{\lambda_0\}}$ . Then our third main theorem reads

**Theorem 9.** In addition to the hypothesis of Theorem 8, assume that  $V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \in \mathfrak{D}(B_0^*)$ . Then  $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda' + \varepsilon^2 \lambda'' + o(\varepsilon^2)$  and  $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \varphi' + o(\varepsilon)$ , where  $\lambda' = \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2$  as before and  $\lambda'' = -(H_0 S_0 B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0)$ .  $\varphi' = -H_0^{\frac{1}{2}} S_0 B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$ . The hypothesis  $V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \in \mathfrak{D}(B_0^*)$  is fulfilled if  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0)$ ; in this case  $\lambda', \lambda''$  and  $\varphi'$  are given more simply by  $\lambda' = (V_0 \varphi_0, \varphi_0)$ ,  $\lambda'' = -(S_0 V_0 \varphi_0, V_0 \varphi_0)$ ,  $\varphi' = -S_0 V_0 \varphi_0$ .

**Proof.** As before we apply Lemma 4 to the operator  $H_\varepsilon^{-1}$ . We first note that the substitution of (3.2) into (3.6) yields

$$(H_\varepsilon^{-1} \varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0^{-1} - \varepsilon \lambda_0^{-2} \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2 + \varepsilon^2 \lambda_0^{-2} (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0).$$

Since  $V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = B_\varepsilon$ , the last inner product becomes  $\|B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2$  and, since

<sup>20</sup> NEUMANN [9] and FRIEDRICHS [1].

$B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \rightarrow B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 (\varepsilon \rightarrow +0)$  by hypothesis and theorem 5, we have

$$(4.2) \quad ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0, \varphi_0) = -\varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' + \varepsilon^2 \lambda_0^{-2} \|B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2 + o(\varepsilon^2).$$

Further it follows from  $B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \rightarrow B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$  and Theorem 4 that  $H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_\varepsilon^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \rightarrow H_0^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$ . Hence we have by (3.2)

$$(4.3) \quad (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0 = -\varepsilon \lambda_0^{-1} H_0^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 + o(\varepsilon).$$

Next we calculate  $(H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi'$ . Since  $-(H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) H_0^{\frac{1}{2}} S_0 = \lambda_0^{-1} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} (H_0 - \lambda_0) S_0 = \lambda_0^{-1} H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} (1 - E_0) = \lambda_0^{-1} (1 - E_0) H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  by (4.1), we have  $(H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi' = \lambda_0^{-1} (1 - E_0) H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$ . Noting that  $E_0 = P_{\{v_0\}}$ , we have  $E_0 H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 = (H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, \varphi_0) \varphi_0 = (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, B_0 H_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \varphi_0) \varphi_0 = (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, V_0^{\frac{1}{2}} H_\varepsilon^{-1} \varphi_0) \varphi_0 = \lambda_0^{-1} \|V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2 \varphi_0 = \lambda_0^{-1} \lambda' \varphi_0$ . Since  $H_\varepsilon^{-1} \rightarrow H_0^{-1}$  by Theorem 2, we thus obtain

$$(4.4) \quad \begin{aligned} (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi' &= (H_0^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi' + o(1) \\ &= \lambda_0^{-1} H_0^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 - \lambda_0^{-2} \lambda' \varphi_0 + o(1). \end{aligned}$$

On setting  $\varphi'_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \varphi'$  we have

$$((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi'_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) = ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0, \varphi_0) + 2\varepsilon \operatorname{Re}((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi_0, \varphi') + \varepsilon^2 ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi', \varphi').$$

Substitution of (4.2), (4.3) and (4.4) yields

$$(4.5) \quad \begin{aligned} ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) \varphi'_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) &= -\varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' + \varepsilon^2 \mu'' + o(\varepsilon^2), \\ \mu'' &= \lambda_0^{-2} \|B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2 - \lambda_0^{-1} (H_0^{-\frac{1}{2}} B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, \varphi') - \lambda_0^{-2} \lambda' (\varphi_0, \varphi'). \end{aligned}$$

Since  $(\varphi_0, \varphi') = -(\varphi_0, H_0^{\frac{1}{2}} S_0 \dots) = -\lambda_0^{\frac{1}{2}} (S_0 \varphi_0, \dots) = 0$  by (4.1), the last expression becomes, after substitution of  $\varphi'$ ,

$$(4.5)' \quad \mu'' = \lambda_0^{-2} \|B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0\|^2 + \lambda_0^{-1} (B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, S_0 B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0).$$

Also it follows from (4.3) and (4.4) that

$$(4.6) \quad \begin{aligned} (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1} + \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda') \varphi'_\varepsilon &= (H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) (\varphi_0 + \varepsilon \varphi') \\ &\quad + \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' \varphi_0 + o(\varepsilon) = o(\varepsilon). \end{aligned}$$

In order to apply Lemma 4, we take  $w = \|\varphi'_\varepsilon\|^{-1} \varphi'_\varepsilon$ . Since  $(\varphi_0, \varphi') = 0$  as shown above,  $\|\varphi'_\varepsilon\|^2 = 1 + \varepsilon^2 \|\varphi'\|^2$  and it follows from (4.5) that

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \eta &= (H_\varepsilon^{-1} w, w) = \lambda_0^{-1} + ((H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1}) w, w) \\ &= \lambda_0^{-1} - \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' + \varepsilon^2 \mu'' + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Also we have by (4.6)

$$(4.8) \quad \theta = \|(H_\varepsilon^{-1} - \eta) w\| \leq \|(H_\varepsilon^{-1} - \lambda_0^{-1} + \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda') w\| = o(\varepsilon)$$

(see the remark after Lemma 4). In this way Lemma 4 gives

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon^{-1} &= \eta + O(\theta^2) = \lambda_0^{-1} - \varepsilon \lambda_0^{-2} \lambda' + \varepsilon^2 \mu'' + o(\varepsilon^2), \\ \varphi_\varepsilon &= w + O(\theta) = \varphi'_\varepsilon + o(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi' + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Thus the formula of  $\varphi_\varepsilon$  has been proved. Also it follows that

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda' + \varepsilon^2 (-\lambda_0^2 \mu'' + \lambda_0^{-1} \lambda'^2) + o(\varepsilon^3).$$

That the coefficient of  $\varepsilon^3$  agrees with  $\lambda''$  given in the theorem is easily verified by direct calculation; we have only to note (4.5') and the relations  $H_0 S_0 = \lambda_0 S_0 + 1 - E_0$  and  $E_0 = P_{[\varphi_0]}$  (see (4.1)). Thus the first part of Theorem 9 has been proved.

If  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0)$ , then  $(V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, B_0 g) = (V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0, V_0^{-\frac{1}{2}} H_0^{-\frac{1}{2}} g) = (H_0^{-\frac{1}{2}} V_0 \varphi_0, g)$  for every  $g \in \mathfrak{D}(B_0)$ . Hence  $V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \in \mathfrak{D}(B_0^*)$  and  $B_0^* V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0 = H_0^{-\frac{1}{2}} V_0 \varphi_0$ . The second part of the theorem then follows immediately by (4.1).

### § 5. Higher Approximations.

Higher approximations can be treated in the same way. But as the second approximation suffices for most applications, we shall not give them here, and refer the reader to the previous paper (KATO [7]).

### § 6. Relaxation of Assumptions.

Hitherto we have assumed (2.1). But these conditions can be much weakened without affecting the results. The condition  $(Hf, f) \geq (f, f)$  may be assumed if  $H$  is only bounded below, for otherwise we have only to add a suitable constant to  $H$  and this means only a change of the origin for all the spectra of  $H_\varepsilon$  by the same amount. Then the condition of  $V$  can be replaced by

$$(6.1) \quad (Vf, f) \geq -a(f, f) - b(Hf, f), \quad a, b \geq 0.$$

If we set  $V' = V + a + bH$ , then  $(V'f, f) \geq 0$  and we have  $H + \varepsilon V = (1 - \varepsilon b)(H + \varepsilon' V') - \varepsilon a$ , where  $\varepsilon' = \varepsilon(1 - \varepsilon b)^{-1}$ . But the factor  $1 - \varepsilon b$  and the additive number  $-\varepsilon a$  are irrelevant, for they imply only the change of the origin and the unit for the spectra of  $H_\varepsilon$ . Thus the problem is reduced to that for the operator  $H + \varepsilon' V'$  and, since (2.1) is satisfied by  $H$  and  $V'$ , our theorems are applicable to it. Also it is not difficult to express the formulae directly in terms of  $H$ ,  $V$  and  $\varepsilon$ . It is seen that the results are formally in agreement with those given in our theorems.

### § 7. Applications.

As our theorems are given in rather abstract forms, we shall give some simple examples by way of illustration.

*Ex. 1.* (TITCHMARSH [19].) Let  $\mathfrak{H} = L_2(0 \leq x < \infty)$ ,  $H = -d^2/dx^2 + q(x)$ ,  $V = \sigma(x)$ . As the common domain  $\mathfrak{D}$  of  $H$  and  $V$ , we take the set of all  $f(x) \in \mathfrak{H}$  with continuous  $f''(x)$  and which satisfy a given boundary condition at  $x = 0$  (e.g.  $f(0) = 0$ ) and vanish for  $x \rightarrow \infty$  sufficiently rapidly such that  $Hf \in \mathfrak{H}$ ,  $Vf \in \mathfrak{H}$ . For simplicity we assume that  $q(x)$ ,  $\sigma(x)$  are continuous and  $q(x) \geq 1$ ,  $\sigma(x) \geq 0$ , though these are not necessary (§ 6). Then Assumption 1 is satisfied. Moreover,  $H + \varepsilon V$  and  $V$  are ess. s. a. so that  $H_\varepsilon$  and  $V_0$  are the unique closed extensions of them. Also Assumption 2 is satisfied if  $q(x)$  has proper behavior (e.g.  $q(x) \rightarrow \infty$  as  $x \rightarrow \infty$ ). Hence Theorem 7 holds without any further assumptions. Theorem 8 is true provided  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$ , which is equivalent to  $\lambda' = \int_0^\infty \sigma(x) |\varphi_0(x)|^2 dx < \infty$  and is much weaker than the condition (2.7) of TITCHMARSH [19]. Theorem 9 holds provided  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0)$ , which is

equivalent to  $\int_0^\infty |\sigma \varphi_0|^2 dx < \infty$  and coincides with (2.7) of TITCHMARSH for the particular  $n$  under consideration; no further conditions are necessary<sup>21)</sup>.

*Ex. 2.* Let  $\mathfrak{H} = L_2(0 \leq x \leq 1)$ ,  $H = -d^2/dx^2 + 1$ ,  $V = d^2/dx^2$ . Let the common domain  $\mathfrak{D}$  be restricted by the boundary condition  $(*) f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$ . Then Assumption 1 is satisfied. Moreover,  $V$  and  $H + \varepsilon V$  are ess. s. a. if  $\varepsilon > 0$ , but  $H$  is not ess. s. a. If  $\varepsilon > 0$ ,  $H_\varepsilon - 1$  is the operator describing the vibration of a string with small rigidity  $\varepsilon$  and clamped at both ends<sup>22)</sup>.  $H_0 - 1$  is the F-extension of  $H - 1$  and is the operator  $-d^2/dx^2$  with the boundary condition  $(*) f(0) = f(1) = 0$ , describing the vibration of a string with no rigidity and fixed at both ends.  $H_0$  has pure point spectrum and hence Assumption 2 is fulfilled. Thus Theorem 7 is applicable and all the eigenvalues and eigenvectors are continuous at  $\varepsilon = 0$ . It will be noted that  $(*)$  is not the only boundary condition compatible with  $(*)$ . But if we take other boundary conditions in defining  $H_0$ , Theorem 7 does not hold. In this sense  $(*)$  is a distinguished boundary condition<sup>23)</sup>. The eigenfunctions of  $H_0$  are given by  $\frac{1}{2} \sin n\pi x$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , and since these do not belong to  $\mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$ , Theorem 8 is not applicable. In fact, the eigenvalues of  $H_\varepsilon$  are given by<sup>22)</sup>  $n^2 \pi^2 (1 + 4\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon))$  and cannot be expressed in the form stated in Theorem 8.

*Ex. 3.* Let  $\mathfrak{H} = L_2(-\infty < x < \infty)$ . Let  $H = 2 - G$  where  $G$  is an integral operator with the kernel  $G(x, \xi) = \varphi_0(x) \varphi_0(\xi)$  with  $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$ ,  $\|\varphi_0\| = 1$ . Let  $V = x^2$ . Let  $\mathfrak{D}$  be the set of all  $f(x) \in \mathfrak{H}$  such that  $x^2 f(x) \in \mathfrak{H}$ . Then Assumption 1 is fulfilled, and  $V$  and  $H + \varepsilon V$  are s. a. for  $\varepsilon > 0$ .  $H_0$  has pure point spectrum consisting of two eigenvalues 1 and 2. The eigenvalue  $\lambda_0 = 1$  is non-degenerate so that Assumption 2 is fulfilled with  $N = 1$ . The corresponding eigenvector is the  $\varphi_0$  stated above. Theorem 7 is true and the eigenvalue  $\lambda_\varepsilon$  and the corresponding eigenvector  $\varphi_\varepsilon$  of  $H_\varepsilon$  are continuous at  $\varepsilon = 0$ . Further properties of them depend on the explicit form of  $\varphi_0$ . For instance if  $\varphi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\varphi_0$  does not belong to  $\mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$ , and Theorem 8 is not applicable. In fact, the explicit solution shows that  $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)$  and the results of Theorem 8 are not valid. If we set  $\varphi_0(x) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)^{-1}$ , then  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0^{\frac{1}{2}})$  and Theorem 8 is applicable. But as  $V_0^{\frac{1}{2}} \varphi_0$  does not belong to  $\mathfrak{D}(B_0^*)$ , Theorem 9 is not applicable. In fact, the explicit solution shows that  $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon - 2\varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2)$  and the results of Theorem 9 are not valid. Also it can be shown that  $\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\| = \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)$  and this verifies Theorem 8. If we set  $\varphi_0(x) = (8/3\pi)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ , then  $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(V_0)$  and Theorem 9 is applicable. In this way we see that the hypotheses of our theorems are not superfluous and are almost necessary from the practical point of view.

<sup>21)</sup> If we assume the additional condition (11.3) of TITCHMARSH [19], we can actually obtain the expansion of the eigenvalue up to the order  $\varepsilon^4$  instead of  $\varepsilon^3$ . To show this we note that his (11.3) implies  $\sum_r \lambda_r^{-1} |(V_0 \varphi_n, \varphi_r)| \|\varphi_0 \varphi_r\| < \infty$ , where  $\varphi_r$  are the eigenvectors of  $H_0$ :  $H_0 \varphi_r = \lambda_r \varphi_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) (it will be noted that  $\varphi_n$  is our  $\varphi_0$  and  $\lambda_n$  is our  $\lambda_0$ ). But as the definition of  $S_\varepsilon$  shows that  $S_\varepsilon V_\varepsilon \varphi_0 = \sum_{r \neq n} (\lambda_r - \lambda_n)^{-1} (V_0 \varphi_n, \varphi_r) \varphi_r$ , it follows that  $\|V_0 S_\varepsilon V_\varepsilon \varphi_0\| < \infty$ , i. e.,  $V_\varepsilon S_\varepsilon V_\varepsilon \varphi_0 \in \mathfrak{H}$ . Thus the assertion follows from § 9 of KATO [7] (although the complete proof was not given there, it was proved at least that  $\lambda_\varepsilon$  can be developed up to the order  $\varepsilon^3$  with a residue  $O(\varepsilon^4)$ ).

<sup>22)</sup> RAYLEIGH [10], p. 300.

<sup>23)</sup> Cf. FRIEDRICH [2], RELICH [16].

## Bibliography.

- [1] FRIEDRICHS, K.: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. I. Math. Ann. **109**, 465—487 (1934). — [2] FRIEDRICHS, K.: Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **112**, 1—23 (1936). — [3] HEINZ, E.: Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **123**, 415—438 (1951). — [4] KATO, T.: On the upper and lower bounds of eigenvalues. J. Phys. Soc. Japan **4**, 334—339 (1949). — [5] KATO, T.: On the convergence of the perturbation method. I. Progress of Theoretical Physics **4**, 514—523 (1949). — [6] KATO, T.: On the convergence of the perturbation method, II. Progress of Theoretical Physics **5**, 95—101 and 207—212 (1950). — [7] KATO, T.: On the convergence of the perturbation method. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, VI/3, 145—226 (1951). — [8] v. NEUMANN, J.: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. Math. Ann. **102**, 370—427 (1929). — [9] v. NEUMANN, J.: Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. of Math. **33**, 294—310 (1932). — [10] RAYLEIGH, Lord: Theory of Sound, I. London 1894. — [11] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, I. Mitt. Math. Ann. **113**, 600—619 (1937). — [12] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, II. Mitt. Math. Ann. **113**, 677—685 (1937). — [13] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, III. Mitt. Math. Ann. **116**, 555—570 (1939). — [14] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, IV. Mitt. Math. Ann. **117**, 356—382 (1940). — [15] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, V. Mitt. Math. Ann. **118**, 462—484 (1941/43). — [16] RELICH, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122**, 343—368 (1950). — [17] STONE, M. H.: Linear transformations in Hilbert space. New York 1932. — [18] v. SZ. NAGY, B.: Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, Comment. math. helvet. **19**, 347—366 (1946/47). — [19] TITCHMARSH, E. C.: Some theorems on perturbation theory. Proc. Roy. Soc. (Lond.) A **200**, 34—46 (1949). — [20] TITCHMARSH, E. C.: Some theorems on perturbation theory, II. Proc. Roy. Soc. (Lond.) A **201**, 473—479 (1950).

(Eingegangen am 20. Juni 1952.)

## Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. III.

Von

HELMUT RÖHRL in Würzburg.

### Einleitung.

In den beiden vorhergehenden Teilen dieser Arbeit wurde eine Anzahl von Sätzen der klassischen Theorie der algebraischen Funktionen auf Funktionen der Art  $\prod_{v=0}^n (z - \alpha_v)^{\alpha_v} \exp r(z)$  mit komplexen  $\alpha_v$ ,  $\alpha$ , und rationalem  $r(z)$  über-

tragen. Die Integralperioden dieser Funktionen lassen sich durch spezielle Perioden, die man zu einer quadratischen Periodenmatrix zusammenfassen kann, vollständig beschreiben; für sie gelten die WEIERSTRASSschen Periodenrelationen.

In diesem letzten Teil hängen die  $\alpha_v$  und die Koeffizienten von  $r(z)$  analytisch von einem Parameter  $u$  ab. Entsprechend sind die im I. Teil auftretenden Reduktionskoeffizienten Funktionen von  $u$ , deren Singularitäten leicht angegeben werden können. Die Integralperioden der betrachteten Funktionen hängen ebenfalls von  $u$  ab und genügen einem System gewöhnlicher, linearer, homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung, das sich stets als evident reduzibel erweist, wenn die Funktionen schlichtblättrige Pole besitzen. Die erwähnte Periodenmatrix bildet eine Integralmatrix des Systems von Differentialgleichungen. Die Elemente der Integralmatrix stellen eine Verallgemeinerung der Laplace-Transformation dar; allerdings geht diese Verallgemeinerung in eine andere Richtung als z. B. eine von HORN angegebene. Die Spalten der Integralmatrix bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit von Funktionssystemen, die gegen Differentiation abgeschlossen ist. Macht man weiter noch gewisse Einschränkungen über die Basisfunktion und den zum Aufbau der Klasse benötigten Funktionenbereich  $\mathfrak{A}$ , so ist dieser Mannigfaltigkeit eine Monodromiegruppe zugeordnet, so daß wir es wieder mit einer Klasse zu tun haben. Diese Klassen sind aber i. a. keine RIEMANNschen Klassen, selbst nicht in dem von H. SCHMIDT diskutierten Fall der rationalen Funktionen als  $\mathfrak{A}$ , der dort zu RIEMANNschen Funktionensystemen führt. Aus der von NEKRASSOFF angegebenen Methode der deformierbaren Integrationswege lassen sich weitgehende Aussagen über die Matrizen der Monodromiegruppe herleiten. Wenn die Integranden keine schlichtblättrigen Pole aufweisen, führen die Periodenrelationen zu dem Ergebnis, daß die komplementäre Klasse bei geeigneter Wahl der Periodenwege die komplementäre Periodenmatrix liefert: die zugehörigen Systeme von Differentialgleichungen sind zueinander adjungiert.

Zum Abschluß werden noch drei Beispiele behandelt: eine Verallgemeinerung der HERMITESchen, BESSELSchen und KUMMERSchen Funktionensysteme in dem Sinn, in welchem SCHLESINGER das hypergeometrische Funktionensystem verallgemeinerte. In allen drei Fällen wird der Zusammenhang zwischen einer Integralmatrix der Differentialsysteme und einer des adjungierten Systems näher untersucht.



## § 1. Herleitung des Differentialsystems.

Unter einem Bereiche  $\mathfrak{R}_0$  von analytischen Funktionen verstehen wir im folgenden eine Menge, deren Elemente in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  der Ebene nur isolierte Singularitäten aufweisen, welche die Gesamtheit der komplexen Zahlen enthält und gegenüber Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Differentiation abgeschlossen ist.

Die  $r$  Polynome  $f_\nu(z, u)$  von  $z$  seien in  $z$  bzw. vom Grad  $n_\nu$  und die Koeffizienten seien aus einem noch näher zu umreisenden Bereich  $\mathfrak{R}_0$  entnommen, speziell sei der höchste Koeffizient gleich 1; ferner sei jedes der Polynome in  $\mathfrak{R}_0$  irreduzibel und je zwei beliebige von ihnen teilerfremd. Diese beiden letzten Forderungen bedeuten keine Einschränkung, wie man aus dem folgenden leicht erkennt.

Seien jetzt  $z_1(u), \dots, z_{n_1}(u), z_{n_1+1}(u), \dots, z_{n+1}(u)$  die Nullstellen der Polynome  $f_1(z, u), \dots, f_r(z, u)$  der Reihe nach angeordnet; jeder dieser Nullstellen  $z_\nu(u)$  weisen wir  $\gamma_\nu - 1$  Funktionen  $c_{\lambda\nu}(u) \in \mathfrak{R}_0$ ,  $\lambda = 0, \dots, \gamma_\nu - 2$  zu. Dem Punkt  $z = \infty$  ordnen wir  $\gamma_\infty + 1$  Elemente  $c_{\lambda\infty}(u)$  aus  $\mathfrak{R}_0$  zu. Neben der  $z$ -Ebene betrachten wir noch die  $u$ -Ebene.  $e'_1, \dots, e'_s$  seien die Singularitäten der Koeffizienten der  $f_\nu(z, u)$ , der  $c_{\lambda\nu}(u)$ , die Nullstellen der  $c_{0\nu}(u)$  und ferner diejenigen  $u$ -Werte, für welche zwei oder mehrere der  $z_\nu(u)$  zusammenfallen. Von diesen Punkten aus schneiden wir die  $u$ -Ebene durch einander nicht überkreuzende Schnitte nach  $u = \infty$  auf und bezeichnen, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, mit  $u$  in Zukunft einen Punkt dieses Restgebietes  $\mathfrak{R}_u$ . Wählen wir für  $u$  einen entsprechenden Wert, dann sind also die  $z_\nu(u)$  paarweise voneinander verschieden und es existieren die  $c_{\lambda\nu}(u)$  mit  $c_{0\nu}(u) \neq 0$ ; weiter sind die  $z_\nu(u)$  alle im Endlichen gelegen. Damit können wir im Sinne von I.<sup>1)</sup> § 1 die Basisfunktion

$$(1) \quad W(z, u) = \prod_{\nu=1}^{n+1} (z - z_\nu(u))^{\alpha_\nu} \exp \left\{ - \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\nu-2} \frac{c_{\lambda\nu}(u)}{\gamma_\nu - \lambda - 1} (z - z_\nu(u))^{-\gamma_\nu + \lambda + 1} \right\} \times \\ \times \exp \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty} \frac{c_{\lambda\infty}(u)}{\gamma_\infty + 1 - \lambda} z^{\gamma_\infty + 1 - \lambda} \Big\}$$

aufstellen, wobei  $\alpha_{n_0} + \dots + \alpha_{n_0-1} + \lambda = \alpha_\nu^*$ ;  $\lambda = 1, \dots, n_\nu$ ;  $n_0 = 0$ ; und  $(z - z_\nu(u))^{\alpha_\nu}$  derjenige Zweig von  $\exp \{\alpha_\nu \lg(z - z_\nu(u))\}$  sein soll, der für  $z - z_\nu(u) = 1$  den Wert 1 annimmt. Wie man unmittelbar einsieht, ist  $W(z, u)$  für die  $u$ -Werte des obigen Restgebietes sinnvoll definiert.

$W(z, u)$  liefert uns als Basisfunktion eine multiplikative Klasse  $k(u)$ , die zusammenfällt mit der Menge der Funktionen  $R(z, u) W(z, u)$ , wenn  $R(z, u)$  in  $z$  rational ist und die Koeffizienten von  $R(z, u)$  von  $u$  beliebig abhängen. Die so definierte Klasse ist jedoch für unsere Zwecke zu umfangreich, so daß wir aus  $k(u)$  geeignete Untermengen herausziehen. Dabei legen wir wie schon in I. nicht die ganze Klasse zugrunde, sondern die Teilklassen  $k_0(u)$  bzw.  $k_\Sigma(u)$ ; ist dabei  $f_0(z, u)$  ein Polynom in  $z$  von der Art der  $f_\nu(z, u)$ ,  $\nu = 1, \dots, r$ , und sind weiter  $\zeta_1(u), \dots, \zeta_m(u)$  die Nullstellen von  $f_0(z, u)$ , so verstehen wir unter  $k_\Sigma(u)$  diejenige Teilmenge von  $k(u)$ , deren Elemente außer in den Punkten  $z_\nu(u)$  höchstens noch in den Punkten  $\zeta_\mu(u)$  singulär werden. Um allerdings auf den in I. diskutierten Fall zu kommen, müssen wir die  $u$ -Werte auf die folgende Weise in der  $u$ -Ebene beschränken: seien  $e_1, \dots, e_s$  die Singularitäten der Koeffizienten der  $f_0(z, u), \dots, f_r(z, u)$ , der  $c_{\lambda\nu}(u)$ , die Null-

<sup>1)</sup> Unter I. soll immer der I. Teil der Arbeit gemeint sein; analog II.

stellen der  $c_{0r}(u)$  und ferner diejenigen  $u$ -Werte, für welche zwei oder mehrere der  $z_r(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$  zusammenfallen; dann ist  $u$  auf den Schlitzbereich der  $u$ -Ebene einzuschränken, der aus der schlichten Ebene durch Aufschlitzen von den  $e_r$  nach  $u = \infty$  durch einander nicht überkreuzende Schnitte entsteht.

Von diesen Teilmengen ausgehend gelangen wir zu den Untermengen  $\kappa_0(u; \mathbb{R})$ ,  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$ . Sie seien dadurch definiert, daß die Koeffizienten der (in  $z$ ) rationalen Funktion  $R(z, u)$ , mit welchen die Elemente von  $k_0(u)$ ,  $k_{\mathfrak{B}}(u)$  aufgebaut sind, dem Bereich  $\mathbb{R}$  entnommen sind, wo  $\mathbb{R}$  ein Bereich desselben Typs wie  $\mathbb{R}_0$  ist, der die  $z_r(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$  und die Elemente von  $\mathbb{R}_0$  enthält. Die so definierten Mengen  $\kappa_0(u; \mathbb{R})$ ,  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  bilden sicher einen Modul über  $\mathbb{R}$ ; wenn wir noch zeigen können, daß die Differentiation nicht aus diesen Bereichen hinausführt, ist nachgewiesen, daß es sich sogar um Klassen handelt. Es gilt nun der

**Satz 1:**  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  bildet eine Klasse, d. h. mit jedem Element ist auch dessen Ableitung in  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  enthalten; ebenso ist mit jedem Element auch dessen Ableitung nach dem Parameter  $u$  in  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  enthalten. Sind ferner die Elemente der Basis  $y_1, \dots, y_{N_{\mathfrak{B}}}$  von  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  dieser Klasse entnommen, so gehören die auftretenden Reduktionskoeffizienten (Reduktion der Elemente von  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  dem Bereich  $\mathbb{R}$  an. Die Reduktionskoeffizienten werden in  $\mathcal{G}$  höchstens in den Punkten  $e_1, \dots, e_s$  und in den Punkten der  $u$ -Ebene, in welchen die Basisfunktionen und die zu reduzierende Funktion Singularitäten aufweisen, singular. Entsprechend treten für  $\kappa_0(u; \mathbb{R})$  anstelle der  $e_r$  die  $e'_r$ .

*Beweis:* Um zu zeigen, daß mit  $y$  auch  $\frac{\partial y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}$  in  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathbb{R})$  enthalten ist, hat man wegen der Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  nur für  $W(z, u)$  diesen Nachweis zu führen. Hierfür wird aber die Behauptung durch Anschreiben der Differentiation verifiziert. Daß weiter die Reduktionskoeffizienten in  $\mathbb{R}$  enthalten sind, ist nichts anderes als Satz 6 in I. für variables  $u$ . Somit bleibt nur noch die Behauptung hinsichtlich der Singularitäten. Sei  $u = u_0$  von den Singularitäten der Basisfunktionen, der zu reduzierenden Funktion und den  $e_1, \dots, e_s$  verschieden. Dann beschränken wir  $u$  auf eine hinreichend kleine Umgebung von  $u_0$ . Nach den eben durchgeführten Überlegungen sind die Reduktionskoeffizienten Elemente des Bereiches  $\mathbb{R}$ , der die variablen Größen  $c_{\mu r}(u)$ ,  $z_r(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$  enthält. Diese Größen reduzieren sich für  $u = u_0$  auf bestimmte Konstante  $c_{\mu r}$ ,  $a_r$ ,  $b_\mu$ . Des weiteren reduzieren sich die Basisfunktionen und die zu reduzierende Funktion auf bestimmte Klassenfunktionen im Sinne des ersten Teils. Damit folgt aus den dortigen Überlegungen, daß sich auch die Reduktionskoeffizienten zu bestimmten Größen spezialisieren. Greifen wir jetzt auf den Gedankengang zurück, der zu Satz 6 in I. geführt hat, so sehen wir: in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $u_0$  gehören die Reduktionskoeffizienten dem Körper an, der aus  $c_{\mu r}(u)$ ,  $z_r(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$  und den Koeffizientenfunktionen  $r_\lambda(u)$  der betrachteten Funktionen aufgebaut ist. Sie sind also rationale Funktionen der  $c_{\mu r}(u)$ ,  $z_r(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$ ,  $r_\lambda(u)$ , die sich für  $u = u_0$  auf feste Größen spezialisieren; weil gleichzeitig in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $u = u_0$  sich diese Funktionen regulär verhalten, gilt dasselbe auch für die Reduktionskoeffizienten; somit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Zu Satz 1 haben wir noch eine Bemerkung zu machen: für  $\kappa_0(u; \mathbb{R})$  ist es trivial, daß eine Basis existiert, die  $\kappa_0(u; \mathbb{R})$  selbst angehört; eine solche

wäre nach dem Beweis von Satz 4 in I. das System

$$(2) \quad y_\mu = (z-c)^\mu \prod_{e=1}^r f_e(z, u)^{l_e} W(z, u); \quad \mu = 0, \dots, N_0 - 1$$

mit geeigneten  $l_e$ . Da wir den vollkommen gleichlautenden Beweis auch für  $k_{\mathfrak{B}}$  führen können, wenn nur  $l_0 < 0$ , hat man in

$$(3) \quad y_\mu = (z-c)^\mu \prod_{e=0}^r f_e(z, u)^{l_e} W(z, u); \quad \mu = 0, \dots, N_{\mathfrak{B}} - 1$$

bei geeigneten  $l_e$  eine Basis für  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$ , deren Elemente in  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$  liegen. Die Basissysteme (2), (3) haben weiter noch den Vorteil, daß ihre Elemente höchstens in den Punkten  $e'_\sigma$  bzw.  $e_\sigma$  singular werden, was für die Reduktionskoeffizienten im allgemeinen die einfachsten Verhältnisse — möglichst wenig Singularitäten — im Gefolge hat.

Sei nun  $y_1, \dots, y_{N_{\mathfrak{B}}}$  eine Basis für  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$ , deren Elemente  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$  entnommen sind. Nach Satz 12 gilt dann:

$$(4) \quad \frac{\partial y_\mu}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{N_{\mathfrak{B}}} d_{\nu\mu} y_\nu; \quad \mu = 1, \dots, N_{\mathfrak{B}}$$

mit  $d_{\nu\mu}(u) \in \mathfrak{K}$ . Die  $d_{\nu\mu}(u)$  weisen als Singularitäten höchstens die  $e_\sigma$  und die Singularitäten der Basisfunktionen auf. Halten wir für einen Augenblick  $u = u_0$ , von den Singularitäten der Basisfunktionen und den  $e_\sigma$  verschieden, fest, so können wir zu dieser Konfiguration der  $z_\sigma(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$  und den Werten der  $\gamma$ , ein Basissystem für die bezüglich  $k_{\mathfrak{B}}(u_0)$  geschlossenen Wege aufstellen. Denkt man sich mit NEKRASSOFF [2] die eventuell durch eines oder mehrere der  $z_\sigma(u_0)$  gehenden Wege in diesen mit den Sektoren starr befestigt, so stellt unsere Wegbasis auch noch für  $k_{\mathfrak{B}}(u)$  eine solche dar, wenn man nur  $u$  auf eine hinreichend kleine Umgebung von  $u_0$  beschränkt.

Weil in einer gewissen Umgebung von  $u = u_0$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial y_\mu}{\partial u}$  in  $z$  und  $u$  analytisch ist, falls man die  $z$ -Werte entsprechend einschränkt, z. B. auf die Fundamentalwege, kann man die Differentiation nach  $u$  mit der Integration nach  $z$  über die ganz im Endlichen gelegenen Fundamentalwege vertauschen. Diese Vertauschbarkeit wollen wir auch für geschlossene Wege, welche den Punkt  $a_\infty$  enthalten, nachweisen. Sei  $u = u_0$ , dann gilt in einer gewissen Umgebung von  $u_0$ :

$$\left| \int_{\mathfrak{C}(u_0)} \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u=u_0} dz - \frac{1}{u-u_0} \left\{ \int_{\mathfrak{C}(u)} y(z, u) dz - \int_{\mathfrak{C}(u_0)} y(z, u_0) dz \right\} \right| \\ \leq \epsilon(u) + \int_{\mathfrak{C}_1} \left| \left\{ \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u=u_0} - \frac{y(z, u) - y(z, u_0)}{u-u_0} \right\} \right| |dz| + \sum_{i_\nu} |f| \dots |dz|,$$

wobei  $\mathfrak{C}_1$  Anfangs- und Endpunkt von  $\mathfrak{C}(u_0)$  — falls diese singular sind — und den Punkt  $a_\infty$  nicht mehr enthält und eine endliche Länge besitzt, während die  $i_\nu$  diejenigen Teilstücke von  $\mathfrak{C}(u_0)$  sind, welche  $a_\infty$  enthalten und aus  $\mathfrak{C}(u_0)$  durch im Endlichen gelegene Punkte ausgeschnitten werden. Es ist

$$\int_{i_\nu} |\dots| |dz| \leq \int_{i_\nu} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u=u_0} \right| |dz| + \int_{i_\nu} \left| \frac{y(z, u) - y(z, u_0)}{u-u_0} \right| |dz|.$$

Man kann den ersten Term nach einem bereits öfters gebrauchten Schluß durch entsprechende Wahl der Randpunkte beliebig klein machen. Ist weiter für  $z \in i_\nu$ :  $\lim_{z \rightarrow \infty} \arg z = \varphi$ , dann existiert für jeden abgeschlossenen Bereich

in  $\mathfrak{R}_u$  der Ausdruck

$$\min \Re (c_{0\infty}(u) e^{i\varphi(\gamma_\infty+1)}) = c.$$

Da  $\Re (c_{0\infty}(u_0) e^{i\varphi(\gamma_\infty+1)}) > 0$ , ist für eine hinreichend kleine, abgeschlossene Umgebung von  $u = u_0$  der Wert von  $c > 0$ . Auf diese Umgebung  $U$  beschränken wir die Variable  $u$  und betrachten die Funktion

$$Y(z, u) = y(z, u) \exp \left\{ \frac{c}{2} |z|^{\gamma_\infty+1} \right\}.$$

Sie ist in der Umgebung  $U$  regulär und für alle diese  $u$ -Werte bei beliebigem  $z \in i$ , dem Betrage nach beschränkt, so daß kommt:

$$\left| y(z, u) \exp \left\{ \frac{c}{2} |z|^{\gamma_\infty+1} \right\} \right|_{\substack{u \in U \\ z \in i}} < M$$

und wegen der Regularität ferner:

$$\left| \frac{Y(z, u) - Y(z, u_0)}{u - u_0} \right| < M'.$$

Weil aber

$$\int_{i_r} \left| \frac{y(z, u) - y(z, u_0)}{u - u_0} \right| |dz| = \int_{i_r} \left| \frac{Y(z, u) - Y(z, u_0)}{u - u_0} \right| \cdot \exp \left\{ -\frac{c}{2} |z|^{\gamma_\infty+1} \right\} |dz|,$$

sieht man, daß die Summe der endlich vielen Integrale über die  $i$ , beliebig klein gemacht werden kann bei entsprechender Wahl der Begrenzungspunkte der  $i$ . Nach deren Festlegung besitzt  $\mathfrak{G}_1$  eine bestimmte Länge. Weil  $y(z, u)$  in  $U$  regulär ist, kann der Ausdruck

$$\left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{u=u_0} - \frac{y(z, u) - y(z, u_0)}{u - u_0}$$

für  $z \in \mathfrak{G}_1$  beliebig klein gemacht werden durch entsprechende Beschränkung von  $u$  innerhalb  $U$ . Damit wird aber die rechte Seite der Ausgangsungleichung beliebig klein, weil noch  $\varepsilon(u) \rightarrow 0$  mit  $u \rightarrow u_0$  gilt; d. h. die Differentiation nach  $u$  und die Integration nach  $z$  sind vertauschbar. Wir können also schreiben, nachdem wir über die Fundamentalwege integriert haben:

$$(5) \quad \frac{d}{du} \int_{\mathfrak{E}} y_\mu(z, u) dz = \sum_{r=1}^{N_{\mathfrak{B}}} d_{r\mu}(u) \int_{\mathfrak{E}} y_r(z, u) dz; \quad \mu = 1, \dots, N_{\mathfrak{B}}.$$

Als Wegbasis wählen wir in jedem unserer drei Fälle die früher konstruierten Wege mit der in II. § 1 eingeführten Numerierung; ferner setzen wir für die Funktionen  $y_i$  voraus, daß  $y_1, \dots, y_m$  in  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{R})$  enthalten sind, während die übrigen Funktionen  $y_{m+1}, \dots, y_{N_{\mathfrak{B}}}$  der Klasse  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{R})$  entstammen und für diese Klasse eine Basis bilden. Dann bezeichnen wir:

$$(6) \quad w_{\mu r} = \int_{\mathfrak{E}_\mu} y_r(z, u) dz,$$

womit wir (5) schreiben können:

$$(5') \quad \frac{d w_{\mu r}}{du} = \sum_{\lambda=1}^{N_{\mathfrak{B}}} w_{\mu \lambda} d_{\lambda r}(u)$$

oder in Matrizenschreibweise:

$$(5'') \quad \frac{d \mathfrak{B}}{du} = \mathfrak{B} \mathfrak{D}(u); \quad \mathfrak{B} = (w_{\mu r}(u)), \quad \mathfrak{D}(u) = (d_{\mu r}(u)).$$

Wir behaupten:  $\mathfrak{B}$  ist Integralmatrix von (5''), d. h.  $|\mathfrak{B}|$  verschwindet nicht identisch.



Die Spalten der Matrix  $\mathfrak{B}$  bilden die Basis einer linearen Mannigfaltigkeit  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  von Funktionssystemen, deren Koeffizienten dem Bereich  $\mathfrak{K}$  entnommen sind. Die Elemente von  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  haben die Gestalt:

$$(8) \quad \mathfrak{f}(u) = \mathfrak{B} \mathfrak{d}(u)$$

$$\text{mit } \mathfrak{d}(u) = \begin{pmatrix} d_1(u) \\ \vdots \\ d_{N_{\mathfrak{B}}}(u) \end{pmatrix}, \quad d_{\mu}(u) \in \mathfrak{K}.$$

Wegen (5'') ist mit  $\mathfrak{f}(u)$  auch  $\frac{d\mathfrak{f}(u)}{du}$  Element von  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$ . Trotzdem liegt noch keine Klasse vor, da wir unter diesen allgemeinen Verhältnissen nicht auf das Vorhandensein von Umlaufmatrizen (Monodromiegruppe) schließen können.

Nach Satz 2 ist es belanglos, welche Basis von  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$  man für die Gewinnung von  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  zugrunde legt; oder im Hinblick auf das entstehende Differentialsystem: verschiedene Basen von  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$  liefern stets nur Differentialsysteme derselben Art. Damit ist der Klasse  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$  die lineare Mannigfaltigkeit  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  eindeutig zugeordnet. SCHMIDT [5] konnte für seinen Fall  $\gamma_0 = \dots = \gamma_n = 1, \gamma_{\infty} = -1$ , zeigen, daß es sich hier um Klassen von RIEMANN'schen Funktionssystemen handelt, wenn man  $\mathfrak{K}$  als Gesamtheit der rationalen Funktionen wählt; in unserem allgemeinen Fall dagegen erkennt man leicht, daß es sich nicht um Funktionssysteme handeln kann, die nur Stellen der Bestimmtheit aufweisen: es müssen ja nicht einmal die Elemente von  $\mathfrak{K}$  nur Stellen der Bestimmtheit aufweisen. Aber selbst, wenn man bei Vorhandensein von Exponentialfaktoren den zu SCHMIDT analogen Fall untersucht, erhält man noch Stellen der Unbestimmtheit, wie sich noch beim Beweis von Satz 4 ergeben wird.

**Satz 3:** Die lineare Mannigfaltigkeit  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  ist der Klasse  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$  eindeutig zugeordnet; sie enthält mit jedem Element auch dessen Ableitung. Im allgemeinen weisen die Funktionssysteme von  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  auch Stellen der Unbestimmtheit auf.

Nunmehr wollen wir uns bei der Wahl von  $W(z, u)$  auf bestimmte Spezialfälle beschränken, die uns garantieren, daß jedes Differentialsystem der Art eindeutige Koeffizientenfunktionen besitzt. Das hat auch eine gewisse Einschränkung des Bereiches  $\mathfrak{K}$  zur Folge. Es möge gelten:

1. die Elemente von  $\mathfrak{K}$  sind in dem zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{G}$  eindeutig und regulär bis auf isolierte Singularitäten,

2. die Koeffizienten der Polynome  $f_{\varrho}(z, u)$ ,  $\varrho = 0, \dots, r$ , sind in  $\mathfrak{K}$  enthalten, ebenso die Funktionen  $c_{\mu\nu}(u)$ ,

3. wir wählen als Basisfunktion:

$$(9) \quad W(z, u) = \prod_{\varrho=1}^r f_{\varrho}(z, u)^{*} \exp \sum_{\varrho=1}^r g_{\varrho}(z, u) \cdot f_{\varrho}(z, u)^{-j_{\varrho}^{*}+1},$$

wobei  $g_{\varrho}(z, u)$  Polynom in  $z$  mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{K}$  ist. Bilden wir mit dieser Basisfunktion unter Zugrundelegen von  $\mathfrak{K}$  die Moduln  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$  bzw.  $\kappa_{\mathfrak{B}}(u; \mathfrak{K})$ , so gilt wieder Satz 1, wie man ohne weiteres einsieht. Doch gelingt es, über Satz 1 hinaus zu zeigen, daß die Reduktionskoeffizienten sogar eindeutige Funktionen sind.

Sei  $y_1, \dots, y_{N_2}$  eine Basis von  $\kappa_2(u; \mathfrak{K})$ , deren Elemente dieser Klasse entnommen sind. Dann ist für eine beliebige Klassenfunktion

$$y = \sum_{r=1}^{N_2} d_r(u) y_r(z, u) + \frac{d}{dz} F(z, u).$$

Die Reduktionskoeffizienten gehören dabei dem Bereich

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}, z_r(u), \zeta_\mu(u))$$

an;  $\mathfrak{K}_1$  soll die in § 1 festgelegten Eigenschaften besitzen. Um nachzuweisen, daß die  $d_r(u)$  eindeutige Funktionen sind, haben wir zu zeigen, daß sie bei Umlaufen jedes beliebigen, ganz in  $\mathfrak{G}$  gelegenen und geschlossenen (hier: Anfangs- und Endpunkt fallen zusammen) Weges  $\mathfrak{U}$  in sich übergehen. Sei also  $\mathfrak{U}$  ein Weg der angegebenen Art.  $\mathfrak{U}$  soll weiter so beschaffen sein, daß die  $z_r(u)$ ,  $\zeta_\mu(u)$ ,  $c_{\mu\sigma}(u)$  längs  $\mathfrak{U}$  endlich bleiben. Dann beschränken wir  $z$  auf das Äußere eines Kreises der  $z$ -Ebene, der die durch  $z_r(u)$  bestimmten Bilder von  $\mathfrak{U}$  ganz in seinem Innern enthält. Beim Umlaufen von  $\mathfrak{U}$  geht  $W(z, u)$  in sich über: die Summanden im Exponenten sind ohnedies eindeutige Funktionen in  $u$ , die  $(z - z_r(u))^{a_r}$  nehmen wegen der Beschränkung von  $z$  keine multiplikativen Faktoren auf, und es permutieren sich beim Umlauf längs  $\mathfrak{U}$  höchstens diejenigen  $z_r(u)$ , die zum selben Polynom  $f_\ell(z, u)$  gehören; damit werden aber die Funktionen  $y, y_1, \dots, y_{N_2}$  in sich übergeführt. Gehen gleichzeitig die  $d_r$  in die  $d_r^*$  über, so folgt:

$$\sum_{r=1}^{N_2} \{d_r(u) - d_r^*(u)\} y_r(z, u) = 0,$$

woraus sich wegen der Kongruenzunabhängigkeit der  $y_i$  die Eindeutigkeit der  $d_r(u)$  ergibt.

Legt man für  $\mathfrak{K}$  speziell den Bereich der rationalen Funktionen zugrunde, dann folgt, daß die Reduktionskoeffizienten eindeutige Funktionen sind, die sich aus gewissen algebraischen Funktionen rational zusammensetzen; da aber eine eindeutige algebraische Funktion sogar rational ist, werden in diesem Fall die Reduktionskoeffizienten rationale Funktionen in  $u$ .

Bekanntlich liegen, wenn wie hier die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{D}(u)$  des Differentialsystems eindeutig ist im Gebiet  $\mathfrak{G}$ , Umlaufsmatrizen vor. Außerdem sind alle Funktionssysteme von  $k_2(\mathfrak{K})$  kogredient, d. h. ein Umlauf längs eines bestimmten geschlossenen Weges  $\mathfrak{U}$  bewirkt für jedes Funktionssystem von  $k_2(\mathfrak{K})$  dieselbe Substitution. In diesem Fall heißt aber die lineare Mannigfaltigkeit des obigen Typs eine Klasse.

**Satz 4:** Wählt man (9) als Basisfunktion, dann besitzen die aus  $\kappa_2(u; \mathfrak{K})$  entspringenden Differentialsysteme der Art in  $\mathfrak{G}$  eindeutige Koeffizientenfunktionen, die dem Bereiche  $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}, z_r(u), \zeta_\mu(u))$  entnommen sind; ist  $\mathfrak{K}$  speziell identisch mit der Gesamtheit der rationalen Funktionen, so sind die Koeffizientenfunktionen der Differentialsysteme rational in  $u$ . Der Modul  $k_2(\mathfrak{K})$  bildet eine Klasse, deren Elemente im allgemeinen Stellen der Unbestimmtheit aufweisen.

Wir haben zu Satz 4 nur noch zu zeigen, daß die Funktionssysteme im allgemeinen Stellen der Unbestimmtheit besitzen. Dazu genügt es, nachzuweisen, daß im einfachsten Fall, der durch die Menge der rationalen Funktionen als  $\mathfrak{K}$  gegeben ist, die Funktionssysteme Stellen der Unbestimmtheit aufweisen.



Zu diesem Zweck betrachten wir die Klassenfunktion

$$e^{u\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)}.$$

Durch die Transformation  $\zeta = \frac{z}{1+z}$  geht

$$\int_{\mathfrak{C}'} \frac{1}{(z+1)^2} e^{u\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)} dz$$

über in

$$e^{-\frac{3}{2}u} \int_{\mathfrak{C}'} e^{u\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta - \frac{1}{2}}\right)} d\zeta$$

Verhält sich also  $\int_{\mathfrak{C}'} e^{u\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta - \frac{1}{2}}\right)} d\zeta$  in  $u = \infty$  bestimmt, so gilt dies sicher

nicht mehr für das andere Integral. Damit ist bewiesen, daß wir es beim Auftreten exponentieller Singularitäten im allgemeinen mit „Nicht-RIEMANNschen“ Systemen zu tun haben, d. h. mit Systemen, welche auch Stellen der Unbestimmtheit enthalten.

Zum Abschluß dieses Paragraphen leiten wir die allgemeine Form der Matrizen der Monodromiegruppe von  $k_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{K})$  her. Sei also  $\Theta$  der Operator der analytischen Fortsetzung. Dann gilt:

$$(10) \quad \Theta \mathfrak{B} = \mathfrak{S} \mathfrak{B}.$$

Nach der von NEKRASSOFF [2] angegebenen Methode erhält man: durchläuft  $u$  einen geschlossenen Weg, der ganz im Innern von  $\mathfrak{G}$  liegt, so erfahren die Fundamentalwege gewisse Deformationen. Zur Reduktion der deformierten Wege benötigt man: für

- I. 1.  $\Theta(z_0, \zeta_{\mu_1}^+(u), z_0)$  nur den Weg  $(z_0, \zeta_{\mu_2}^+(u), z_0)$ , wenn  $\zeta_{\mu_1}(u)$  in  $\zeta_{\mu_2}(u)$  übergeht,
2.  $\Theta(z_1^+(u), z_1^+(u), z_1^-(u), z_1^-(u))$  im allgemeinen die Wege  $(z_r^+(u), z_1^+(u), z_r^-(u), z_1^-(u))$ ,  $(z_0, \zeta_{\mu}^+(u), z_0)$
3.  $\Theta \mathfrak{C}_{r_1}^{(\mu)}$ ,  $\mu > 1$ ,  $r = 0, \dots, n$  die Wege  $\mathfrak{C}_{r_2}^{(\mu)}$ ,  $\mu > 1$ , wenn  $z_{r_1}(u)$  in  $z_{r_2}(u)$  übergeht,
4.  $\Theta \mathfrak{C}_{\infty}^{(\mu)}$ ,  $\mu > 1$  die Wege  $\mathfrak{C}_{\infty}^{(\mu)}$ ,  $\mu > 1$ .

Dazu kommen noch:

- II. 1.  $\Theta(z_1(u), z_1^+(u), z_1(u))$  im allgemeinen alle im Endlichen gelegenen Wege
2.  $\Theta(z_1(u), z_1(u))$  im allgemeinen alle im Endlichen gelegenen Wege
- III. 1.  $\Theta(\infty, z_1^+(u), \infty)$  im allgemeinen alle Wege
2.  $\Theta(\infty, z_1(u))$  im allgemeinen alle Wege

I. 1. ist trivial, weil man den ganzen Weg ersetzen kann durch einen hinreichend kleinen Kreis; für I. 2. benötigt man die  $\mathfrak{C}_r^{(\mu)}$ ,  $\mu > 1$ , nicht, weil





Teilmatrix ist selbst wieder reduzibel, da sich die Wege  $(z_0, \zeta_\mu^+(u), z_0)$  untereinander transformieren, die zweite zerfällt in so viele Bestandteile als  $\nu$  mit  $\gamma_r^* > 1$  vorhanden sind; diese wieder und die Transformationsmatrix der  $(z_0, \zeta_\mu^+(u), z_0)$  und die der  $\mathbb{C}_\infty^{(\mu)}$  weisen in jeder Zeile und Spalte genau ein von 0 verschiedenes Element auf. Im Fall II. haben wir es gleichfalls mit zerfallenden Matrizen zu tun: sie zerfallen in den von den  $\mathbb{C}_\infty^{(\mu)}$  herrührenden Teil und eine reduzible Restmatrix. III. dagegen liefert nur noch reduzible Matrizen.

## § 2. Die zu $k_0(\mathfrak{K})$ komplementäre Klasse $\check{k}_0(\mathfrak{K})$ .

Wenn wir im folgenden jeweils  $u$  auf eine hinreichend kleine Umgebung von  $u_0$  beschränken, werden die in Satz 2I—2III in II. aufgestellten Wegsysteme noch Basen für die geschlossenen Wege bilden und die in diesen Sätzen angegebenen Überkreuzungseigenschaften aufweisen. Dann werden aber auch noch die Periodenrelationen der Sätze 3 gelten mit den entsprechenden Bemerkungen von II. § 4 über den Fall  $\alpha_\infty = 0$ . Wegen des Bestehens der Periodenrelationen im Kleinen können wir diese Relationen auch bei unseren Umläufen in der  $u$ -Ebene analytisch fortsetzen, wobei sie erhalten bleiben.

Als Basis für die Funktionen der Klasse  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$  wählen wir:

$$(14) \quad \begin{aligned} & \check{C}_0^{(1)}(u) \mathfrak{E}^{(1)}(z, z_1(u)), \dots, \check{C}_0^{(n_1)}(u) \mathfrak{E}^{(1)}(z, z_{n_1}(u)); \dots; \\ & \check{C}_0^{(1)}(u) \mathfrak{E}^{(\gamma_r^*)}(z, z_1(u)), \dots, \check{C}_0^{(n_1)}(u) \mathfrak{E}^{(\gamma_r^*)}(z, z_{n_1}(u)); \\ & \dots \dots \dots \check{C}_0^{(n_1 + \dots + n_{r-1} + 1)}(u) \mathfrak{E}^{(1)}(z, z_{n_1 + \dots + n_{r-1} + 1}(u)), \dots, \\ & \check{C}_0^{(n+1)}(u) \mathfrak{E}^{(\gamma_r^*)}(z, z_{n+1}(u)); \check{C}_0^{(\infty)}(u) \mathfrak{E}^{(p)}(z, a_\infty), \dots, \check{C}_0^{(\infty)}(u) \mathfrak{E}^{(\gamma_\infty + p)}(z, a_\infty). \end{aligned}$$

Die Funktionen des Systems (14) gehören im allgemeinen nicht der Klasse  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$  an, weil die  $z_r(u)$  im allgemeinen nicht in  $\mathfrak{K}$  enthalten sind. Wenn man jedoch auf die Definition der Elementarfunktionen zurückgreift, erkennt man, daß z. B. in

$$\{\check{C}_0^{(1)}(u) \mathfrak{E}^{(1)}(z, z_1(u)) + \dots + \check{C}_0^{(n_1)}(u) \mathfrak{E}^{(1)}(z, z_{n_1}(u))\}$$

der Faktor von  $W(z, u)$  in den  $z_1(u), \dots, z_{n_1}(u)$  symmetrisch ist, so daß diese Funktion in  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$  enthalten ist. Das liefert uns ein Mittel, von (14) zu einem äquivalenten System überzugehen, dessen Elemente  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(r)}$  der Klasse  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$  entnommen sind. Aus diesen Elementen bauen wir durch Integration über die Wege der Sätze 3 in II. die Matrix

$$\tilde{\mathfrak{B}} = (\tilde{w}_{\mu\nu}) = \left( \int_{\epsilon_\mu} \tilde{\mathfrak{E}}^{(\nu)} dz \right)$$

auf. Es soll nun sein, wenn

$$(\tilde{\mathfrak{E}}) = (\check{C}_0^{(1)}(u) \mathfrak{E}^{(1)}(z, z_1(u)), \dots, \check{C}_0^{(\infty)}(u) \mathfrak{E}^{(\gamma_\infty + p)}(z, a_\infty))$$

und

$$(15) \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_1 & & & \\ & \mathfrak{z}_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{z}_1 \\ 0 & & & & \mathfrak{z}_1 \\ & & & & & \mathfrak{z}_1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \mathfrak{z}_1 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

mit

$$\mathfrak{Z}_r = \begin{pmatrix} 1, z_{n_0} + \dots + z_{n_{r-1}} + 1(u), \dots, z_{n_0}^{n_r-1} + \dots + z_{n_{r-1}}^{n_r-1} + 1(u) \\ \dots \\ 1, z_{n_0} + \dots + z_{n_r}(u), \dots, z_{n_0}^{n_p-1} + \dots + z_{n_r}(u) \end{pmatrix}, \quad n_0 = 0;$$

$$(16) \quad (\tilde{\mathfrak{E}}) = (\bar{\mathfrak{E}}) \mathfrak{Z}$$

und somit:

$$(17) \quad \tilde{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{B}} \mathfrak{Z}.$$

Wie man sofort erkennt, gehören die Elemente  $(\tilde{\mathfrak{E}})$  der Klasse  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$  an; weil ferner  $|\mathfrak{Z}| \neq 0$  und die Elemente (14) eine Basis bilden, gilt dasselbe für die Elemente (16). Damit stellt auch  $\tilde{\mathfrak{B}}$  eine Basis für  $k_0(\mathfrak{K})$  dar.  $\tilde{\mathfrak{B}}$  erfährt beim Umlaufen eines geschlossenen Weges  $\Pi$  der  $u$ -Ebene eine gewisse lineare Substitution:

$$(18) \quad \Theta \tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{B}} \mathfrak{Z}.$$

Beim selben Umlauf werden die Größen  $z_r(u)$  irgendwie permutiert, und zwar immer nur diejenigen einer und derselben Teilmatrix  $\mathfrak{Z}_r$  untereinander. Für die analytische Fortsetzung der Matrix  $\mathfrak{Z}$  gilt also:

$$(19) \quad \Theta \mathfrak{Z} = \mathfrak{P} \mathfrak{Z},$$

wobei  $\mathfrak{P}$  eine gewisse Permutationsmatrix ist. Setzen wir jetzt die rechte Seite von (17) längs  $\Pi$  analytisch fort, so erhalten wir:

$$(20) \quad \Theta \tilde{\mathfrak{B}} = \Theta \bar{\mathfrak{B}} \cdot \Theta \mathfrak{Z} = \Theta \bar{\mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{P} \mathfrak{Z},$$

woraus durch Vergleich mit (18) wegen  $|\mathfrak{Z}| \neq 0$  folgt:

$$(21) \quad \Theta \bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{B}} \mathfrak{P}^T.$$

Damit haben wir die analytische Fortsetzung der Matrix  $\bar{\mathfrak{B}}$  gewonnen.

Sei nun  $\alpha_\infty$  von 0 verschieden. Wir schneiden dann die singulären Punkte der  $\mathfrak{E}^{(r)}$ ,  $d\mathfrak{F}^{(r)}$  und die  $e'_\sigma$  aus der Ebene aus als eventuell singuläre Punkte der Integralmatrix. Wir betrachten nunmehr die komplementäre Klasse  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K})$ . Wie in II. § 4 führen wir wieder die  $d\mathfrak{F}^{(*)}$  ein und setzen:

$$\bar{d}\mathfrak{F}^{(\mu+1)}(x, z_r(u)) = -C_{\alpha}^{(r)}(u) \sum_{\lambda=0}^{\gamma_r - \mu - 1} c_{\lambda r}(u) d\mathfrak{F}^{(*)^{(\gamma_r - \mu - \lambda)}}(x, z_r(u));$$

$$\bar{d}\mathfrak{F}^{(\mu+1)}(x, \alpha_\infty) = C_{\alpha}^{(\infty)}(u) \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty + p - \mu - 2} c_{\lambda \infty}(u) d\mathfrak{F}^{(*)^{(\gamma_\infty - \mu - \lambda)}}(x, \alpha_\infty).$$

Auch mit diesen Differentialen wird der Rang von  $(\int_{\mu} \bar{d}\mathfrak{F}^{(r)})$  gleich  $N_0$ . Bei der analogen Anordnung wie in (14) setzen wir

$$(\bar{d}\mathfrak{F}) = (\bar{d}\mathfrak{F}^{(1)}(x, z_1(u)), \dots, \bar{d}\mathfrak{F}^{(\gamma_\infty - p + 2)}(x, \alpha_\infty))$$

und führen die Transformation mit dem obigen  $\mathfrak{Z}$  durch:

$$(22) \quad (d\tilde{\mathfrak{F}}) = (\bar{d}\mathfrak{F}) \mathfrak{Z},$$

weil wie oben die  $\bar{d}\mathfrak{F}^{(r)}$  im allgemeinen nicht in der Klasse enthalten sind. Man erkennt wieder ohne Schwierigkeiten, daß die  $d\tilde{\mathfrak{F}}^{(*)}$  der Klasse  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K})$  an-

gehören. Damit haben wir zu der Basis (14) und der Wegbasis die gemäß Satz 5 in II. zugeordnete Basis von Differentialen bestimmt; ebenso denken wir uns die nach diesem Satz zugeordnete Wegbasis  $\mathfrak{C}_r^{(u)}$  gegeben. Man erhält dann auf dem gleichen Weg wie bei den Elementarfunktionen die analytische Fortsetzung der Matrix  $\mathfrak{B} = (\bar{v}_{\mu\nu}) = (\int_{\mathfrak{C}_\mu} d\bar{\mathfrak{F}}^{(\nu)})$  zu

$$(23) \quad \Theta \bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \bar{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}^T,$$

wenn  $\mathfrak{B}$  das Element der Monodromiegruppe für die  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K})$  zugeordnete Klasse  $k'_0(\mathfrak{K})$  ist, das den Umlauf  $\mathfrak{U}$  beschreibt. Es gilt nun

$$(24) \quad \bar{\mathfrak{B}} \cdot \bar{\mathfrak{B}}^T = \mathfrak{E}.$$

Weil die Periodenrelationen bei analytischer Fortsetzung erhalten bleiben, finden wir schließlich:

$$\mathfrak{E} = \Theta(\bar{\mathfrak{B}} \cdot \bar{\mathfrak{B}}^T) = \Theta \bar{\mathfrak{B}} \cdot \Theta \bar{\mathfrak{B}}^T = \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{B} \bar{\mathfrak{B}}^T \mathfrak{B}^T = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^T$$

oder

$$(25) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}.$$

Das besagt aber, daß die Klasse  $k'_0(\mathfrak{K})$  zu  $k_0(\mathfrak{K})$  komplementär ist. Damit ist der Fall  $\alpha_\infty \neq 0$  geklärt.

Sei  $\alpha_\infty = 0$ . Dann wählen wir an Stelle von  $\alpha_0$  den neuen Exponenten  $\alpha_0 + \varepsilon$  mit hinreichend kleinem, positivem  $\varepsilon$ . Jetzt verschwindet das neue  $\alpha_\infty$  nicht mehr. Die für  $\varepsilon \neq 0$  zu  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K})$  komplementäre Klasse bezeichnen wir mit  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K}; \varepsilon)$ , so daß  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K}; 0) = \mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K})$ . In der Klasse  $\mathfrak{K}_0(u; \mathfrak{K}; \varepsilon)$  kann man die Reduktion wieder durchführen; da die Reduktionskoeffizienten für jede reguläre Stelle unabhängig von den speziellen Werten der  $\alpha_r$  existieren, kann man nachträglich den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  durchführen. Gleichzeitig kann man nach der Integration über die Fundamentalwege den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  mit der Integration vertauschen. Diese Vertauschbarkeit ist für die ganz im Endlichen liegenden Wege infolge der gleichmäßigen Konvergenz der Integranden sicher erfüllt. Wir wollen sie auch für diejenigen Fundamentalwege zeigen, welche  $\alpha_\infty$  enthalten. Dabei gehen wir wie bei einer ähnlichen Frage in § 1 vor. Drücken wir die Abhängigkeit von  $y(z, u)$  von  $\alpha_0$  durch die Schreibweise  $y(z, u; \alpha_0)$  aus, dann wird mit den dortigen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathfrak{C}_1} y(z; u; \alpha_0 + \varepsilon) dz - \int_{\mathfrak{C}_1} y(z; u; \alpha_0) dz \right| \\ & \leq \int_{\mathfrak{C}_1} |y(z; u; \alpha_0 + \varepsilon) - y(z; u; \alpha_0)| dz + \sum_r \int_{\mathfrak{C}_r} |\dots| |dz|. \end{aligned}$$

Da  $y(z, u; \alpha_0)$ ,  $y(z, u; \alpha_0 + \varepsilon)$  den gleichen Exponentialfaktor aufweisen, kann  $\int_{\mathfrak{C}_1} |y(z; u; \alpha_0 + \varepsilon) - y(z; u; \alpha_0)| |dz|$  durch entsprechende Wahl der Begrenzungspunkte beliebig klein gemacht werden. Führt man noch die früher angegebene Abschätzung für  $\int_{\mathfrak{C}_1} |\dots| |dz|$  ein, so hat man die Vertauschbarkeit bewiesen.

Ebenso kann die Differentiation nach  $u$  und der Grenzprozeß vertauscht werden, da alle beteiligten Funktionen analytisch in den  $\alpha_r$  sind. Da die Reduktionskoeffizienten nach Satz 4 für  $\varepsilon \neq 0$  eindeutig sind, bleiben sie es auch noch im Limes. Damit sehen wir aber, daß die Spalten von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mathfrak{B}}$$

die Basis einer Klasse über dem Funktionenbereich  $\mathfrak{K}$  bilden. Daß die durch Grenzübergang entstehende Klasse  $k'_0(\mathfrak{K})$  dann wieder zur Klasse  $k_0(\mathfrak{K})$  komplementär ist, sieht man dadurch, daß man zuerst alles für  $\varepsilon \neq 0$  diskutiert und dann den Grenzübergang durchführt, von dem die Gültigkeit der Relationen nicht berührt wird. Damit haben wir bewiesen:

**Satz 6:** Ist  $\alpha_\infty \neq 0$ , dann sind die den Klassen  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$ ,  $\check{\kappa}_0(u; \mathfrak{K})$  zugeordneten Klassen  $k_0(\mathfrak{K})$ ,  $k'_0(\mathfrak{K})$  zueinander komplementär, wenn man die Wege für  $\check{\kappa}_0(u; \mathfrak{K})$  zu dem in den Sätzen 3 in II. verwendeten Wegsystem gemäß Satz 5 in II. bestimmt. Erhalten wir jedoch  $\alpha_\infty = 0$ , dann existiert über  $\mathfrak{K}$  eine Klasse  $\kappa_0(u; \mathfrak{K}; \varepsilon)$  derart, daß die den Klassen  $\kappa_0(u; \mathfrak{K})$ ,  $\check{\kappa}_0(u; \mathfrak{K}; \varepsilon)$  nach dem Grenzübergang zugeordneten Klassen  $k_0(\mathfrak{K})$ ,  $k'_0(\mathfrak{K})$  zueinander komplementär sind, wenn man die Wegwahl für  $\check{\kappa}_0(u; \mathfrak{K}; \varepsilon)$  gemäß Satz 5 in II. vornimmt und dann den obigen Grenzübergang durchführt.

In Satz 6 ist behauptet, daß die Klassen  $k_0(\mathfrak{K})$ ,  $k'_0(\mathfrak{K})$  zueinander komplementär sind. Es erhebt sich nun die Frage, zu einer festen Matrix von  $k_0(\mathfrak{K})$  die komplementäre, welche ja der komplementären Klasse angehört, zu konstruieren; oder vom Differentialsystem aus gesehen: es ist eine bestimmte Integralmatrix des adjungierten Systems anzugeben.

Es ist:

$$\begin{aligned} \Delta(z, x) = & - \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_v-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\mu} c_{\lambda v} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, z_v(u)) \right\} \times \\ (26) \quad & \times \left[ d\check{\mathfrak{F}}^{(\gamma_v-\mu)}(x, z_v(u)) - \frac{f_v^{(\gamma_v-\mu)}}{n_1} \sum_{\kappa=1}^{n_1} \frac{1}{f_\kappa^{(1)}} d\check{\mathfrak{F}}^{(1)}(x, z_\kappa(u)) \right] + \\ & + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\mu-p+1} c_{\lambda \infty} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, z_\infty) \right\} \times \\ & \times \left[ d\check{\mathfrak{F}}^{(\gamma_\infty-\mu)}(x, z_\infty) - \frac{f_\infty^{(\gamma_\infty-\mu)}}{n_1} \sum_{\kappa=1}^{n_1} \frac{1}{f_\kappa^{(1)}} d\check{\mathfrak{F}}^{(1)}(x, z_\kappa(u)) \right]. \end{aligned}$$

Wie in II. § 4 können wir nach erfolgter Integration über die in II. § 3, 4 angegebenen Wege im Fall  $\alpha_\infty = 0$  zur Grenze übergehen. Es sei:

$$(27) \quad \mathfrak{E}^{*(1)}(z, z_\kappa(u)) = \check{C}_0^{(\infty)}(u) f_\kappa^{(1)} \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\kappa^*-1} c_{\lambda \kappa} \mathfrak{E}^{(\gamma_\kappa^*-\lambda)}(z, z_\kappa(u)); \quad \kappa = 1, \dots, n_1$$

sonst:

$$\mathfrak{E}^{*(v)}(z, z_v(u)) = \check{C}_0^{(v)}(u) \times \text{Faktor von } [d\check{\mathfrak{F}}^{(v)}(x, z_v(u) - \dots] \text{ in (26)}$$

$$\begin{aligned} d\check{\mathfrak{F}}^{*(1)}(x, z_\kappa(u)) = & - C_0^{(\infty)}(u) \frac{1}{f_\kappa^{(1)}} \times \\ (28) \quad & \times \left\{ d\check{\mathfrak{F}}^{(1)}(x, z_\kappa(u)) - \frac{f_\kappa^{(1)}}{n_1} \sum_{\lambda=1}^{n_1} \frac{1}{f_\lambda^{(1)}} d\check{\mathfrak{F}}^{(1)}(x, z_\lambda(u)) \right\}; \quad \kappa = 1, \dots, n_1 \\ & \text{sonst:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\check{\mathfrak{F}}^{*(v)}(z, z_v(u)) = & \delta_v C_0^{(v)} \times \\ & \times \left\{ d\check{\mathfrak{F}}^{(v)}(x, z_v(u)) - \frac{f_v^{(v)}}{n_1} \sum_{\lambda=1}^{n_1} \frac{1}{f_\lambda^{(1)}} d\check{\mathfrak{F}}^{(1)}(x, z_\lambda(u)) \right\}; \quad \delta_v = \begin{cases} -1 & v \neq \infty \\ +1 & v = \infty \end{cases} \end{aligned}$$



Bedingung für die Exponenten fallen lassen können. Dann müssen wir uns jedoch vergegenwärtigen, daß ein ganzzahliger Exponent in unseren allgemeinen Betrachtungen dem Falle eines verschwindenden reduzierten Exponenten entspricht.

Für die drei folgenden Beispiele wählen wir den Bereich der rationalen Funktionen als  $\mathfrak{R}$  und die ganze Ebene als  $\mathfrak{G}$ .

#### A. Das HERMITESCHE Differentialsystem.

Die Basisfunktion einer Klasse  $\kappa_0(u; \mathfrak{R})$  sei:

$$(30) \quad W(z, u) = z^\alpha \exp \left\{ u^n - \left( u + \frac{1}{z} \right)^n \right\} = z^\alpha \exp \left\{ -n u^n \sum_{\lambda=1}^n \binom{n-1}{\lambda-1} \frac{1}{\lambda (u z)^\lambda} \right\}.$$

Als Basis für  $\kappa_0(u; \mathfrak{R})$  legen wir fest:

$$(31) \quad \mathfrak{E}_r(z, u) = \frac{1}{z^r} W(z, u), \quad r = 1, \dots, n,$$

und erhalten durch leichte Rechnung:

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial u} &= - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} u^{n-\lambda-1} \mathfrak{E}_{\lambda+1} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial u} &= (\alpha + 2 - r) \mathfrak{E}_{r-1} + n u^{n-1} \mathfrak{E}_r, \quad r = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

so daß das Differentialsystem in Matrixschreibweise lautet:

$$(33) \quad \frac{d \mathfrak{w}}{du} = \mathfrak{w} \begin{pmatrix} 0 & , & \alpha & , & 0 & , & \dots & , & 0 \\ -n \binom{n-1}{1} u^{n-2} & , & n u^{n-1} & , & \alpha - 1 & , & \dots & , & 0 \\ -n \binom{n-1}{2} u^{n-3} & , & 0 & , & n u^{n-1} & , & \dots & , & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -n \binom{n-1}{n-2} u & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & \alpha + 2 - n \\ -n \binom{n-1}{n-1} u^0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & n u^{n-1} \end{pmatrix}$$

Als Wegsystem legen wir zugrunde die Wege  $\mathfrak{E}_\lambda = \mathfrak{E}_0^{(\lambda+1)}$   $\lambda = 1, \dots, n$ . Das gemäß Satz 5, II., zugeordnete Wegsystem für die komplementäre Klasse ist, wie man sich leicht überzeugt:

$$\check{\mathfrak{E}}_\lambda = \frac{1}{1 - A_0^{-1}} \{ \check{\mathfrak{E}}_0^{(\lambda+1)} + \dots + \check{\mathfrak{E}}_0^{(n+1)} + A_0^{-1} \check{\mathfrak{E}}_0^{(2)} + \dots + A_0^{-1} \check{\mathfrak{E}}_0^{(\lambda)} \}, \quad \lambda = 1, \dots, n.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} d\check{\mathfrak{E}}^{*(\mu+1)} &= - \sum_{\lambda=0}^{n-\mu} c_{\lambda 0} \times \\ &\times \left\{ d\check{\mathfrak{E}}^{*(n+1-\mu-\lambda)}(x, a_0) - \frac{f_0^{(n+1-\mu-\lambda)}}{f_0^{(1)}} d\check{\mathfrak{E}}^{(1)}(x, a_0) \right\}, \quad \mu = 0, \dots, n, \end{aligned}$$

so folgt aus

$$\Delta(z, x) \equiv \mathfrak{E}^{(1)}(z, a_0) d\check{\mathfrak{E}}^{*(1)}(x, a_0) + \dots + \mathfrak{E}^{(n)}(z, a_0) d\check{\mathfrak{E}}^{*(n)}(x, a_0),$$

daß die beiden Matrizen

$$(34) \quad \left( \int_{\mathfrak{C}_\mu} \mathfrak{E}^{(r)} dz \right), \quad \left( \int_{\check{\mathfrak{C}}_\mu} d\check{\mathfrak{E}}^{*(r)} \right)$$

zueinander komplementär sind; setzt man noch

$$w_{\mu\nu}(u; \alpha) = \int_{\zeta_\mu} \mathfrak{E}^{(\nu)}(z, u) dz,$$

so erkennt man nach leichter Rechnung die Richtigkeit des Satzes:

**Satz 7:** Ersetzt man in der durch bestimmte Integrale dargestellten Lösungsmatrix  $(w_{\mu\nu}(u; \alpha))$  des HERMITESCHEN Differentialsystems den Parameter

$\alpha$  durch  $-\alpha$  und die Variable  $u$  durch  $\varepsilon u$  mit  $\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{n}}$ , so ist die Matrix

$$(w_{\mu\nu}(u \varepsilon; -\alpha)) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \varepsilon^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{-(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{n-1}{n-1} u^{n-1}, \binom{n-1}{n-2} u^{n-2}, \dots, \binom{n-1}{0} u^0 \\ \binom{n-1}{n-2} u^{n-2}, \binom{n-1}{n-3} u^{n-3}, \dots, 0 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{0} u^0, \dots, 0 \end{pmatrix}$$

Integralmatrix des adjungierten Differentialsystems.

## B. Das BESSELSche Differentialsystem.

Wir setzen

$$(35) \quad W(z, u) = z^{-\alpha} \exp \frac{u}{n} \left\{ \frac{n-1}{z} + \eta z^{n-1} \right\}, \quad \eta = \pm 1,$$

und weiter als Basis

$$(36) \quad \mathfrak{E}_\nu(z, u) = z^{v-2} W(z, u), \quad v = 1, \dots, n.$$

Hieraus finden wir sehr einfach

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial u} &= -\frac{\alpha}{u} \mathfrak{E}_1 + \eta \mathfrak{E}_n \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_\nu}{\partial u} &= \mathfrak{E}_{\nu-1} + \frac{1}{u} \cdot \frac{\alpha+1-\nu}{n-1} \mathfrak{E}_\nu \quad \nu = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Das führt zu der Darstellung des Differentialsystems in Matrizenschreibweise:

$$(38) \quad \frac{dw}{du} = W \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{u}, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \frac{\alpha-1}{u(n-1)}, & 1, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\alpha-2}{u(n-1)}, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \\ \eta, & 0, & 0, & \dots, & \frac{\alpha-(n-1)}{u(n-1)} \end{pmatrix}$$

Als Wegbasis legen wir die durch den Fall III in II. gegebene zugrunde. Sie enthält u. a. den einfachen Streckenzug  $\mathfrak{E}_0^{(1)}$  und den Weg  $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ , aus welchen man eine aus dem Unendlichen kommende und dorthin zurücklaufende, einfache Schleife um den Nullpunkt zusammensetzen kann. Bei Integration über diese Schleife kommt die unmittelbare Verallgemeinerung der BESSELSchen Funktionen  $J_\nu(u)$ , wie man aus einer bekannten Integraldarstellung ersieht.



Wenn wir nun wieder  $\Delta(z, u)$  betrachten, tritt in der zugehörigen Formel der Wert von  $p$  auf. Dennoch können wir ohne reduzierte Exponenten weiterrechnen, da man in den beiden Fällen ( $p = 0$  bzw.  $p = 1$ ) wieder Identitäten in  $\alpha_0$  erhält und somit nicht mehr an die reduzierten Exponenten gebunden ist.

Setzt man dann

$$d\check{\mathfrak{G}}^{*(\mu+1)}(x, \alpha_0) = - \sum_{\lambda=0}^{1-\mu} c_{\lambda 0} d\check{\mathfrak{G}}^{(2-\mu-\lambda)}(x, \alpha_0), \quad \mu = 0, 1$$

und

$$d\check{\mathfrak{G}}^{*(\mu+1)}(x, \alpha_\infty) = \sum_{\lambda=0}^{n+p-\mu-4} c_{\lambda \infty} d\check{\mathfrak{G}}^{(u-\mu-\lambda-2)}(x, \alpha_\infty), \quad \mu = p-1, \dots, n+p-4,$$

so gelangt man auf dem üblichen Weg zu

**Satz 8:** Ist  $(w_{\mu\nu}(u; \alpha))$  die durch bestimmte Integrale dargestellte Lösungsmatrix des BESSELSchen Differentialsystems, so ist mit  $\varrho = \frac{n-1}{n}$

$$(w_{\mu\nu}(-u; -\alpha)) \begin{pmatrix} \alpha, \varrho u, & 0, & \dots, & 0 \\ \varrho u, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \eta \varrho u \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0, & 0, & \eta \varrho u, & & 0 \end{pmatrix}$$

Integralmatrix des zu (38) adjungierten Differentialsystems.

### C. Das KUMMERSche Differentialsystem.

Nunmehr sei

$$(39) \quad W(z, u) = \prod_{r=1}^n (z - \alpha_r)^{\alpha_r} e^{uz}$$

und

$$(40) \quad \mathfrak{E}_r(z, u) = \frac{1}{z - \alpha_r} W(z, u), \quad r = 1, \dots, n,$$

Daraus folgt sofort:

$$(41) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial u} = \sum_{\mu=1}^n \left( a_{\mu} \delta_{\mu r} - \frac{\alpha_{\mu}}{u} \right) \mathfrak{E}_{\mu}, \quad r = 1, \dots, n,$$

so daß das Differentialsystem in Matrizenschreibweise lautet:

$$(42) \quad \frac{dW}{du} = W \begin{pmatrix} a_1 - \frac{\alpha_1}{u}, & -\frac{\alpha_1}{u}, & \dots, & -\frac{\alpha_1}{u} \\ -\frac{\alpha_2}{u}, & a_2 - \frac{\alpha_2}{u}, & \dots, & -\frac{\alpha_2}{u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_n}{u}, & -\frac{\alpha_n}{u}, & \dots, & a_n - \frac{\alpha_n}{u} \end{pmatrix}$$

Als Wegbasis legen wir gemäß Fall III., II., zugrunde die Wege

$$\mathfrak{E}_{\mu} = \mathfrak{E}_{\mu}^{(1)}, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Das komplementäre Wegsystem wird dann nach einfacher Rechnung:

$$\check{\mathfrak{E}}_1 = \frac{\check{\mathfrak{E}}_1^{(1)}}{1 - A_1}; \quad \check{\mathfrak{E}}_{\mu} = \frac{1}{1 - A_{\mu}} \{ \check{\mathfrak{E}}_{\mu}^{(1)} + (-\check{\mathfrak{E}}_{\mu-1}^{(1)}) \}, \quad \mu = 2, \dots, n.$$

Setzen wir schließlich

$$\mathfrak{E}_r(z, u) = \mathfrak{E}^{(1)}(z, \alpha_r) \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{E}_\mu} \mathfrak{E}^{(1)}(z, \alpha_r) dz = w_{\mu r}(u; a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

so finden wir wiederum den Satz:

**Satz 9:** Ist  $(w_{\mu r}(u; a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n))$  die obige durch bestimmte Integrale dargestellte Integralmatrix des verallgemeinerten KUMMERSchen Differentialsystems, so ist

$$(w_{\mu r}(-u; a_1, \dots, a_n; -\alpha_1, \dots, -\alpha_n)) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Integralmatrix des adjungierten Systems.

Diese letzte Tatsache läßt sich auch direkt sehr leicht verifizieren.

#### Literaturverzeichnis.

- [1] HORN: Integration linearer Diff.glch. durch LAPLACESche Integrale und Fakultätsreihen. Jber. dtach. Math. Ver. **24**, 309—329. — [2] NEKRASSOFF: Über lineare Diff.glch., welche mittels bestimmter Integrale integriert werden. Math. Ann. **38**, 509—560. — [3] RÖHL: Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. I. und II. Math. Ann. **123**, 53—75; **124**, 187—218. — [4] SCHLESINGER: Über die hypergeometrischen Differentialsysteme. Math. Z. **28**, 504 bis 518. — [5] H. SCHMIDT: Über multiplikative Funktionen und die daraus entspringenden Differentialsysteme. Math. Ann. **105**, 325—380.

(Eingegangen am 23. März 1950)

# Ein Gitterpunktproblem.

Von

HANS-EGON RICHTER in Göttingen.

1. Im folgenden soll die Anzahl derjenigen Gitterpunkte  $(n_1, n_2)$  innerhalb der gleichseitigen Hyperbel  $uv = x$  untersucht werden, für welche  $1 \leq n_i \leq x$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n_1 n_2 \leq x$  gelten und deren Koordinaten in vorgeschriebenen Restklassen  $h_i$  modulo  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ , liegen.

Als Spezialfälle bzw. unmittelbare Folgerungen werden wir zwei bekannte Gitterpunktprobleme der Ebene sowie die Anzahl der ganzen Ideale  $\mathfrak{a}$  eines quadratischen Zahlkörpers mit  $N \mathfrak{a} \leq x$  betrachten.

Für  $q_2 = h_2 = 1$  geht unsere Frage in ein vor einiger Zeit von S. S. PILLAI<sup>1)</sup> gestelltes und kürzlich durch C. S. VENKATARAMAN<sup>2)</sup> gelöstes Problem über. Dort wird für das Fehlerglied allerdings nur die triviale Abschätzung  $O(\sqrt{x})$  gewonnen, während aus unserem Satz mit der genannten Spezialisierung folgen wird, daß der Fehlerterm dieses Problems die Abschätzung  $O\left((xq_1^{-1})^{\frac{27}{82}}\right)$  gestattet.

2. Es seien  $x$  reell,  $h_i$  und  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ , natürliche Zahlen mit

$$(1) \quad 1 \leq h_i \leq q_i, \quad i = 1, 2, \quad q_1 q_2 \leq x.$$

$$(2) \quad D(x; q_1, h_1, q_2, h_2) = \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq x \\ n_i \equiv h_i \pmod{q_i} \\ i=1,2}} 1$$

und

$$(3) \quad \psi(t) = t - [t] - \frac{1}{2}.$$

Wenn nichts anderes vermerkt ist, sei die untere Summationsgrenze stets 1. Alle auftretenden  $O$ -Konstanten sind absolut.

Lemma 1: Es seien  $\tau$  und  $w$  zwei reelle Zahlen,  $\tau > 0$ ,  $0 < w \leq 1$ . Dann ist

$$0 \leq \sum_{v \leq \tau} (v + w)^{-1} = \log \tau - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w) + w \tau^{-1} - \psi(\tau) \tau^{-1} + O(\tau^{-2}).$$

Beweis: Folgt aus der EULERSchen Summenformel unter Beachtung von<sup>3)</sup>

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( \sum_{v=0}^{\infty} (v + w)^{-s} - \frac{1}{s-1} \right) = - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(w).$$

Lemma 2: Es seien  $x, y, \omega$  reelle Zahlen,  $h$  und  $q$  natürliche Zahlen,  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ ,  $1 \leq h \leq q$  und

$$(4) \quad R(x, y; q, h; \omega) = \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv h \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n} + \omega\right),$$

<sup>1)</sup> S. S. PILLAI, J. Indian Math. Soc. 48 (1929—1930).

<sup>2)</sup> C. S. VENKATARAMAN, An order result, Math. Student 18, 19—21 (1950—1951).

<sup>3)</sup> Vgl. E. LINDELÖF, Le Calcul des Résidus, 106, (1905).



sowie

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{n_1 \leq \sqrt{\frac{x q_1}{q_1}} \\ n_1 \equiv h_1 \pmod{q_1}}} \sum_{\substack{n_2 \leq \sqrt{\frac{x q_2}{q_2}} \\ n_2 \equiv h_2 \pmod{q_2}}} 1 &= \left[ \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_1}{q_1} + 1 \right] \left[ \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_2}{q_2} + 1 \right] = \left( \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_1}{q_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} - \psi \left( \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_1}{q_1} \right) \right) \left( \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_2}{q_2} + \frac{1}{2} - \psi \left( \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_2}{q_2} \right) \right) \\
 (8) \quad &= \frac{x}{q_1 q_2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{h_2}{q_2} \right) \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \psi \left( \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_2}{q_2} \right) \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} \\
 &\quad + \left( \frac{1}{2} - \frac{h_1}{q_1} \right) \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \psi \left( \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} - \frac{h_1}{q_1} \right) \sqrt{\frac{x}{q_1 q_2}} + O(1).
 \end{aligned}$$

Verwenden wir (6) bis (8) in (5), so haben wir

$$\begin{aligned}
 D(x; q_1, h_1, q_2, h_2) &= \frac{x}{q_1 q_2} \log \frac{x}{q_1 q_2} - \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_1}{q_1} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_2}{q_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{q_1 q_2} \\
 (9) \quad &\quad - R \left( \frac{x}{q_2}, \sqrt{\frac{x q_1}{q_2}}; q_1, h_1; -\frac{h_2}{q_2} \right) \\
 &\quad - R \left( \frac{x}{q_1}, \sqrt{\frac{x q_2}{q_1}}; q_2, h_2; -\frac{h_1}{q_1} \right) + O(1).
 \end{aligned}$$

Lemma 2 liefert nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 R \left( \frac{x}{q_2}, \sqrt{\frac{x q_1}{q_2}}; q_1, h_1; -\frac{h_2}{q_2} \right) &= O(1) + O \left( \left( \frac{x}{q_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{x q_1}{q_2} \right)^{\frac{3}{4}} q_1^{-1} \right) \\
 &\quad + O \left( \left( \frac{x}{q_2} \right)^{\frac{11}{41}} \left( \frac{x q_1}{q_2} \right)^{\frac{5}{82}} \frac{16}{41} \right) = O \left( \left( \frac{x}{q_1 q_2} \right)^{\frac{27}{82}} \right),
 \end{aligned}$$

folglich aus Symmetriegründen auch

$$R \left( \frac{x}{q_1}, \sqrt{\frac{x q_2}{q_1}}; q_2, h_2; -\frac{h_1}{q_1} \right) = O \left( \left( \frac{x}{q_1 q_2} \right)^{\frac{27}{82}} \right),$$

und diese ergeben mit (9)

$$\begin{aligned}
 D(x; q_1, h_1, q_2, h_2) &= \frac{x}{q_1 q_2} \log \frac{x}{q_1 q_2} - \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_1}{q_1} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_2}{q_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{q_1 q_2} \\
 (10) \quad &\quad + O \left( \left( \frac{x}{q_1 q_2} \right)^{\frac{27}{82}} \right) \quad \text{für } q_1 q_2 \leq \frac{x}{2}.
 \end{aligned}$$

(10) gilt jedoch auch für  $\frac{x}{2} < q_1 q_2 \leq x$ . Denn beachten wir<sup>3)</sup>

$$(11) \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -C + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n} \right), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad C \text{ EULERSche Konstante,}$$

also

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_i}{q_i} \right) = -\frac{q_i}{h_i} + O(1), \quad i = 1, 2,$$

so ist hier

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{q_1 q_2} \log \frac{x}{q_1 q_2} - \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_1}{q_1} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{h_2}{q_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{q_1 q_2} &= \left( \frac{q_1}{h_1} + \frac{q_2}{h_2} \right) \frac{x}{q_1 q_2} + O(1) = \frac{x}{q_2 h_1} \\
 &\quad + \frac{x}{q_1 h_2} + O(1)
 \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> Vgl. W. MAGNUS u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze, 2. Aufl. 3 (1948).

und auch

$$\begin{aligned} D(x; q_1, h_1, q_2, h_2) &= \sum_{\substack{n_2 \leq x \\ n_2 = h_2 \pmod{q_2}}} \sum_{\substack{n_1 \leq \frac{x}{n_2} \\ n_1 = h_1 \pmod{q_1}}} 1 = \sum_{\substack{n_2 \leq \frac{x}{h_1} \\ n_2 = h_2 \pmod{q_2}}} \left[ \frac{x}{q_1 n_2} - \frac{h_1}{q_1} + 1 \right] \\ &= \left[ \frac{x}{q_2 h_1} - \frac{h_2}{q_2} + 1 \right] + \left[ \frac{x}{q_1 h_2} - \frac{h_1}{q_1} + 1 \right] + \left[ \frac{x}{q_1(q_2 + h_2)} - \frac{h_1}{q_1} \right] \\ &= \frac{x}{q_2 h_1} + \frac{x}{q_1 h_2} + O(1). \end{aligned}$$

Damit haben wir den

Satz: Es seien  $x$  reell,  $h_i$  und  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ , natürliche Zahlen,  $1 \leq h_i \leq q_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $q_1 q_2 \leq x$ . Dann gilt für  $x \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $q_1, q_2, h_1, h_2$

$$\begin{aligned} (12) \quad D(x; q_1, h_1, q_2, h_2) &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq x \\ n_i = h_i \pmod{q_i} \\ i=1,2}} 1 = \frac{x}{q_1 q_2} \log \frac{x}{q_1 q_2} \\ &\quad - \left( \frac{\Gamma'}{F} \left( \frac{h_1}{q_1} \right) + \frac{\Gamma'}{F} \left( \frac{h_2}{q_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{q_1 q_2} + O \left( \left( \frac{x}{q_1 q_2} \right)^{\frac{27}{82}} \right). \end{aligned}$$

4. Wir wollen noch zwei Spezialfälle dieses Satzes, die auf bekannte Gitterpunktprobleme der Ebene führen, betrachten.

Bemerkenswert ist in (12) die Abhängigkeit des zweiten Hauptgliedes von den Restklassen  $h_i$  modulo  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ . Daß dies aber so sein muß, zeigt sich, wenn man aus unserem Satz die Anzahl  $A(x)$  der Gitterpunkte im Kreis mit dem Radius  $\sqrt{x}$  asymptotisch bestimmen will. Mit der bekannten Formel<sup>6)</sup>

$$r_2(n) = \sum_{u^2+v^2=n} 1 = 4 \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \pmod{4}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

und (12) ergibt sich nämlich, da wegen (11)

$$\frac{\Gamma'}{F} \left( \frac{3}{4} \right) - \frac{\Gamma'}{F} \left( \frac{1}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{4} + n} - \frac{1}{\frac{3}{4} + n} \right) = \pi$$

gilt,

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{0 \leq u^2+v^2 \leq x} 1 = 1 + \sum_{n \leq x} r_2(n) = 1 + 4 \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \pmod{4}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \\ &= 1 + 4(D(x; 4, 1, 1, 1) - D(x; 4, 3, 1, 1)) = \left( \frac{\Gamma'}{F} \left( \frac{3}{4} \right) - \frac{\Gamma'}{F} \left( \frac{1}{4} \right) \right) x + O \left( x^{\frac{27}{82}} \right) \\ &= \pi x + O \left( x^{\frac{27}{82}} \right). \end{aligned}$$

Wenngleich diese Abschätzung des Fehlergliedes keineswegs trivial ist,

weiß man doch durch HUA<sup>7)</sup>, daß sie durch  $O \left( x^{\frac{13}{40}} \log^{\frac{9}{8}} x \right)$  ersetzt werden darf.

<sup>6)</sup> Vgl. E. LANDAU, Vorlesungen, I, (1927), Satz 163.

<sup>7)</sup> L.-K. HUA, The lattice points in a circle, Quart. J. of Math., Oxford, 13, 18—29 (1942).

Überdies erkennt man für das allgemeinere Problem der Anzahl der ganzen Ideale  $\mathfrak{a}$  eines quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante  $d$  mit  $N \mathfrak{a} \leq x$  mit der Abkürzung

$$-\frac{1}{|d|} \sum_{n \leq |d|} \left(\frac{d}{n}\right) \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{n}{|d|}\right) = c (= L_d(1)), \quad \left(\frac{d}{n}\right) \text{ Kroneckersymbol,}$$

leicht nach (12) die für  $|d| \leq x$  gleichmäßig in  $d$  gültige Abschätzung<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{N \mathfrak{a} \leq x} 1 &= \sum_{m \leq x} \sum_{t|m} \left(\frac{d}{t}\right) = \sum_{n \leq |d|} \left(\frac{d}{n}\right) \sum_{m \leq x} \sum_{\substack{t|m \\ t \equiv n \pmod{|d|}}} 1 = \sum_{n \leq |d|} \left(\frac{d}{n}\right) D(x; |d|, n, 1, 1) \\ &= c x + O\left(x^{\frac{27}{82}} |d|^{\frac{55}{82}}\right). \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich durch eine andere Spezialisierung, und zwar  $h_i = q_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , mit (11) die Formel für das DIRICHLETSche Teilerproblem

$$(13) \quad D(x; 1, 1, 1, 1) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = x \log x + (2C - 1)x + O\left(x^{\frac{27}{82}}\right).$$

Dies ist die schärfste bisher bekannte Abschätzung beim Teilerproblem<sup>9)</sup>. In einer demnächst erscheinenden Arbeit werde ich jedoch zeigen, daß sich der Fehlerterm in (13) zu  $O\left(x^{\frac{15}{46}} \log^{\frac{12}{23}} x\right)$  verbessern läßt.

<sup>8)</sup> Vgl. A. WALFISZ, O pewnym zagadnieniu dzielników Ramanujana, *Prace mat.-fiz.* **35**, 101—126 (1929).

<sup>9)</sup> L. W. NIELAND, Over eenige roosterpuntproblemen, *Proefschrift Groningen*, IV + 70 + III, 1 fig. Groningen, P. Noordhoff.

(Eingegangen am 2. August 1952.)

# On the curvature of level curves

by

S. VERBLUNSKY in Belfast.

§ 1. *Introduction.* Let  $\varphi(\zeta)$ , where  $\zeta = r e^{i\theta}$ , be regular inside and on the unit circle. Write

$$(1) \quad \varphi(\zeta) = \alpha + i\beta.$$

Consider the function  $w(\zeta)$ , defined to within an additive constant by the equation

$$(2) \quad w'(\zeta) = \exp \varphi(\zeta).$$

Then  $w(\zeta)$  is regular and  $w'(\zeta) \neq 0$  inside and on the unit circle. Conversely any function  $w(\zeta)$  with these properties satisfies an equation (2), with a  $\varphi(\zeta)$  which is regular inside and on the unit circle.

Consider the transformation of  $|\zeta| \leq 1$  by the function  $w = w(\zeta)$ . The image of  $r = \text{const}$  is a closed curve  $\Gamma$  (a level curve). If

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + \beta,$$

then  $\frac{d\varphi}{ds}$ , where

$$s = \int_0^\theta |w'(\zeta)| r d\theta$$

is the curvature  $K (= K(\zeta))$  of  $\Gamma$  at  $w(\zeta)$ , and

$$(3) \quad K = \frac{1}{r e^x} (1 + R \zeta \varphi').$$

Put

$$(4) \quad \delta = e^x (1 - r^2),$$

$$(5) \quad \tau = \frac{1}{2} (1 - r^2) \varphi' - \bar{\delta},$$

$$(6) \quad \varrho = |\tau|.$$

Then

$$(7) \quad \frac{1 - \varrho^2}{\delta} = e^{-x} \left[ 1 + R \zeta \varphi' - \frac{1}{4} (1 - r^2) |\varphi'|^2 \right].$$

It will save a little writing if we use the expression on the left to denote the right hand side not only when  $r < 1$ , but also when  $r = 1$ . The right hand side is then  $K(e^{i\theta})$ .

The following results were proved in a remarkable paper by E. PESCHL<sup>1</sup>).

(A) If  $k$  is a real constant, and

$$\frac{1 - \varrho^2}{\delta} \geq k$$

on the unit circle, then this inequality holds inside the unit circle.

<sup>1</sup> E. PESCHL, Math. Ann. **106**, 574—594 (1932). The propositions (A) and (B) are equivalent to the inequality (15,3) on p. 587.



(B) If  $k < 0$ , then the conclusion of (A) can be replaced by

$$2(\varrho - 1)e^{\varrho-1} \leq -k\delta$$

inside the unit circle. This is stronger than the conclusion of (A), on account of the elementary inequality

$$2(\varrho - 1)e^{\varrho-1} \geq \varrho^2 - 1.$$

In this note, I give a comparatively simple proof of (A), based on PESCHLA's method. It will be shown in § 5 that (A) implies

Theorem I: If  $K(e^{i\theta}) \geq k$ , then  $K(\beta) \geq 2k[1 + \sqrt{1 - k\delta}]^{-1}$ .

It should be remarked that, by considering the function

$$1 + R\beta\psi' - ke^\alpha,$$

which is superharmonic when  $k \geq 0$ , it follows that if  $K(e^{i\theta}) \geq k \geq 0$ , then  $K(\beta) \geq k/r$  inside the unit circle.

§ 2. *Idea of the proof.* The case  $k = 0$  of (A) follows from the case  $k < 0$ . Further, the effect of adding an arbitrary real constant to  $\alpha$  is to multiply  $\delta$  by an arbitrary positive constant without altering  $\varrho$ . We may therefore suppose in what follows that

$$(8) \quad k = \pm 1.$$

The idea of the proof is to show that if (A) is false, then there is a real number  $\lambda$  such that the function

$$(9) \quad W = 1 + \lambda\delta - \varrho^2$$

attains a positive minimum at a point  $P$ , inside the unit circle, at which  $\varrho > 0$ . A rotation  $\beta = \beta_1 e^{i\omega}$  multiplies  $\tau$  by  $e^{-i\omega}$ . We may therefore suppose that

$$(10) \quad \tau = \bar{\tau} = \varrho > 0 \quad \text{at } P.$$

With the notation

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

we shall prove, in § 4, that

$$I \quad \frac{1}{4} \Delta \delta = \frac{\delta(\varrho^2 - 1)}{(1 - r^2)^2},$$

and

$$II \quad \frac{1}{4} \Delta \varrho^2 = \frac{(1 + \lambda\delta)^2 + 1 - 2\varrho^2}{(1 - r^2)^2} \text{ at } P.$$

Then

$$\frac{1}{4} \Delta W = \frac{1}{4} (\lambda \Delta \delta - \Delta \varrho^2) = -\frac{W(2 + \lambda\delta)}{(1 - r^2)^2} < 0.$$

This contradicts the fact that  $W$  has a minimum at  $P$ .

§ 3. *Discussion of the minimum.* By hypothesis, given  $\varepsilon > 0$ , there is an  $r_\varepsilon < 1$  such that

$$\frac{1 - \varrho^2}{\delta} > k - \varepsilon, \quad (r_\varepsilon \leq r \leq 1).$$

Then

$$W > \delta(\lambda + k - \varepsilon) > 0 \quad (r_\varepsilon \leq r < 1)$$

if  $\lambda > -k + \varepsilon$  (so that, in particular,  $\lambda > -1$  (by (8))).

If (A) is false, then  $1 - k\delta - \varrho^2$  takes negative values inside the unit circle, and for some  $\lambda > -k$ , the same is true of  $W$ . Further,  $W > 0$  throughout

an annulus of the form  $r' \leq r < 1$ . If now  $\lambda$  increases, it will reach a value  $\lambda_0$  such that  $\min W = 0$ , and is attained at a point at which  $r < r'$ . By increasing  $\lambda$  still further, we may suppose that  $\min W = m$ , where

$$(11) \quad 0 < m < \min(1, 1 + \lambda_0).$$

This minimum is attained at a point  $P$  inside the unit circle. At  $P$ ,  $\varrho > 0$ . For if  $\varrho = 0$ , we would have  $m = 1 + \lambda \delta$ . If  $\lambda \geq 0$ , this contradicts (11). If  $\lambda < 0$ , then, since  $\lambda > -k$ , we have the case  $k = 1$ . We shall see in a moment that this implies  $\delta \leq 1$ . Then

$$m \geq 1 + \lambda > 1 + \lambda_0,$$

and this again contradicts (11).

To see that  $k = 1$  implies  $\delta \leq 1$  (a proof is given by PESCHL, loc. cit. 584) we observe that the hypothesis of (A) is now  $K(e^{i\theta}) \geq 1$ . But, as is well known, the condition  $K(e^{i\theta}) > 0$  implies that the image of  $|\delta| = 1$  is a simple closed convex curve. The fact that its curvature is everywhere  $\geq 1$  implies<sup>2)</sup> that it is contained in a circle, centre  $w_0$  say, of radius 1. Thus,  $|w(\delta) - w_0| \leq 1$  for  $|\delta| \leq 1$ . As a consequence of SCHWARZ's lemma<sup>3)</sup>

$$|w'(\delta)| \leq \frac{1}{1 - r^2}.$$

By (2),  $\delta \leq 1$ .

4. *Proof of I and II.* We use the elementary formula

$$\Delta u v = u \Delta v + v \Delta u + 2(u_x v_x + u_y v_y).$$

By (4),

$$\Delta \delta = e^\alpha \Delta(1 - r^2) + (1 - r^2) \Delta e^\alpha + 2e^\alpha(-2x\alpha_x - 2y\alpha_y).$$

Since  $\alpha$  is harmonic,

$$\Delta e^\alpha = e^\alpha(\alpha_x^2 + \alpha_y^2) = e^\alpha |\psi'|^2.$$

Hence

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta \delta &= -e^\alpha \left[ 1 + R \delta \psi' - \frac{1}{4}(1 - r^2) |\psi'|^2 \right] \\ &= -\frac{\delta}{1 - r^2} \cdot \frac{1 - \varrho^2}{1 - r^2} \end{aligned}$$

by (4) and (7). This proves I.

To prove II, we use the notation

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Then

$$\begin{aligned} D\delta &= e^\alpha D(1 - r^2) + (1 - r^2) D e^\alpha \\ &= e^\alpha [-2\bar{y} + (1 - r^2) \psi'] \\ &= 2\tau e^\alpha. \end{aligned}$$

At  $P$ , since  $W$  has a minimum,  $DW = 0$ , and so  $D\varrho^2 = \lambda D\delta$ . Further

$$(10) \quad \tau = \bar{\tau} = \varrho > 0 \text{ at } P.$$

Hence

$$\lambda 2\tau e^\alpha = D(\tau \bar{\tau}) = \varrho D(\tau + \bar{\tau}),$$

and so

$$D(\tau + \bar{\tau}) = 2\lambda e^\alpha.$$

By (5)

$$\tau + \bar{\tau} = (1 - r^2) \alpha_x - 2x.$$

<sup>2)</sup> BLASCHKE: Kreis und Kugel. Leipzig 1916, p. 115.

<sup>3)</sup> CARATHÉODORY: Funktionentheorie. Basel 1950, II, p. 17.

Since  $D\alpha = \psi'$ ,

$$(12) \quad (1 - r^2) \psi'' - 2\bar{\delta} \alpha_x - 2 = 2\lambda e^x$$

at  $P$ . Again, since  $\tau = \varrho$  at  $P$ , (5) gives

$$(13) \quad \psi' = \frac{2(\varrho + \bar{\delta})}{1 - r^2}, \quad \alpha_x = \frac{2(\varrho + x)}{1 - r^2},$$

and so, by (12)

$$(14) \quad \psi'' = \frac{2}{1 - r^2} \left[ \lambda e^x + 1 + \frac{2\bar{\delta}(\varrho + x)}{1 - r^2} \right].$$

We have

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta \varrho^2 &= \Delta \tau \bar{\tau} = \tau \Delta \bar{\tau} + \bar{\tau} \Delta \tau + 2(\tau_x \bar{\tau}_x + \tau_y \bar{\tau}_y) \\ &= \varrho \Delta(\tau + \bar{\tau}) + 2(|\tau_x|^2 + |\tau_y|^2) \end{aligned}$$

at  $P$ . By (5),

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= -2\psi' - 2x \frac{\partial}{\partial x} \psi' - 2y \frac{\partial}{\partial y} \psi' \\ &= -2\psi' - 2\bar{\delta} \psi''. \end{aligned}$$

Hence, by (13) and (14),

$$\Delta(\tau + \bar{\tau}) = \frac{-8(\varrho + x)}{1 - r^2} - \frac{8x(1 + \lambda e^x)}{1 - r^2} - \frac{16r^2(\varrho + x)}{(1 - r^2)^2}.$$

Again

$$\begin{aligned} \tau_x &= -x\psi' + \frac{1}{2}(1 - r^2)\psi'' - 1 \\ &= \lambda e^x - \frac{2iy\varrho}{1 - r^2} \end{aligned}$$

by (13) and (14). Further

$$\begin{aligned} \tau_y &= -y\psi' + \frac{i}{2}(1 - r^2)\psi'' + i \\ &= i \left[ \lambda e^x + \frac{2(1 + \varrho x)}{1 - r^2} \right]. \end{aligned}$$

Substitute these values in (15). We find

$$\frac{1}{4} \Delta \varrho^2 = \lambda^2 e^{2x} + \frac{2\lambda e^x}{1 - r^2} + \frac{2(1 - \varrho^2)}{(1 - r^2)^2}.$$

Finally, substitute for  $e^x$  from (4), and we obtain II.

§ 5. *Deduction of Theorem I.* Write

$$T = \frac{2(1 - \varrho)}{\delta} = \frac{2(1 - \varrho^2)}{\delta(1 + \varrho)},$$

so that, by (7),  $T(e^{i\theta}) = K(e^{i\theta})$ . Then

$$T = \frac{1 - \varrho^2}{\delta} + \frac{1}{4} \delta T^2,$$

and the last term is zero for  $|\delta| = 1$ . If  $K(e^{i\theta}) \geq k$ , then the hypothesis of (A) is satisfied. By (A),

$$T \geq k + \frac{1}{4} \delta T^2$$

inside the unit circle. Hence

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{2}{\delta} [1 - \sqrt{1 - k\delta}] \\ &\geq 2k[1 + \sqrt{1 - k\delta}]^{-1}. \end{aligned}$$

It remains to prove that  $K(\delta) \geq T(\delta)$ , i. e.,

$$2(1 - \varrho) \leq \frac{1 - r^2}{r} (1 + R\delta\psi').$$

Consider a particular value of  $\delta$ . By a rotation of the axes, we may suppose that  $\varrho = \tau = R\tau \geq 0$ . Then

$$(16) \quad \frac{1}{2}(1 - r^2) \alpha_x - x \geq 0, \quad \frac{1}{2}(1 - r^2) \alpha_y - y = 0.$$

The inequality to be proved is

$$2(1 + x) - (1 - r^2) \alpha_x \leq \frac{1 - r^2}{r} (1 + x \alpha_x + y \alpha_y).$$

By (16), this will follow if

$$2(1 + x) \leq 2x + \frac{1 - r^2}{r} + \frac{1}{2} \cdot 2r^2,$$

which is true.

(Eingegangen am 23. Juli 1952.)

